

Analisi Matematica 1 - 10/2/'16 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{|\log x|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. 1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]0, 1[$ in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in 0;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico si può tenere conto dell'approssimazione: $\sqrt{e} \approx 1.65$, $2e \approx 5.44$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n + n}{n^2 + n + 1}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Descrivere e disegnare l'insieme A degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z\bar{z} \leq 2 \\ z + \bar{z} \leq 2 \end{cases};$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x+2}{x} > x-1.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (2 + \cos x)^{\sin x};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti di $\text{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^5) e^{\frac{|x|}{1-x}}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per $x \rightarrow 0$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{|\operatorname{Arcsin} x|^{\frac{3}{2}}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x) + \operatorname{sh}^2(2x) + 4 \cos(2x) - 4}{\sin x (\operatorname{ch}(2x) - 1)(e^{3x} - 1)}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 2} dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_2^3 \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx .$$

Suggerimento. Ad un certo punto dello svolgimento, notare un integrale immediato.

Svolgimento e risposta.

Vernone 1

Esercizio 1

a) Se dominio di f è dato dalle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè } x > 0 \text{ e } x \neq 1. \text{ Si ha quindi}$$

$$\text{dom}(f) =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{\log x} & \text{per } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{\log x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Sia $0 < x < 1$; si ha

$$f'(x) = -\frac{2x \log x - \frac{1}{x} x^2}{\log^2 x} = -\frac{x(2 \log x - 1)}{\log^2 x}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2 \log x - 1 = 0$, cioè se e solo se $\log x = \frac{1}{2}$; cioè se e solo se $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Essendo $\sqrt{e} > 1$

si ha $f'(x) \neq 0$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2 \log x - 1 < 0$, cioè se e solo se $\log x < \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x < \sqrt{e}$; quindi sempre

quindi f è strettamente crescente su $]0, 1[$

Sia $x > 1$; si ha

$$f'(x) = \frac{x(2 \log x - 1)}{\log^2 x}$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2 \log x - 1 = 0$, cioè se e solo se

$$x = \sqrt{e}$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2 \log x - 1 > 0$, cioè se e solo se $x > \sqrt{e}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $1 < x < \sqrt{e}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[\sqrt{e}, +\infty[$, strettamente decrescente su $]1, \sqrt{e}]$

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]0, 1[, [\sqrt{e}, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]1, \sqrt{e}] \}$$

d) Il prolungamento continuo di $f|_{]0, 1[}$ a $[0, 1[$ è la funzione

$$g: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log^2 x} = 0$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$

e) Sia $0 < x < 1$; si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= - \frac{(2 \log x + 2x \frac{1}{x} - 1) \log^2 x - 2 \log x \frac{1}{x} (2x \log x - x)}{\log^4 x} = \\ &= - \frac{(2 \log x + 1) \log^2 x - 2 \log x (2 \log x - 1)}{\log^4 x} = \\ &= - \frac{2 \log^2 x + \log x - 4 \log x + 2}{\log^3 x} = - \frac{2 \log^2 x - 3 \log x + 2}{\log^3 x} \end{aligned}$$

Il polinomio $2y^2 - 3y + 2$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; si ha quindi $2y^2 - 3y + 2 > 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Si ha quindi $2 \log^2 x - 3 \log x + 2 > 0 \quad \forall x \in]0, 1[$

Si ha quindi $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in]0, 1[$, $f''(x) > 0$
se e solo se $\log x < 0$; quindi per ogni $x \in]0, 1[$

quindi f è strettamente convessa su $]0, 1[$

Si ha $x > 1$; si ha

$$f''(x) = \frac{2 \log^2 x - 3 \log x + 2}{\log^3 x}$$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $\log x > 0$; quindi $\forall x \in]1, +\infty[$

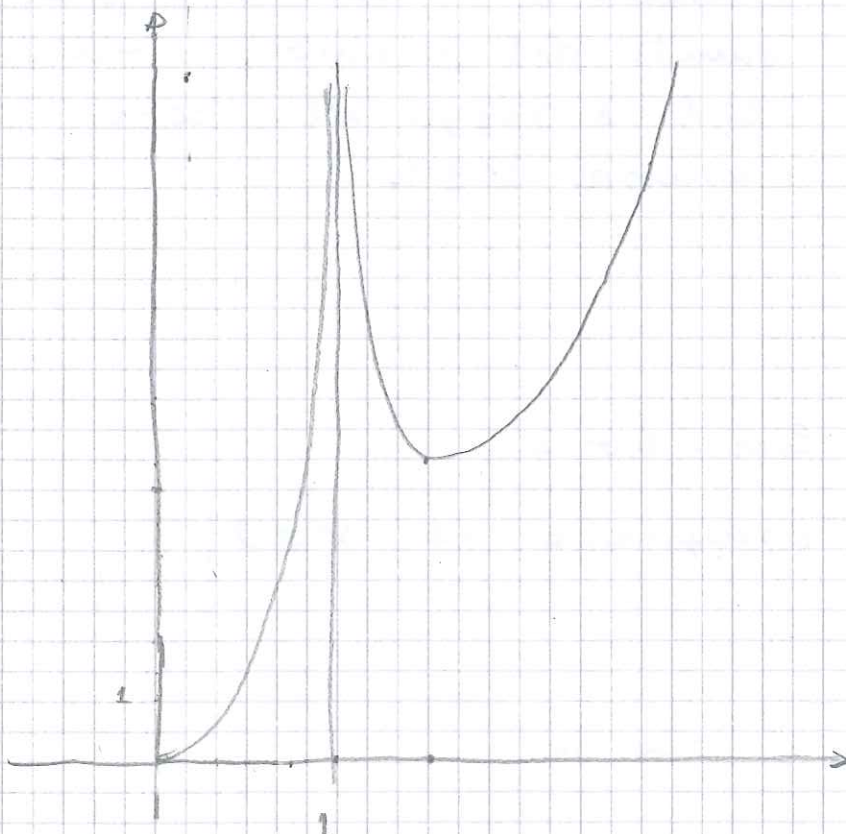
quindi f è strettamente convessa su $]1, +\infty[$.

Si ha quindi:

$$C(\uparrow) = \{]0, 1[,]1, +\infty[\}, C(\downarrow) = \emptyset, C(\downarrow) = \emptyset$$

$$\text{Si ha } \sqrt{e} \approx 1.65$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e \approx 5.44$$



Esercizio 2

Si ha

$$\frac{(-1)^n \log n + n}{n^2 + n + 1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

quindi la serie è divergente positivamente

Esercizio 3

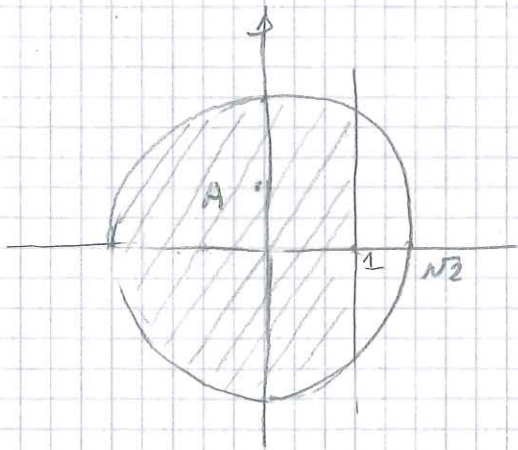
Se $z = x + iy$; si ha

$$z \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z = 2x$$

quindi si ha $z \in A$ se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \quad \text{cioè se e solo se} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



L'insieme A è costituito dai punti del cerchio chiuso di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, con aggiunta $x \leq 1$.

Esercizio 4

La disuguaglianza è assegnata per $x \neq 0$

Se $x \neq 0$, si ha

$$\frac{x+2}{x} > x-1 \quad \text{se e solo se}$$

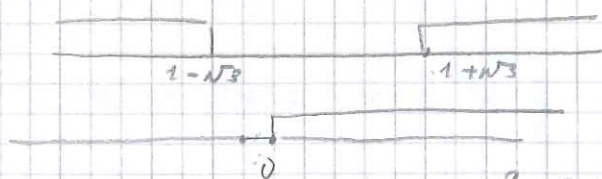
$$\frac{x+2}{x} - x + 1 > 0, \quad \text{quindi se e solo se}$$

$$\frac{x+2 - x^2 + x}{x} > 0, \text{ vale se e solo se}$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 2}{x} > 0, \text{ vale se e solo se}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x} < 0$$

Si ha $x^2 - 2x - 2 > 0$ se e solo se $x < 1 - \sqrt{3}$ o $x > 1 + \sqrt{3}$



Si ha quindi $\frac{x^2 - 2x - 2}{x} < 0$ se e solo se

$$x < 1 - \sqrt{3} \text{ o } 0 < x < 1 + \sqrt{3}$$

Esercizio 5

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = e^{\sin x \log(2 + \cos x)}$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x \log(2 + \cos x)} \left(\cos x \log(2 + \cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{2 + \cos x} \cdot (-\sin x) \right) = \\ &= (2 + \cos x)^{\sin x} \left(\cos x \log(2 + \cos x) - \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 6

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^5) e^{\frac{|x|}{1-x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x < 0}} (-x^5 \cdot e^{\frac{-x}{1-x}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 \cdot e) = +\infty$$

Esercizio 7

Sicché

$$|\operatorname{Arccos} x|^{\frac{3}{2}} \sim |x|^{\frac{3}{2}}$$

Sicché

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + o(x) = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x = x + o(x) \sim x$$

Sicché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{|\operatorname{Arccos} x|^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{|\operatorname{Arccos} x|^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} \frac{x}{(-x)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} - \frac{x}{(-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} - \frac{1}{(-x)^{\frac{1}{2}}} = -\infty$$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro la funzione non è convergente per $x \rightarrow 0$.

Esercizio 8

Sicché

$$\sin x (\operatorname{ch}(2x) - 1) (e^{3x} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \cdot \frac{1}{2} (2x)^2 \cdot 3x = 6x^4$$

Per $y \rightarrow 0$ sicché

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Si he quindi

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin^2(2x) = 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)$$

Per $y \rightarrow 0$ vale

$$\sinh y = y + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

Si he quindi

$$\sinh(2x) = 2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sinh^2(2x) = 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)$$

Per $y \rightarrow 0$ vale

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

Si he quindi

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$4 \cos(2x) = 4 - 8x^2 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$$

Si he quindi

$$\sin^2(2x) + \sinh^2(2x) + 4 \cos(2x) - 4 =$$

$$= 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^4) + 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + 4 - 8x^2 + \frac{8}{3}x^4 - 4 =$$

$$= \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) \sim \frac{8}{3}x^4$$

Si he quindi

$$\frac{\sin^2(2x) + \sinh^2(2x) + 4 \cos(2x) - 4}{\sin x (\cosh(2x) - 1) (e^{3x} - 1)} \sim \frac{\frac{8}{3}x^4}{6x^4} = \frac{4}{9}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x) + \sinh^2(2x) + 4 \cos(2x) - 4}{\sin x (\cosh(2x) - 1) (e^{3x} - 1)} = \frac{4}{9}$$

Esercizio 9 (1° modo)

Poniamo $e^{2x} = t$. Si ha $2x = \log t$; quindi:

$$x = \frac{1}{2} \log t; \text{ quindi } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}. \text{ Per } x=0 \text{ si ha } t=1$$

per $x=1$ si ha $t=e^2$. Si ha quindi:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+t} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{1}{t(t+1)} dt$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt$$

Per $t=0$, si ha $1=A$; cioè $A=1$. Per $t=-1$, si ha

$1 = -B$; quindi $B=-1$. Si ha quindi:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{1}{t(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log t - \log(t+1) \right]_1^{e^2} = \frac{1}{2} (\log e^2 - \log(e^2+1) + \log 2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \log \frac{2}{1+e^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{1+e^2}$$

Esercizio 9 (2° modo)

Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \int_0^1 \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^{2x}} (2e^{2x})\right) dx = \left[x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \log(1+e^2) + \frac{1}{2} \log 2 = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{1+e^2}
 \end{aligned}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x-2} = \frac{x^2+2x-2-2x+2-1}{x^2+2x-2} = 1 - \frac{2x-1}{x^2+2x-2}$$

$$\text{Si ha } x^2+x-2 = (x-(-1+\sqrt{3}))(x-(-1-\sqrt{3}))$$

Esistono A, B ∈ ℝ tali che

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+1-\sqrt{3}} + \frac{B}{x+1+\sqrt{3}}$$

quindi

$$2x-1 = A(x+1+\sqrt{3}) + B(x+1-\sqrt{3})$$

Per $x = -1-\sqrt{3}$ si ha

$$-2-2\sqrt{3}-1 = B(-1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}) \quad ; \text{ quindi }$$

$$2\sqrt{3}+3 = 2\sqrt{3}B \quad ; \text{ quindi }$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

Per $x = -1+\sqrt{3}$ si ha

$$-2+2\sqrt{3}-1 = A(-1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}) \quad ; \text{ quindi }$$

$$2\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3} A; \text{ quindi}$$

$$A = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Si ha quindi:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \frac{1}{x + 1 - \sqrt{3}} - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3}}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} dx = \\ &= \int_1^2 \left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \frac{1}{x + 1 - \sqrt{3}} - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3}} \right) dx = \\ &= \left[x - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \log(x + 1 - \sqrt{3}) - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \log(x + 1 + \sqrt{3}) \right]_1^2 = \\ &= \left(2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \log(3 - \sqrt{3}) - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \log(3 + \sqrt{3}) \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \log(2 - \sqrt{3}) + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \log(2 + \sqrt{3}) \right) = \\ &= 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \log \frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \log \frac{3 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \\ &= 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \log(3 + \sqrt{3}) - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \log(3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \log(3+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \log(3+\sqrt{3}) - \log(3-\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \log(3-\sqrt{3}) = \\
 &= 1 - \log((3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \\
 &= 1 - \log 6 + \frac{\sqrt{3}}{2} \log(2+\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Esercizio 11

Si ha

$$\begin{aligned}
 &\int_2^3 \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \right]_2^3 - \int_2^3 x \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) dx = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \right]_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 x \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}} dx \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \right]_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}} dx = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \right]_2^3 + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \right]_2^3 + \frac{1}{4} \int_2^3 (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (2x) dx = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + \frac{1}{4} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^3 = \\
 &= \left[x \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} \right]_2^3 =
 \end{aligned}$$

$$= 3 \log (2 - \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \sqrt{8} - 2 \log (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log (2 - \sqrt{2})^3 - \log (\sqrt{3} - 1)^2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log (8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2}) - \log (3 - 2\sqrt{3} + 1) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log (20 - 14\sqrt{2}) - \log (4 - 2\sqrt{3}) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log \frac{10 - 7\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log ((10 - 7\sqrt{2})(2 + \sqrt{3})) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \log (20 + 10\sqrt{3} - 14\sqrt{2} - 7\sqrt{6}) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$