

Analisi Matematica 1 - 6/6/'16 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 11) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x + 1)e^{\frac{3x}{x+5}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]-5, +\infty[$ in -5 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -5 ;
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono considerare opportune restrizioni di f e disegnare i grafici delle restrizioni, usando unità di misura diverse per i due assi, oppure disegnare un unico grafico, senza tenere conto della proporzionalità.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{-25-\sqrt{465}}{2} \approx -23.28$, $f(\frac{-25-\sqrt{465}}{2}) \approx -1016.64$, $\frac{-25+\sqrt{465}}{2} \approx -1.72$, $f(\frac{-25+\sqrt{465}}{2}) \approx -0.15$, $-\frac{55}{23} \approx -2.39$, $f(-\frac{55}{23}) \approx 0.01$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n^5 + 3n^2 + 2}{3^n + 25n + 1} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} \cdot 5^{n-1}}{(-1)^n 2^{5n+1}} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Descrivere e disegnare l'insieme degli $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} z + \bar{z} \leq 2 \\ |z - 1| \leq 2 \end{array} \right. ;$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$x^2 + |x| < 2 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^{\sin \log x} ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) calcolare la derivata di f nei punti di $\text{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - e^{-x}) \operatorname{Arctg}(x + \sin x) .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sqrt{x} + \sin x)}{x \log x \cos x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg}^2(2x) - e^x \log(1 + 4x^2) + 4x^3}{(e^{3x} - 1)(2x - \sin(2x))} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \log(x + 7) \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 1 - 6/6/'16 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 11) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x + 3)e^{\frac{x+1}{x-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $]-\infty, 1[$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1;
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono considerare opportune restrizioni di f e disegnare i grafici delle restrizioni, usando unità di misura diverse per i due assi, oppure disegnare un unico grafico, senza tenere conto della proporzionalità.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $2 - \sqrt{6} \approx -0.45$, $f(2 - \sqrt{6}) \approx 1.44$, $2 + \sqrt{6} \approx 4.45$, $f(2 + \sqrt{6}) \approx 57.76$, $\frac{2}{7} \approx 0.29$, $f(\frac{2}{7}) \approx 0.59$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + n + 3}{n2^n + n^3 + 3} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente serie è convergente e, in caso affermativo, determinarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{3n+1}}{5^{2n-1}} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Descrivere e disegnare l'insieme degli $z \in \mathbf{C}$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} z + \bar{z} \geq 4 \\ |z - 2| \leq 4 \end{array} \right. ;$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$2x^2 + |x| > 1 .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = x^{\cos \log x} ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f ;

(b) calcolare la derivata di f nei punti di $\text{dom}(f)$ (non è necessario semplificare il risultato).

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - e^{-x}) \operatorname{Arctg}(x - \cos x) .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \operatorname{sh}^2 x)}{\sqrt[3]{x} \log x \cos x} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg}^2(3x) - e^x \log(1 + 9x^2) + 9x^3}{(1 - \cos(2x))^2} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \, dx .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \log(x + 5) \, dx .$$

Svolgimento e risposta.