Analisi Matematica 1 - 5/9/'16

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 8) Studiare la seguente funzione
$$f(x) = x^2|\log x|\,,$$
rispondendo alle seguenti domande:

   (a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

   (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio (non sono necessari i passaggi formali);

   (c) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

   (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in 1;

   (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in 0 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;

   (f) (p. 2*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

   Disegnare approssimativamente il grafico di f. Si possono usare unità di misura diverse per i due assi.

   NB (*) I punti relativi alle singole domande sono assegnati solo se si disegna il grafico.

   Per disegnare il grafico e per lo studio di funzione si può tenere conto dell'approssimazione: $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\frac{1}{2e} \approx 0.18$; $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22$, $\frac{3}{2e^3} \approx 0.07$.

   .

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+\log(3+n)} \sin\frac{1}{n} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Risolvere la seguente equazione complessa esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

$$z^3 = -27i .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi $x \in \mathbf{R}$ per i quali la seguente serie è definita ed è convergente; per tali x determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^n .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Sia f la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arctg}\,\mathrm{Arcsin}\,x ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) calcolare la derivata di f nei punti interni al dominio;
   (c) dire se f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ nei punti frontiera del dominio e in caro affermativo calcolare in tali punti la derivata di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

NB. Nel calcolo della derivata si chiede di esplicitare i passaggi.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(3x))^3}{(2x-\sin(2x))^2} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}\log(3+\sin x)} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[4]{16x^4+x^2}\right) .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 2) Calcolare il seguente integrale (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \log^3 x\, dx\,.$$

Si chiede di non usare formule che danno direttamente la primitiva di $\log^n x$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1}\, dx\,.$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$

b) Si ha

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Sia $x > 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{per } x \geq 1 \\ -x^2 \log x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Sia $x > 1$. Si ha

$$f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x =$$

$$= x(2 \log x + 1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2 \log x + 1 = 0$, cioè $\log x = -\frac{1}{2}$, cioè $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ quindi mai

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2 \log x + 1 > 0$; cioè $\log x > -\frac{1}{2}$, cioè $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$; quindi sempre

Quindi f è strettamente crescente su $[1, +\infty[$.

Sia $0 < x < 1$. Si ha

$$f'(x) = -x(2 \log x + 1)$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2 \log x + 1 = 0$,
cioè $\log x = -\frac{1}{2}$, cioè $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2 \log x + 1 < 0$, cioè
$2 \log x < -1$; cioè $\log x < -\frac{1}{2}$, cioè $x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1$.

Quindi f è strettamente crescente su $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$, f è strettamente decrescente su $[\frac{1}{\sqrt{e}}, 1]$.

Si ha quindi

$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{]0, \frac{1}{\sqrt{e}}], [1, +\infty[\right\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$

$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{ [\frac{1}{\sqrt{e}}, 1] \right\}$

d) Si ha

$$\lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1+ \\ x > 1}} x(2 \log x + 1) = 1$$

Quindi f è derivabile da destra in 1 e si ha

$f'_{+}(1) = 1$

Si ha

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1- \\ x < 1}} -x(2 \log x + 1) = -1$$

Quindi f è derivabile da sinistra in 1 e si ha

$f'_{-}(1) = -1$

Essendo $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, f non è derivabile in 1

d) Il prolungamento continuo di f in 0 è la funzione

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \to \begin{cases} f(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 |\log x|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x |\log x| = 0$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$

e) Se $x > 1$ si ha

$$f''(x) = 2 \log x + 2x \frac{1}{x} + 1 = 2 \log x + 3$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $2 \log x + 3 = 0$, cioè

$\log x = -\frac{3}{2}$, cioè $x = e^{-\frac{3}{2}} < 1$; quindi mai

Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $2 \log x + 3 > 0$, cioè

$\log x > -\frac{3}{2}$, cioè $x > e^{-\frac{3}{2}}$; quindi sempre.

Quindi f è strettamente convessa su $[1, +\infty[$

Se $0 < x < 1$, si ha

$$f''(x) = -(2 \log x + 3)$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $2\log x+3=0$, cioè

$\log x = -\frac{3}{2}$, cioè $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

Si ha $f''(x)>0$ se e solo se $2\log x+3<0$, cioè

$\log x < -\frac{3}{2}$, cioè $x < e^{-\frac{3}{2}}$.

Si ha $f''(x)<0$ se e solo se $e^{-\frac{3}{2}}<x<1$

Quindi f è strettamente convessa su

$]0, e^{-\frac{3}{2}}]$, f è strettamente concava su

$[e^{-\frac{3}{2}}, 1]$

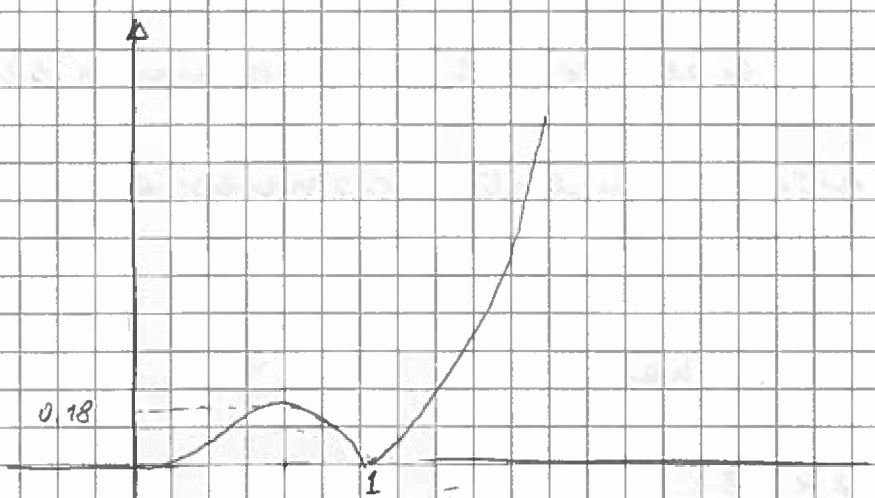
Si ha quindi

$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]0, e^{-\frac{3}{2}}], [1, +\infty[\}$, $\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$

$\mathcal{C}(\downarrow) = \{ [e^{-\frac{3}{2}}, 1] \}$

Si ha $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{2e} \approx 0.18$

$e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22$, $f(e^{-\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2e^3} \approx 0.07$



Esercizio 2

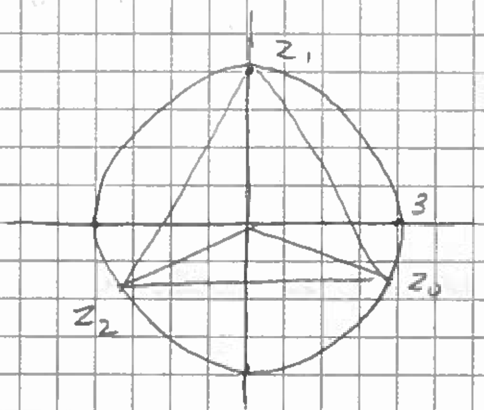
Si ha

d)
$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+\log(3+n)} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Essendo $\frac{3}{2}>1$, la serie è convergente

Esercizio 3

Si ha $|-27i| = 27$ e $-\frac{\pi}{2} \in \arg(-27i)$



Si ha

$$z_0 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_1 = 3i$$

$$z_2 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Esercizio 4

La serie è assegnata per $x \neq -3$

Sia $x \neq -3$

Si tratta di una serie geometrica di ragione

$\frac{2x+1}{x+3}$ e primo termine $\frac{2x+1}{x+3}$

La serie è convergente se e solo se

$$-1 < \frac{2x+1}{x+3} < 1$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+3} < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x+3} > -1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+3} - 1 < 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+3} + 1 > 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3} < 0 \\ \dfrac{3x+4}{x+3} > 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} -3 < x < 2 \\ x < -3 \text{ o } x > -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

cioè $-\dfrac{4}{3} < x < 2$

L'insieme delle x per le quali la serie è definita ed è convergente è quindi

$$\left] -\frac{4}{3}, 2 \right[$$

Se $x \in \left] -\frac{4}{3}, 2 \right[$, la somma della serie è

$$\frac{\dfrac{2x+1}{x+3}}{1 - \dfrac{2x+1}{x+3}} = \frac{2x+1}{2-x}$$

Esercizio 5

a) Il dominio di f è dato dalle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che } -1 \leq x \leq 1$$

Si ha quindi $\quad \mathrm{dom}(f) = [-1, 1]$

b) Sia $x \in]-1,1[$. Si ha

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctg} \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}\, \frac{1}{1+(\operatorname{Arcsin} x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctg} \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{1+(\operatorname{Arcsin} x)^2}$$

c) Si ha

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctg} \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{1+(\operatorname{Arcsin} x)^2} \right) =$$

$$= -\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in 1 e $f'(1) = -\infty$

Si ha

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = \lim_{x\to -1} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctg} \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{1+(\operatorname{Arcsin}^2 x)} \right) = +\infty$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbb{R}}$ in -1 e si ha $f'(-1) = +\infty$

Esercizio 6

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(3x))^3}{(2x-\sin(2x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{(3x)^2}{2}\right)^3}{\left(\frac{(2x)^3}{6}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{9x^2}{2}\right)^3}{\left(\frac{8x^3}{6}\right)^2} = \frac{\frac{729}{8}}{\frac{16}{9}} = \frac{729}{8}\,\frac{9}{16} = \frac{6561}{128}$$

Esercizio 7 (1° modo)

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}\,\log(3+\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(3+\sin x)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2-(x-2)}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}\;2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $-1 \le \sin x \le 1$; quindi $2 \le \sin x + 3 \le 4$; quindi $\log 2 \le \log(\sin x+3) \le \log 4$ quindi

$$\frac{1}{\log 4} \le \frac{1}{\log(\sin x+3)} \le \frac{1}{\log 2}$$

Quindi la funzione $\dfrac{1}{\log(\sin x+3)}$ è limitata

Per un teorema sui limiti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(3+\sin x)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} = 0$$

Esercizio 8

Si ha $\sqrt{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$

Si ha

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Per $y>0$, si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}y+o(y)$$

Si ha quindi

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha

$$\sqrt[3]{x^3+x} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}$$

Per $y\to 0$ si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}y+o(y)$$

Si ha quindi

$$x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha

$$\sqrt[4]{16x^4+x^2} = 2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^2}}$$

Per $y\to 0$ si ha

$$(1+y)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}y+o(y)$$

Si ha quindi

$$2x\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^2}} = 2x\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{16x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= 2x + \frac{1}{32}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si ha quindi

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[4]{16x^4+x^3} =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + x + \frac{1}{3}\frac{1}{x} - 2x - \frac{1}{32}\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{77}{96}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{77}{96}\frac{1}{x}$$

Si ha quindi

$$\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[4]{16x^4+x^2}\right) \sim$$

$$x\,\frac{77}{96}\,\frac{1}{x} = \frac{77}{96}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x^3}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[4]{16x^4+x^2}\right) = \frac{77}{96}$$

Esercizio 9 (1° modo)

Si ha

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{tg^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \Big[-\mathrm{ctg}\, x - x \Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} = -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}} = -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{8} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -1 - \frac{\pi}{8} + \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{8} + \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}} = -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = -1 - \frac{\pi}{8} + \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\int_1^2 \log^3 x \, dx = \Big[x \log^3 x \Big]_1^2 - \int_1^2 x \, 3 \log^2 x \, \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \Big[x \log^3 x \Big]_1^2 - 3 \int_1^2 \log^2 x \, dx =$$

$$= \Big[x \log^3 x \Big]_1^2 - 3 \left(\Big[x \log^2 x \Big]_1^2 - \int_1^2 x \, 2 \log x \, \frac{1}{x} \, dx \right) =$$

$$= \Big[x \log^3 x - 3x \log^2 x \Big]_1^2 + 6 \int_1^2 \log x \, dx =$$

$$= \left[x \log^3 x - 3x \log^2 x \right]_1^2 + 6\left(\left[x \log x \right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x}\, dx \right) =$$

$$= \left[x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6x \log x \right]_1^2 - 6 \int_1^2 dx =$$

$$= \left[x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6x \log x - 6x \right]_1^2 =$$

$$= 2 \log^3 2 - 6 \log^2 2 + 12 \log 2 - 12 + 6 =$$

$$= 2 \log^3 2 - 6 \log^2 2 + 12 \log 2 - 6$$

Esercizio 11

Poniamo

$\sqrt{e^x - 1} = t$; si ha $e^x - 1 = t^2$; quindi

$e^x = t^2 + 1$; quindi $x = \log(t^2+1)$

Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = \log 5$ si ha $t = 2$

Si ha quindi

$$\int_0^{\log 5} \sqrt{e^t - 1}\, dt = \int_0^2 t \frac{2t}{t^2+1}\, dt =$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{t^2-1}\right) dt = 2 \left[t - \text{Arctg}\, t \right]_0^2 = 2\left(2 - \text{Arctg}\, 2\right)$$

Esercizio 9 (2° modo)

Poniamo $\operatorname{tg} x = t$, si ha $x = \operatorname{Arctg} t$. Quindi
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$. Per $x = \dfrac{\pi}{8}$ si ha $t = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$.

Per $x = \dfrac{\pi}{4}$ si ha $t = 1$

Si ha quindi

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{1} \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Esistono A, B tali che

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t^2+1}$$

Si ha

$$1 = A(t^2+1) + Bt^2$$

Per $t = 0$ si ha $A = 1$

Si ha quindi

$$1 = t^2+1 + Bt^2 \; ; \text{ quindi}$$

$$-t^2 = Bt^2$$

Quindi $B = -1$.

Si ha quindi

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}$$

Si ha quindi

$$\int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{1} \frac{1}{t^2(t^2+1)}\, dt = \int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{t} - \operatorname{Arctg} t \right]_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} + \frac{\pi}{8} - 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{\pi}{8} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} - \frac{\pi}{8} - 1 = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} - \frac{\pi}{8} - 1 =$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{8} - 1 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}} - \frac{\pi}{8} - 1 =$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} - \frac{\pi}{8} - 1 = \sqrt{2} + 1 - \frac{\pi}{8} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 7 (2^o modo)

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}\log(3+\sin x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(3+\sin x)} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right) =$$

$$= 1-1=0$$

Si ha

$$\frac{1}{\log 4} \leq \frac{1}{\log(\sin x+3)} \leq \frac{1}{\log 3}$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(3+\sin x)} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} = 0$$