

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e, in caso affermativo, determinare il corrispondente asintoto.

**Svolgimento e risposta.**

2. (p. 2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del seguente numero complesso

$$\left( \frac{3 - i}{2 + i} \right)^2 .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 3) Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} .$$

**Svolgimento e risposta.**

- 2
4. (p. 1) Studiare la convergenza della seguente serie (motivare con precisione la risposta):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{n^2+4^n}.$$

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 2) Studiare la convergenza della seguente serie (motivare con precisione la risposta):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt[4]{1 - \cos \frac{1}{n^2}}.$$

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 1) Studiare la seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3+n!} z^n.$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 3) Determinare l'insieme degli elementi  $x \in \mathbf{R}$  per i quali la seguente serie è convergente; per tali  $x$  determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( |x-1| - \frac{1}{2} \right)^n.$$

**Svolgimento e risposta.**

8. (p. 2) Sia  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\cos z = 2$  e  $\sin z = \sqrt{3}i$ ; determinare  $\sin(3z)$ . Si chiede di non usare direttamente formule di triplicazione.

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 3) Risolvere la seguente equazione:

$$\sqrt{2x+1} = x-1.$$

**Svolgimento e risposta.**

10. (p. 4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right).$$

**Svolgimento e risposta.**

11. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 2x}{x^2 + 5\sqrt{x}}.$$

**Svolgimento e risposta.**

12. (p. 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp(2x) - 1)^2 \sin(3x)}{\cos(3x)(2x - \sin(2x))}.$$

**Svolgimento e risposta.**

13. (p. 5) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos^2 x - \operatorname{sh}(2x) \operatorname{ch}^2(2x)}{3x - \sin(3x)}.$$

**Svolgimento e risposta.**

# Esercizio 1

Si ha

$$\frac{x^2-3}{x-2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = x$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-3}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Quindi  $f$  ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto è la retta

$$y = x + 2$$

## Esercizio 2

Si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{3-i}{2+i} \right)^2 &= \frac{(3-i)^2}{(2+i)^2} = \frac{9-6i-1}{4+4i-1} = \\ &= \frac{8-6i}{3+4i} = \frac{8-6i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{24-32i-18i-24}{9+16} = \\ &= \frac{-50i}{25} = -2i \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\operatorname{Re} \left( \left( \frac{3-i}{2+i} \right)^2 \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left( \left( \frac{3-i}{2+i} \right)^2 \right) = -2$$

### Esercizio 3

La disuguaglianza

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2}$$

si scrive

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - \frac{5}{2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - \frac{5}{2} < 0 \end{cases}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - \frac{5}{2} \geq 0 \end{cases}$$

equivala a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - \frac{5}{2} \geq 0 \end{cases}, \text{ case a}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < x^2 - 5x + \frac{25}{4} \\ x \leq 1 \text{ or } x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ case a}$$

$$\begin{cases} 2x < \frac{17}{4} \\ x \leq 1 \text{ or } x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{case a} \quad \begin{cases} x < \frac{17}{8} \\ x \leq 1 \text{ or } x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Essendo  $\frac{17}{8} < \frac{5}{2}$ , tale sistema non ha soluzioni

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - \frac{5}{2} < 0 \end{cases} \quad \text{non ha soluzioni,}$$

Quindi il sistema assegnato non ha soluzioni

4

Esercizio 4

$$\text{Si ha } \frac{1+2n}{n^2+4^n} \sim \frac{2n}{4^n} = 2n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 5

$$\text{Si ha } \frac{1}{n} \sqrt[4]{1 - \cos \frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n} \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie è convergente

Esercizio 6

Si  $z \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{n^2+1}{3+n!} z^n \right| \sim \frac{n^2}{n!} |z|^n$$

Quindi per ogni  $z \in \mathbb{C}$  la serie è assolutamente convergente.

Quindi la serie di potenze ha raggio di convergenza  $+\infty$

Esercizio 7

Si tratta di una serie di potenze di ragione

$$|x-1| = \frac{1}{2}$$

La serie è convergente se e solo se

$$\begin{cases} |x-1| - \frac{1}{2} < 1 \\ |x-1| - \frac{1}{2} > -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} |x-1| < \frac{3}{2} \\ |x-1| > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{cioè } |x-1| < \frac{3}{2}, \text{ cioè } -\frac{3}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{cioè } -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

L'insieme dei punti  $x \in \mathbb{R}$  per i quali la serie è convergente è quindi

$$\left] -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[$$

Per tali  $x$  la somma della serie è

$$\frac{1}{1 - \left( |x-1| - \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{3}{2} - |x-1|} = \frac{2}{3 - 2|x-1|}$$

Esercizio 5

Si ha

$$\frac{1}{n} \sqrt[4]{1 - \cos \frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n} \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} \right)^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie è convergente

Esercizio 8

Si ha

$$\sin(3z) = \sin(z + 2z) =$$

$$= \sin z \cos(2z) + \sin(2z) \cos z =$$

$$= \sin z (\cos^2 z - \sin^2 z) + 2 \sin z \cos z \cos z =$$

$$= \sin z \cos^2 z - \sin^3 z + 2 \sin z \cos^2 z = 3 \sin z \cos^2 z - \sin^3 z =$$

$$= 3\sqrt{3}i \cdot 2^3 - (\sqrt{3}i)^3 = 12\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i = 15\sqrt{3}i$$

### Esercizio 9

L'equazione  $\sqrt{2x+1} = x-1$  si scrive  $\begin{cases} \sqrt{2x+1} = x-1 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$

Tale sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} = x-1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{2x+1} = x-1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{2x+1} = x-1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} 2x+1 = (x-1)^2 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} 2x+1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{cioè a } \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè a } \begin{cases} x=0 \vee x=4 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

cioè a  $x=4$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{2x+1} = x-1 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$  non ha soluzioni

L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato è quindi  $\{4\}$

### Esercizio 10

Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}) (\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2} \sqrt[3]{x^3-x^2} + \sqrt[3]{(x^3-x^2)^2})}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2} \sqrt[3]{x^3-x^2} + \sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - (x^3 - x^2)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

### Übung 11

zu h2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - 2x}{x^2 + 5\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

### Übung 12

zu h2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp(2x)-1)^2 \sin(3x)}{\cos(3x) (x - \sin(2x))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2 \cdot 3x}{1 \cdot \frac{(2x)^3}{6}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 6}{8} = 9$$

### Übung 13

zu h2

$$3x - \sin(3x) \sim \frac{1}{6} (3x)^3 = \frac{9}{2} x^3$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6} (2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) \cos^2 x &= \left(2x - \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)\right) \left(1 - x^2 + o(x^2)\right) = \\ &= 2x - 2x^3 + o(x^3) - \frac{4}{3} x^3 = 2x - \frac{10}{3} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\sinh y = y + \frac{1}{6} y^3 + o(y^3)$$

$$\sinh(2x) = 2x + \frac{1}{6} (2x)^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$$

$$\cosh(2x) = 1 + \frac{1}{2} (2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\cosh^2(2x) = (1 + 2x^2 + o(x^2))^2 = 1 + 4x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \sinh(2x) \cosh^2(2x) &= \left(2x + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)\right) (1 + 4x^2 + o(x^2)) = \\ &= 2x + 8x^3 + o(x^3) + \frac{4}{3} x^3 = 2x + \frac{28}{3} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\sin(2x) \cos^2 x - \sinh(2x) \cosh^2(2x) =$$

$$= 2x - \frac{10}{3} x^3 + o(x^3) - 2x - \frac{28}{3} x^3 = -\frac{38}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\sim -\frac{38}{3} x^3$$

Grundreihe

$$\frac{\sin(2x) \cos^2 x - \sinh(2x) \cosh^2(2x)}{3x - \sin(3x)} \sim \frac{-\frac{38}{3} x^3}{\frac{9}{2} x^3} = -\frac{76}{27}$$

Reihe quadriert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos^2 x - \sinh(2x) \cosh^2(2x)}{3x - \sin(3x)} = -\frac{76}{27}$$