

Analisi Matematica 1 - 10/2/'16 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{|\log x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $]0, 1[$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\sqrt{e} \approx 1.65$, $2e \approx 5.44$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n + n}{n^2 + n + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Descrivere e disegnare l'insieme A degli $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\begin{cases} z\bar{z} \leq 2 \\ z + \bar{z} \leq 2 \end{cases} ;$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+2}{x} > x-1 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (2 + \cos x)^{\sin x} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti di $\text{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^5) e^{\frac{|x|}{1-x}}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \rightarrow 0$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{|\operatorname{Arcsin} x|^{\frac{3}{2}}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x) + \operatorname{sh}^2(2x) + 4 \cos(2x) - 4}{\sin x (\operatorname{ch}(2x) - 1) (e^{3x} - 1)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_2^3 \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx .$$

Suggerimento. Ad un certo punto dello svolgimento, notare un integrale immediato.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 10/2/'16 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|\log x|}{x^2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) Studiare la derivabilità di f in 1;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\sqrt{e} \approx 1.65$, $\frac{1}{2e} \approx 0.18$, $e^{\frac{5}{6}} \approx 2.30$ $\frac{5}{6e^{\frac{5}{6}}} \approx 0.16$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 3}{(-1)^n \log n + n^4 + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Descrivere e disegnare l'insieme A degli $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} z\bar{z} \leq 9 \\ \frac{z-\bar{z}}{i} \leq 4 \end{array} \right. ;$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{2-x}{x} > x-1 .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (5 + \sin x)^{\cos x - 1} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti di $\text{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - x^4) e^{\frac{x}{|1-x|}}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \rightarrow 0$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{|\operatorname{Arctg} x|^{\frac{3}{2}}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x) - 2 \operatorname{sh}^2(3x) - 2 \cos(3x) + 2}{(3x - \sin(3x)) \log(1+2x)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{4x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_2^3 \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) dx .$$

Suggerimento. Ad un certo punto dello svolgimento, notare un integrale immediato.

Svolgimento e risposta.