Analisi Matematica 1 - 21/6/'16 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 6) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = xe^{-x^2} ,$$
   rispondendo alle seguenti domande:
   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;
   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
   (d) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$, $\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.43$, $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22$, $f(\sqrt{\frac{3}{2}}) \approx 0.27$.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2-\frac{1}{n}}-n\right) .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^6 = -729 .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x+1 & \text{per } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{per } x \geq 0 \end{cases} ;$$

Determinare (se possibile) a e b in modo che f sia derivabile.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 1) Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{x} < |x+1| .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2}\ ;$$

(a) determinare il dominio naturale di f;

(b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;

(c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e in caro affermativo calcolare in tali punti la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \operatorname{Arcsin} x}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}\ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{1+2x} + \log(1+x) + \operatorname{sh}^2 x}{x - \sin x}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 1) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x}+2^x}\,dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+2x+2}\,dx\,.$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ e di $\frac{1}{x^2+px+q}$, per $p^2-4q<0$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{\operatorname{Arcsin} x}\,dx\,.$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha dom $(f) = \mathbb{R}$

b) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)(-x^2)e^{-x^2}$$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} (-x^2)e^{-x^2} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} y e^y = 0$$

Quindi si ha $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)(-x^2)e^{-x^2} = 0$

Analogamente si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$f'(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $1 - 2x^2 = 0$, cioè se e solo se $x^2 = \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - 2x^2 > 0$, cioè se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quindi f è strettamente crescente su $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, f è strettamente decrescente su $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e su $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$$

$$m(\searrow) = \left\{ \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\right\}$$

d) Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x) - 4x\,e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}(-2x) =$$

$$= -2x\,e^{-x^2} - 4x\,e^{-x^2} + 4x^3 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^3 - 6x) =$$

$$= 2x\,e^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $2x^2 - 3 = 0$,

cioè se e solo se $x = 0$ o $x^2 = \frac{3}{2}$, cioè se e solo se

$x = 0$ o $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < 0$ o $x > \frac{\sqrt{6}}{2}$

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -\frac{\sqrt{6}}{2}$ o $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$

Quindi f è strettamente convessa su $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$

e su $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, f è strettamente concava

su $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right], \left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]\}$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right], \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[\right\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow = \emptyset$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right], \left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \right\}$$

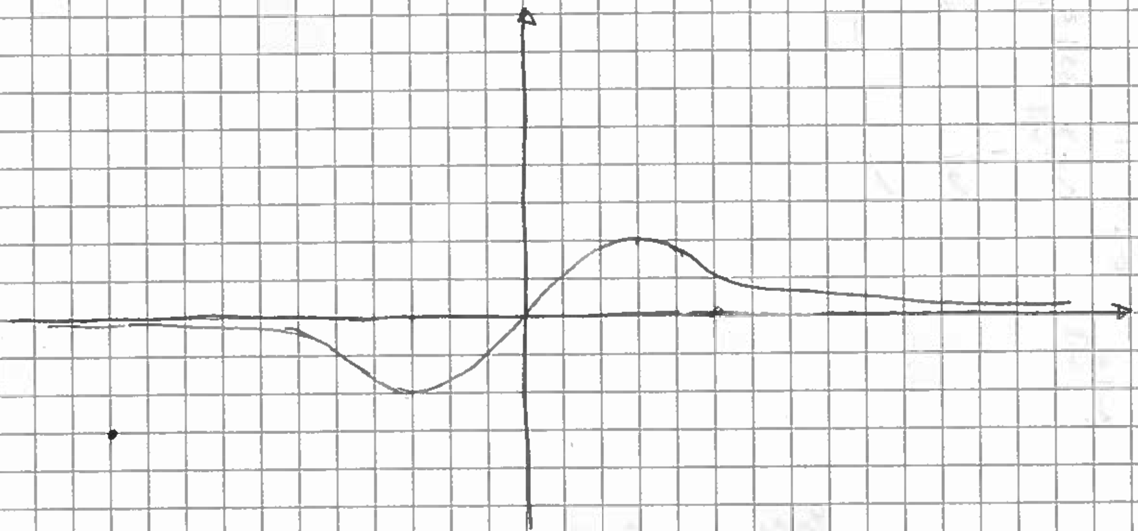
Si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.43$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.71 \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx -0.43$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22, \quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}} \approx 0.27$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} \approx -1.22, \quad f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\ldots} \approx -0.27$$



Esercizio 2

Si ha

$$\sqrt{n^2-\frac{1}{n}}-n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}-1\right) \sim n\,\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^3}\right)$$

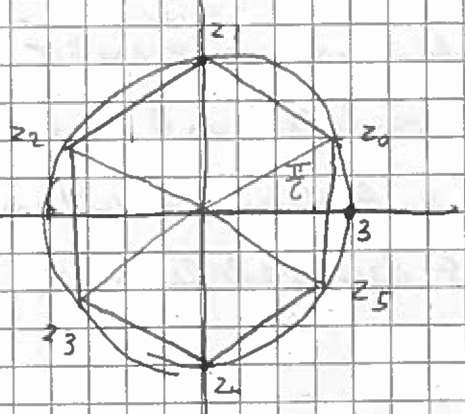
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha $|-729| = 729$ e $\pi \in \arg(-729)$

Si ha $\sqrt[6]{729} = 3$



Si ha quindi

$$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = 3i$$

$$z_2 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_3 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_4 = -3i$$

$$z_5 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Esercizio 4

Per il carattere locale della derivabilità, f è derivabile su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$.
Quindi f è derivabile se e solo se f è derivabile in 0.

Si ha $\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} (x+1) = 1$

$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} (x^2 + ax + b) = b$

$f(0) = b$

Quindi f è continua in 0 se e solo se $b = 1$

Essendo una funzione derivabile in un punto continua nel punto, f derivabile in 0 se e solo se f continua in 0 e f derivabile in 0, quindi se e solo se $b = 1$ e f derivabile in 0.

Supposto $b = 1$ si ha

$$\lim_{\substack{x \to 0- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0- \\ x<0}} 1 = 1 \;;$$

quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha $f'_-(0) = 1$.

Si ha

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x \to 0+} (2x+a) = a \;;$$

quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f'_+(0) = a$.

Quindi f è derivabile in 0 se e solo se $a = 1$

Quindi f è derivabile se e solo se $a = 1$ e $b = 1$

Esercizio 5

La disequazione è assegnata per $x \geq 0$

Quindi la disequazione si scrive

$$\begin{cases} \sqrt{x} < |x+1| \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Essendo entrambi i membri della prima disequazione positivi, otteniamo una disequazione equivalente elevandoli al quadrato

Il sistema sopra è quindi equivalente a

$\begin{cases} x < |x+1|^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ cioè a $\begin{cases} x < (x+1)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a

$\begin{cases} x < x^2 + 2x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Il polinomio $x^2 + x + 1$ ha discriminante $\Delta = -3 < 0$; si ha quindi $x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Il sistema sopra è quindi equivalente a $x \geq 0$.

Esercizio 6

a) Il dominio di f è dato dalle x reali tali che $x \operatorname{Arctg} x^2 \geq 0$; quindi tali che $x \geq 0$
Si ha quindi
$\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$

b) Sia $x > 0$; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2}} \left(\operatorname{Arctg} x^2 + x \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x \right)$$

$$= \frac{\operatorname{Arctg} x^2 + \frac{2x^2}{1+x^2}}{2\sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2}} = \frac{(1+x^2)\operatorname{Arctg} x^2 + 2x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2}}$$

c) Si ha

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)\operatorname{Arctg} x^2 + 2x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x \operatorname{Arctg} x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \frac{x^2}{x^{3/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$

Esercizio 7

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \; \operatorname{Arctg} x}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot x}{e^{-\sqrt{x}}\left(e^{2\sqrt{x}} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 \cdot 2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

Esercizio 8

Si ha

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$$

Si ha

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + o(x^3)$$

Si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y + \binom{\frac{1}{2}}{2} y^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} y^3 + o(y^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{16} y^3 + o(y^3)$$

Si ha quindi

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 + o(x^3)$$

Si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$\sin x = x + o(x^2)$

$\sin x = x^2 + o(x^3)$

Si ha quindi

$\cos^2 x - \sqrt{1+2x} + \log(1+x) + \sin^2 x =$

$= 1 - x^2 + o(x^3) - 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 =$

$= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{6}x^3$

Si ha quindi

$$\frac{\cos^2 x - \sqrt{1+2x} + \log(1+x) + \sin^2 x}{x - \sin x} \sim \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = -1$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{1+2x} + \log(1+x) + \sin^2 x}{x - \sin x} = -1$$

Esercizio 9

Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x} + 2^x}$

Si ha

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x} + 2^x} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2^x} = x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Essendo $0 < \frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio è convergente

Esercizio 10

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+2-2x-2-1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{-2x-3}{x^2+2x+2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2-2+3}{x^2+2x+2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+1-1+2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{(x+1)^2+1}\right) dx$$

$$= \left[x - \log(x^2+2x+2) - \operatorname{Arctg}(x+1) \right]_0^1 =$$

$$= 1 - \log 5 - \operatorname{Arctg} 2 + \log 2 + \operatorname{Arctg} 1 =$$

$$= 1 + \log \frac{2}{5} + \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctg} 2$$

Esercizio 11

Poniamo $\operatorname{Arcsin} x = t$; si ha $x = \sin t$;

quindi $\frac{dx}{dt} = \cos t$; per $x = 0$ si ha $t = 0$;

per $x = 1$ si ha $t = \frac{\pi}{2}$

Si ha quindi

$$\int_0^1 e^{\operatorname{Arcsin} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\,dt$$

10

Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt = \left[e^t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t (-\sin t) \, dt =$$

$$= \left[e^t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt =$$

$$= \left[e^t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[e^t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt =$$

$$= \left[e^t (\cos t + \sin t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt$$

Quindi si ha

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt = \left[e^t (\cos t + \sin t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \left[e^t (\cos t + \sin t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)$$