

Analisi Matematica 1 - 11/7/'16 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 7) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |x + 2|e^x,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in -2 ;
- (e) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\dagger)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico. Si possono anche considerare opportune restrizioni di f e disegnare i grafici delle restrizioni, usando unità di misura diverse per i due assi. Si può anche disegnare un unico grafico, senza tenere conto della proporzionalità.

Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1}{e^3} \approx 0.05$, $\frac{2}{e^4} \approx 0.04$.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}.$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^2 = 6 - 32i.$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{x+1} < x.$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = (\operatorname{Arcsin} x)(\operatorname{Arctg} \sqrt{1-x^2});$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e in caso affermativo calcolare in tali punti la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{(\sin x + 2) \log x^2}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\sqrt{x}} - 2^{-\sqrt{x}}}{\log(1 + 3x) \cos x}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x \sqrt[3]{1 + 3x} - 1 - \log(1 + 2x)}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\sqrt{a^2 - x^2}$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $x \cos(\alpha x)$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) f ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) f ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^x & \text{per } x \geq -2 \\ -(x+2)e^x & \text{per } x < -2 \end{cases}$$

Sia $x > -2$. Si ha

$$f'(x) = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -3$; quindi sempre
quindi f è strettamente crescente su $[-2, +\infty[$

Sia $x < -2$. Si ha

$$f'(x) = -e^x(x+3)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -3$. Si ha $f'(x) > 0$
se e solo se $x - 3 < 0$, cioè se e solo se $x < -3$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-3 < x < -2$

quindi f è strettamente crescente su
 $]-\infty, -3]$, f è strettamente decrescente su
 $[-3, -2]$

Si ha quindi:

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, -3], [-2, +\infty[\}, \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [-3, -2] \}$$

d) Si ha

2

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2^+ \\ x > -2}} e^x (x+3) = \frac{1}{e^2}$$

Quindi f è derivabile da destra -2 e $f'_+(-2) = \frac{1}{e^2}$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2^- \\ x < -2}} -e^x (x+3) = -\frac{1}{e^2}$$

Quindi f è derivabile in -2 da sinistra e $f'_-(-2) = -\frac{1}{e^2}$

Essendo $f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$ f non è derivabile in -2

e) Sia $x > -2$. Si ha

$$f''(x) = 3e^x + e^x + xe^x = e^x(x+4)$$

Si ha $e^x(x+4) > 0$ se e solo se $x > -4$; quindi sempre; quindi f è strettamente convessa su $[-2, +\infty[$.

Sia $x < -2$. Si ha

$$f''(x) = -e^x(x+4)$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -4$

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x+4 < 0$, cioè se e solo se $x < -4$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $-4 < x < -2$.

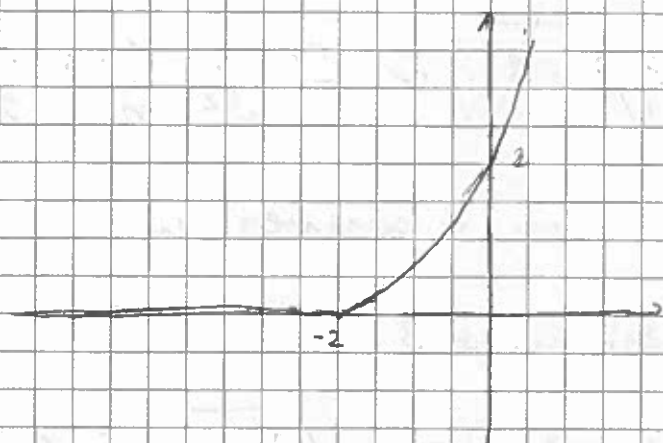
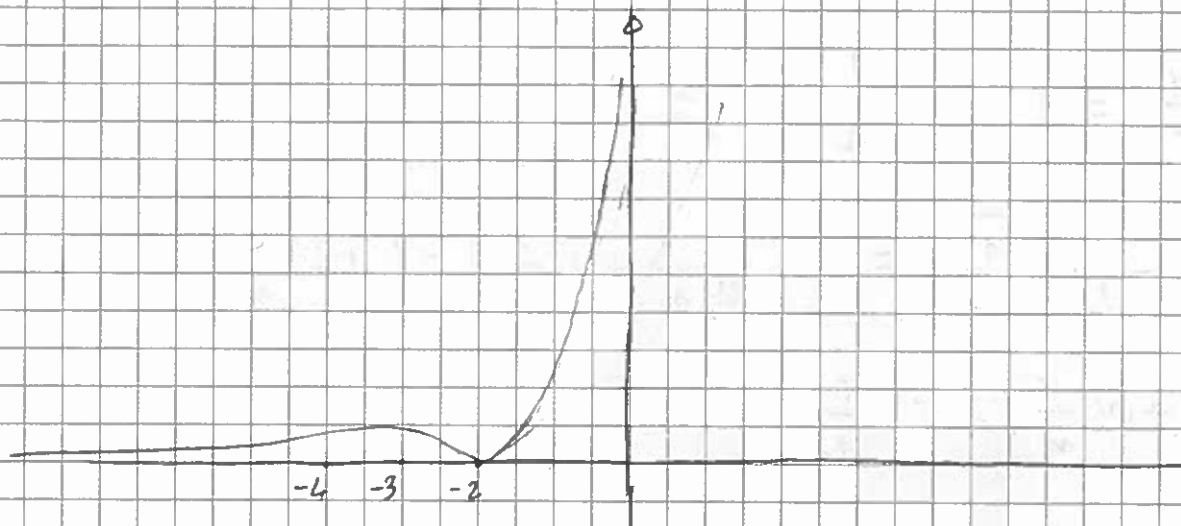
Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -4]$ e f è strettamente concava su $[-4, -2]$

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -4], [-2, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset$$

$$C(\downarrow) = \{ [-4, -2] \}$$

$$\text{p.e.} \quad f(-3) = \frac{1}{e^3} \approx 0.05, \quad f(-4) = \frac{2}{e^4} \approx 0.04$$



Exercício 2

Sol. 2

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \sim \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{2n}$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}} \right)}{2n} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}} \right)$$

Sol. 2

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$$

4

Siccome quindi

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Siccome quindi

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Essendo $\frac{3}{2} > 1$, la serie è convergente.

Esercizio 3

Siccome $|6 - 32i| = 2|3 - 16i| = 2\sqrt{265}$ e

$$\operatorname{Arg} \frac{-32}{6} = -\operatorname{Arg} \frac{16}{3} = \arg(6 - 32i)$$

Siccome quindi

$$z = \pm \sqrt{2\sqrt{265}} e^{i \frac{\operatorname{Arg} \frac{16}{3}}{2}}$$

Esercizio 4

La disuguaglianza è assegnata per $x+1 \geq 0$;
risolvi quindi

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} < x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{è equivalente a} \quad \begin{cases} x+1 < x^2 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a} \quad \begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{cioè a } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{non ammette soluzioni}$$

Quindi la disuguaglianza eseguita è equivalente a

$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dalle x tali che

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} ; \text{quindi} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} ; \text{quindi} -1 \leq x \leq 1$$

Si ha quindi $\text{dom}(f) = [-1, 1]$

b) Sia $x \in]-1, 1[$; si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{1-x^2} + \\ &+ \operatorname{Arccos} x \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{1-x^2})^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{1-x^2} - \frac{x \operatorname{Arccos} x}{2-x^2} \right) \end{aligned}$$

c) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{1-x^2} - \frac{x \operatorname{Arccos} x}{2-x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\infty \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in 1 e si ha $f'(1) = +\infty$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{1-x^2} - \frac{x \operatorname{Arccos} x}{2-x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\mathbb{R}$ in -1 e si ha $f'(-1) = +\infty$

Esercizio 6

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{x}} - 2^{-\sqrt{x}}}{(\sin x + 2) \log x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{x}}}{(\sin x + 2) \log x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x + 2} \cdot \frac{2^{\sqrt{x}}}{2 \log x} \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{x}}}{2 \log x} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^y}{2 \log y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^y}{4 \log y} = +\infty \end{aligned}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $-1 \leq \sin x \leq 1$; quindi

$$1 \leq \sin x + 2 \leq 3; \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq 1$$

Essendo $\frac{1}{\sin x + 2} \geq \frac{1}{3}$ ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{x}}}{2 \log x} = +\infty, \quad \text{si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x + 2} \cdot \frac{2^{\sqrt{x}}}{2 \log x} = +\infty$$

Esercizio 7

S. l. h. e.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\sqrt{x}} - 2^{-\sqrt{x}}}{\log(1+3x) \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x} \log 2} - e^{-\sqrt{x} \log 2}}{3x \cdot 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x} \log 2} (e^{2\sqrt{x} \log 2} - 1)}{3x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 \cdot 2\sqrt{x} \log 2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log 2}{3} \frac{1}{x^{1/2}} = +\infty
 \end{aligned}$$

Esercizio 8

S. l. h. e.

$$\cosh x - 1 \sim \frac{1}{2} x^2$$

S. l. h. e.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

S. l. h. e. per $y \rightarrow 0$

$$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} y + \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{3} y - \frac{1}{9} y^2 + o(y^2)$$

S. l. h. e. quindi

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{3} (3x) - \frac{1}{9} (3x)^2 + o(x^2) = 1 + x - x^2 + o(x^2)$$

S. l. h. e.

$$e^x \cos x \sqrt[3]{1+3x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+x-x^2+o(x^2)\right) = \\
 &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x+\frac{1}{2}x^2\right)\left(1+x-x^2+o(x^2)\right) = \\
 &= \left(1+x+o(x^2)\right)\left(1+x-x^2+o(x^2)\right) = \\
 &= 1+x-x^2+o(x^2)+x+x^2 = 1+2x+o(x^2)
 \end{aligned}$$

Per $y \rightarrow 0$ vale

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

Si ha quindi

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 e^x \cos x \sqrt{1+3x} - 1 - \log(1+2x) &= \\
 &= 1+2x+o(x^2) - 1 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2
 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{e^x \cos x \sqrt{1+3x} - 1 - \log(1+2x)}{e^x - 1} \sim \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 4$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x \sqrt{1+3x} - 1 - \log(1+2x)}{e^x - 1} = 4$$

Esercizio 9

Si ha

10

$$\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+x}{x^2+1} dx =$$

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} \log 2$$

Esercizio 10

Poniamo $x = 5 \sin t$, si ha $\frac{dx}{dt} = 5 \cos t$

Per $x=0$ possiamo scegliere $t=0$; per $x=5$ possiamo scegliere $t = \frac{\pi}{2}$. Si ha quindi

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25-25\sin^2 t} \cdot 5 \cos t dt =$$

$$= 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt =$$

$$= 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt =$$

$$= \frac{25}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{25}{4} \pi$$

Exercise 11 (10 marks)

siehe

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x \cos(2x)) \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) \, dx = \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(\left[x \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2x) \, dx \right) = \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} (-1) + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \pi^2
 \end{aligned}$$

Exercise 11 (2° modulo)

Sei h_2

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot x \sin x \, dx = \\
 &= \left[-\cos x \cdot x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x (\sin x + x \cos x) \, dx = \\
 &= \left[-x \sin x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x + x \cos^2 x) \, dx = \\
 &= \left[-x \sin x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx = \\
 &= \left[-x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (1 - \sin^2 x) \, dx = \\
 &= \left[-x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx = \\
 &= \left[-x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx
 \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx = \left[-x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \left[-x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \pi^2
 \end{aligned}$$