

Analisi Matematica 1 - 5/9/'16

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2 |\log x| ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);
- (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 1;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (f) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\Downarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\frac{1}{2e} \approx 0.18$; $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22$, $\frac{3}{2e^3} \approx 0.07$.

.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n + \log(3+n)} \sin \frac{1}{n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^3 = -27i .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente; per tali x determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{x+3} \right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arctg} \operatorname{Arcsin} x ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
- (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e in caso affermativo calcolare in tali punti la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(3x))^3}{(2x - \sin(2x))^2} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} \log(3 + \sin x)} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[4]{16x^4 + x^2} \right) .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} dx .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \log^3 x \, dx .$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\log^n x$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1} \, dx .$$

Svolgimento e risposta.