

Analisi Matematica 1 - 21/6/'16 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{-x^2},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\downdownarrows)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$, $\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.43$,

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22, f(\sqrt{\frac{3}{2}}) \approx 0.27.$$

Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{n}} - n \right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^6 = -729 .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{per } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{per } x \geq 0 \end{cases} ;$$

Determinare (se possibile) a e b in modo che f sia derivabile.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{x} < |x + 1| .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e in caso affermativo calcolare in tali punti la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \operatorname{Arcsin} x}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{1 + 2x} + \log(1 + x) + \operatorname{sh}^2 x}{x - \sin x}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x} + 2^x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ e di $\frac{1}{x^2+px+q}$, per $p^2 - 4q < 0$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{\operatorname{Arcsin} x} dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.