CORSO DI ANALISI MATEMATICA 3

Edizione provvisoria

Terza versione

Carlo Ravaglia

Indice

Capitolo 25

Funzioni analitiche di variabile complessa

25.1 Funzioni elementari complesse

25.1.1 Derivata di una funzione di variabile complessa

Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia a un punto non isolato di A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; come si è visto nel capitolo 8, si dice che f è derivabile in a se esiste in $\mathbf{C}$ il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

in tal caso si pone

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \ ,$$

$f'(a)$ si chiama derivata di f in a.

Analogamente al caso di funzioni reali di variabile reale, vale il seguente teorema.

Teorema 25.1.1.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile in a; allora esiste $\alpha : -a + A \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che $\alpha(h) \lll_{h \to 0} h$ e tale che*

$$(\forall h \in -a + A) \ f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h) \ .$$

Si ha quindi

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h) \ .$$

Le regole di derivazione si estendono a questo caso.
Riguardo alla derivata della funzione composta il teorema visto che afferma che per $A \subset \mathbf{R}$; $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$, $f(A) \subset B$, $g : B \longrightarrow \mathbf{R}^N$, a punto non isolato di A, $f(a)$ punto non isolato di B, f derivabile in a, g derivabile in $f(a)$, si ha $g \circ f$ derivabile in a e

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a)$$

vale anche per $A \subset \mathbf{C}$ e $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$, $B \subset \mathbf{C}$, $g : B \longrightarrow \mathbf{C}$.

25.1.2 Derivata della funzione inversa

Abbiamo già visto un teorema sulla derivata della funzione inversa per funzione monotone su un intervallo; nel seguente teorema le funzioni sono di variabile complessa; la differenza essenziale fra il teorema che segue e quello precedente è che in questo occorre supporre la continuità della funzione inversa, mente nell'altro tale continuità era automaticamente verificata.

Teorema 25.1.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia a un punto non isolato di A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f iniettiva; sia f derivabile in a; sia $f'(a) \neq 0$; sia f^{-1} continua in $f(a)$; allora si ha*

1. *$f(a)$ è punto non isolato di $f(A)$,*
2. *f^{-1} è derivabile in $f(a)$,*
3. *$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Enunciato

25.1.3 Argomento principale di un numero complesso

Ricordiamo che se $z \in \mathbf{C}^*$ e se $t \in \mathbf{R}$, si dice che t è un argomento (o un'ampiezza) di z se risulta $e^{it} = \frac{z}{|z|}$. Intuitivamente l'argomento di z è la misura (definita a meno di multipli di 2π) in radianti dell'angolo α formato dal semiasse reale positivo con la semiretta $0z$.
Fra gli infiniti t che sono argomento di z, l'argomento principale è l'unico $t \in [-\pi, \pi[$.

Teorema 25.1.3.1 *Sia $z \in \mathbf{C}^*$; allora esiste uno ed un solo $t \in \mathbf{R}$ tale che*

1. *t argomento di z,*
2. *$t \in]-\pi, \pi]$.*

Enunciato

Definizione 25.1.3.1 *Sia $z \in \mathbf{C}^*$; allora l'unico $t \in]-\pi, \pi]$ tale che t è un argomento di z si chiama argomento (o ampiezza) principale di z e si indica con $\mathrm{Am}(z)$.*

Osservazione 25.1.3.1 La funzione $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}$, $z \longrightarrow \mathrm{Am}\, z$ non è continua in alcun punto di $\{z \in \mathbf{C}^*; \Im z = 0, \Re z < 0\}$.

Togliendo invece dal dominio dell'argomento principale il semiasse reale negativo, si ottiene una funzione continua.
Definiamo $\mathbf{C}^*$ tagliato come $\mathbf{C}^*$ meno il semiasse reale negativo.

Definizione 25.1.3.2 *L'insieme*

$$\{z \in \mathbf{C}; \Im z \neq 0 \text{ o } \Re z > 0\}$$

si chiama $\mathbf{C}^*$ *tagliato.*

Evidentemente $\mathbf{C}^*$ tagliato è aperto.
La funzione argomento principale è continua su $\mathbf{C}^*$ tagliato, come risulta dal teorema che segue.

Teorema 25.1.3.2 *Sia* A *l'aperto* $\mathbf{C}^*$ *tagliato; allora*

$$A \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow \operatorname{Am} z$$

è continua.

Enunciato

25.1.4 Omotetia reale

Definizione 25.1.4.1 *Sia* $t \in \mathbf{R}$*; la funzione*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow tz$$

si chiama omotetia reale di coefficiente t*.*

Per ogni $z \in \mathbf{C}$, f è derivabile in z e si ha $f'(z) = t$.

25.1.5 Rotazione

Definizione 25.1.5.1 *Sia* $w \in \mathbf{U}$*; la funzione*

$$r : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow wz$$

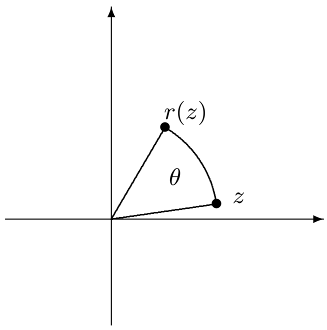
si chiama rotazione di coefficiente w*.*

Definizione 25.1.5.2 *Sia* $\theta \in \mathbf{R}$*; si chiama rotazione di angolo* θ *la rotazione di coefficiente* $e^{\theta i}$*.*

La rotazione di angolo θ è dunque la funzione

$$r : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow e^{\theta i} z$$

Per ogni $z \in \mathbf{C}$, f è derivabile in z e si ha $f'(z) = w = e^{i\theta}$.



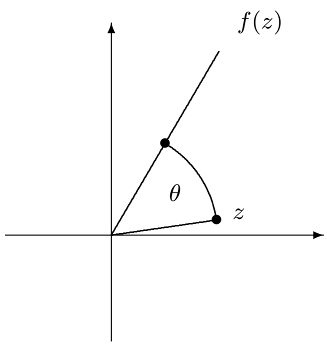
25.1.6 Funzioni lineari complesse

Definizione 25.1.6.1 *Sia $a \in \mathbf{C}$; la funzione*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow az$$

si chiama funzione lineare complessa di coefficiente a.

Si tratta delle trasformazioni lineari dello spazio vettoriale complesso $\mathbf{C}$.
Per ogni $z \in \mathbf{C}$, f è derivabile in z e si ha $f'(z) = a$.
Le omotetie reali e le rotazioni sono delle particolari funzioni lineari complesse. Si prova che attraverso loro composizioni si ottengono tutte le funzioni lineari complesse.



25.1.7 Funzioni affini complesse

Essendo $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ la nozione di traslazione di $\mathbf{R}^N$ si applica anche a $\mathbf{C}$. Ricordiamo che se $b \in \mathbf{C}$ la traslazione di b è la funzione

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z + b\ .$$

Definizione 25.1.7.1 *Siano $a, b \in \mathbf{C}$; la funzione*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow az + b$$

si chiama funzione complessa complessa di coefficiente a e termine noto b.

Per ogni $z \in \mathbf{C}$, f è derivabile in z e si ha $f'(z) = a$.
Le funzioni lineari complesse e le traslazioni sono delle particolari funzioni affini complesse. Ogni funzione affine complessa è composizione di una traslazione e e di una funzione lineare complessa; quindi è composizione di una traslazione, di una omotetia reale e di una rotazione.

25.1.8 Funzione potenza complessa

Definizione 25.1.8.1 *Sia $n \in \mathbf{N}$; la funzione*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z^n$$

si chiama funzione potenza complessa di esponente n.

Se $n \neq 0$, per ogni $z \in \mathbf{C}$, f è derivabile in z e si ha $f'(z) = nz^{n-1}$.

Teorema 25.1.8.1 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; siano $z, w \in \mathbf{C}^*$; sia $t \in \arg z$; sia $\tau \in \arg w$; sia*

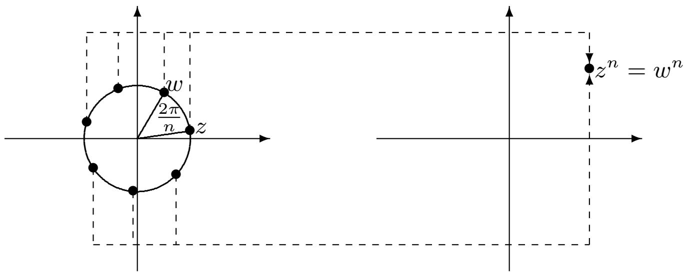
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow x^n\ ;$$

allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $f(z) = f(w)$;
2. $\left(|z| = |w| \text{ e } (\exists k \in \mathbf{Z})\ t - \tau = \frac{2k\pi}{n}\right)$;

Dimostrazione. Si ha infatti $z = |z|e^{it}$, $w = |w|e^{it}$. Si ha $f(z) = f(w)$ se e solo se $z^n = w^n$; quindi se e solo se $|z|^n e^{int} = |w|^n e^{in\tau}$; quindi se e solo se $|z|^n = |w|^n$ e $(\exists k \in \mathbf{Z})\ nt = n\tau + 2k\pi$; quindi se e solo se $|z| = |w|$ e $(\exists k \in \mathbf{Z})\ t - \tau = \frac{2k\pi}{n}$.

Osservazione 25.1.8.1 Si può anche dire che due punti hanno la stessa immagine in una funzione potenza di esponente n se e solo se uno si ottiene dall'altro tramite una rotazione di un angolo multiplo di $\frac{2\pi}{n}$.



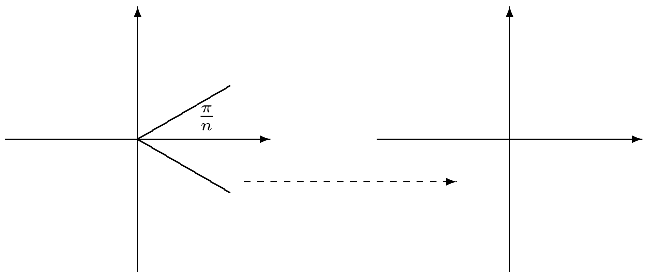
25.1.9 Radice n-esima principale

Teorema 25.1.9.1 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia*

$$f : \left(\{z \in \mathbf{C}^*; -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Am} z \leq \frac{\pi}{n}\} \cup \{0\}\right) \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z^n \ ;$$

allora f è biettiva.

Enunciato



Il teorema sopra giustifica la definizione che segue.

Definizione 25.1.9.1 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia*

$$f : \left(\{\mathbf{C}^*; -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Am} z \leq \frac{\pi}{n}\} \cup \{0\}\right) \longrightarrow \mathbf{C} \ z \longrightarrow z^n \ ;$$

sia $w \in \mathbf{C}$; poniamo $\sqrt[n]{w} = f^{-1}(w)$.

Il numero complesso $\sqrt[n]{w}$ si chiama radice n-esima principale di w.
In altri termini $\sqrt[n]{w}$ è l'unica radice z di w tale che $z = 0$ o ($z \neq 0$ e $-\frac{\pi}{n} \leq \operatorname{Am} z < \frac{\pi}{n}$).
La notazione introdotta è compatibile con quella di radice n-esima aritmetica; non è invece compatibile con la nozione di radice n-esima di indice dispari; ad esempio la radice terza di indice dispari di -1 è -1, mentre la radice principale terza di -1 è $e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Salvo avviso contrario con il simbolo $\sqrt[n]{z}$ intenderemo da ora in avanti la radice n-esima principale.
Per $n = 2$, $\sqrt[2]{w}$ si chiama la radice quadrata principale di w. Per $n = 3$, $\sqrt[3]{w}$ si chiama anche la radice terza (o cubica) principale di w; per $n = 4$, $\sqrt[4]{w}$ si chiama anche la radice quarta principale di w; e così via.

Teorema 25.1.9.2 *Sia $z \in \mathbf{C}$; allora risulta:*

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} 0 & \text{per } z = 0 \\ \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\operatorname{Am} z}{n}} & \text{per } z \neq 0 \end{cases} .$$

Enunciato
Il seguente teorema segue subito dalla definizione.

Teorema 25.1.9.3 *Siano $z \in \mathbf{C}$; siano $n, m \in \mathbf{N}^*$; allora risulta:*

1. $(\sqrt[n]{z})^n = z$;
2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{w}} = \sqrt[nm]{w}$.

Enunciato

Osservazione 25.1.9.1 Si osservi che in generale per $z, w \in \mathbf{C}$ e $m \in \mathbf{Z}$ non è vero che sia $\sqrt[n]{z^n} = z$, $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$ e che $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$.

25.1.10 Funzione radice n-esima principale

Definizione 25.1.10.1 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; la funzione*

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sqrt[n]{z}$$

si chiama funzione radice n-esima principale.

È immediato che la funzione radice n-esima principale è la funzione inversa della restrizione della potenza n-esima all'insieme $\{z \in \mathbf{C}^*; -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Am} z \leq \frac{\pi}{n}\} \cup \{0\}$.

Osservazione 25.1.10.1 Si osservi che la funzione radice n-esima principale non è continua in alcun punto di $\{z \in \mathbf{C};\ \Re z = 0, \Im z < 0\}$. In 0 è continua. Negli altri punti di $\mathbf{C}$ è continua, come si ricava dal teorema seguente.

Teorema 25.1.10.1 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia A l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato; sia*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sqrt[n]{z}\ ;$$

allora g è continua.

Dimostrazione. Segue dall'espressione della radice n-esima principale e dalla continuià dell'argomento principale su A.

Teorema 25.1.10.2 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia A l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato; sia*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sqrt[n]{z}\ ;$$

allora risulta:

1. *g è derivabile;*

2. $(\forall z \in A)\ g'(z) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

Dimostrazione. Sia f la restrizione a $\{z \in \mathbf{C}^*; -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Am} z < \frac{\pi}{n}\}$ della funzione potenza n-esima complessa; sia $z \in \mathbf{C} - \{z \in \mathbf{C}; \Re z = 0, \Im \leq 0\}$; per il teorema 2 g è continua in z; inoltre f è derivabile in $g(z)$ e si ha $f'(g(z)) \neq 0$; allora per il teorema sulla deriva della funzione inversa g è derivabile in z e si ha $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

Si osservi che non è lecito scrivere $\frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}}$.

Osservazione 25.1.10.2 Considerando come dominio della funzione $\mathbf{C}^*$ tagliato, si ha dunque

$$\frac{d}{dz}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} \ .$$

25.1.11 Funzione esponenziale complessa

La funzione esponenziale complessa è la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \exp z \ .$$

Abbiamo visto che f è derivabile e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $f'(z) = \exp z$.

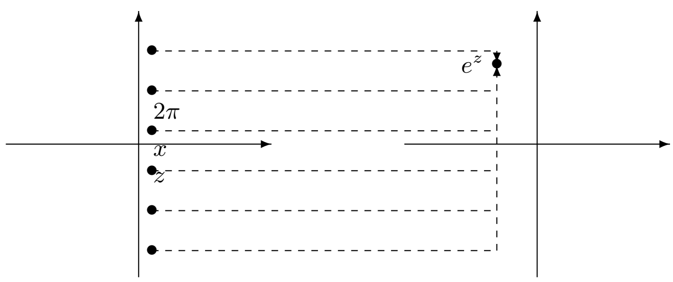
Teorema 25.1.11.1 *Siano $z, z' \in \mathbf{C}$; sia $x = \Re z$, $y = \Im z$, $x' = \Re z'$, $y' = \Im z'$; sia*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, w \longrightarrow \exp w \ ;$$

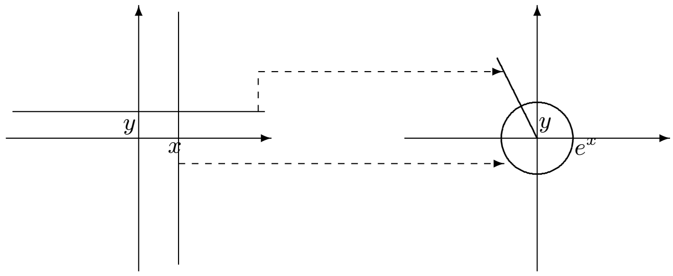
allora risulta:

1. $|f(z)| = \exp x$, $y \in \operatorname{Am} f(z)$;
2. $f(z) = f(z') \Leftrightarrow \big(x = x' \text{ e } (\exists k \in \mathbf{Z})\ y - y' = 2k\pi\big)$;
3. $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$;
4. *f periodica di periodo $2\pi i$.*

Dimostrazione. Si ha infatti $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. La (1) segue allora dal teorema sulla forma esponenziale di un numero complesso. La (2) segue dalla (1). La (3) segue dal teorema sui logaritmi complessi. La (4) segue dalla (1).



Osservazione 25.1.11.1 Si osservi che la funzione esponenziale complessa trasforma la retta $\{z \in \mathbf{C}; \Im z = y\}$ nella semiretta $\{w \in \mathbf{C}; y \in \mathrm{Am}\, w\}$, la retta $\{z \in \mathbf{C}; \Re z = x\}$ nella circonferenza $\{w \in \mathbf{C}; |w| = e^x\}$ "percorsa infinite volte". In particolare l'asse reale è trasformato nell'asse reale, l'asse immaginario nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



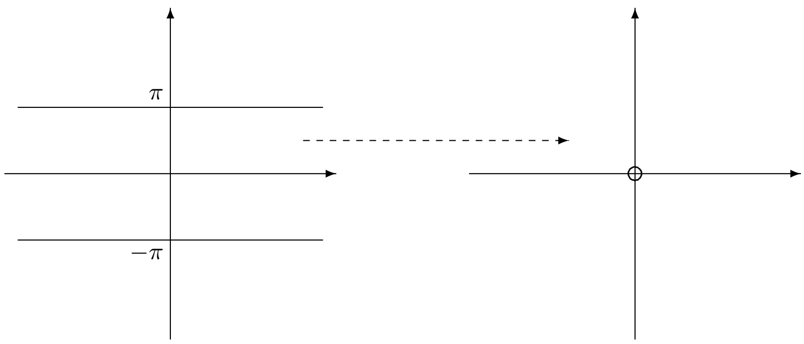
25.1.12 Logaritmo principale

Teorema 25.1.12.1 *Sia*

$$f : \{z \in \mathbf{C}; -\pi < \Im z \leq \pi\} \longrightarrow \mathbf{C}^*, z \longrightarrow \exp z\ ;$$

allora f è biettiva.

Enunciato



Il teorema sopra giustifica la definizione che segue.

Definizione 25.1.12.1 *Sia*

$$f : \{z \in \mathbf{C}; -\pi < \Im z \leq \pi\} \longrightarrow \mathbf{C}^*, z \longrightarrow \exp z\ ;$$

sia $w \in \mathbf{C}^*$; poniamo $\log w = f^{-1}(w)$.

In altri termini $\log w$ è l'unico logaritmo z di w tale che $-\pi < \Im z \leq \pi$.
Il numero complesso $\log w$ si chiama logaritmo principale di w.
Se $w \in \mathbf{R}_+^*$, si ha $\log w = \log w$; la notazione introdotta è quindi compatibile con la precedente.

Teorema 25.1.12.2 *Sia $z \in \mathbf{C}^*$; allora risulta:*

$$\log z = \log |w| + i \operatorname{Am} w \ .$$

Dimostrazione. L'affermazione è stata provata nel corso della dimostrazione del teorema sopra.

Teorema 25.1.12.3 *Siano $z \in \mathbf{C}^*$; allora risulta:*

$$\exp \log z = z \ .$$

Dimostrazione. Segue dalla definizione.

Osservazione 25.1.12.1 Si osservi che in generale non è vero che per $z \in \mathbf{C}$ sia $\log \exp z = z$ e che per $z, w, z+w \in \mathbf{C}^*$ sia $\log(z+w) = (\log z)(\log w)$.

25.1.13 Funzione logaritmo principale

Definizione 25.1.13.1 *La funzione*

$$\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \log z$$

si chiama funzione logaritmo principale.

La funzione logaritmo principale è la funzione inversa della restrizione a $\{z \in \mathbf{C}; -\pi < \Im z \leq \pi\}$ della funzione esponenziale complessa.

Osservazione 25.1.13.1 Si osservi che la funzione logaritmo principale non è continua in alcun punto di $\{z \in \mathbf{C}^*;\ \Re z = 0, \Im z < 0\}$. Negli altri punti di $\mathbf{C}^*$ è invece continua, come si ricava dal teorema seguente.

Teorema 25.1.13.1 *Sia A l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato; sia*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \log z \ ;$$

allora g è continua.

Dimostrazione. Segue dall'espressione di $g(z)$ attraverso l'argomento principale.

Teorema 25.1.13.2 *Sia A l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato; sia*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \log z \ ;$$

allora risulta:

1. *g è derivabile;*
2. *$(\forall z \in A)\ g'(z) = \frac{1}{z}$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema sulla derivata della funzione inversa.

Osservazione 25.1.13.2 Considerando come dominio della funzione $\mathbf{C}^*$ tagliato, si ha dunque

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}\ .$$

Osservazione 25.1.13.3 Con ovvio significato dei termini, potremmo dunque dire che una primitiva di $\frac{1}{z}$ è $\log z$.
Tuttavia occorre osservare che tale discorso vale su $\mathbf{C}$ tagliato; come vedremo $\frac{1}{z}$ non ammette primitiva su $\mathbf{C}^*$

25.1.14 Potenze principali

Definizione 25.1.14.1 *Siano $z, w \in \mathbf{C}$; sia $z \neq 0$; poniamo*

$$z^w = \exp(w \log z)\ .$$

Il numero complesso z^w si chiama potenza principale di base z ed esponente w. La notazione è compatibile con le notazioni di potenza di esponente naturale, potenza di esponente intero, di potenza di esponente reale usate finora.

Teorema 25.1.14.1 *Siano $z, w_1, w_2 \in \mathbf{C}$; sia $z \neq 0$; allora si ha*

$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}\ .$$

Dimostrazione. Si ha
$z^{w_1+w_2} = \exp((w_1 + w_2)\log z) = \exp((w_1 \log z + w_2 \log z) = \exp(w_1 \log z)\exp(w_2 \log z) = z^{w_1} z^{w_2}$.

Il seguente risultato collega le nozioni di potenza principale e di radice principale.

Teorema 25.1.14.2 *Sia $z \in \mathbf{C}^*$; sia $n \in \mathbf{N}^*$; allora risulta:*

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}\ .$$

La dimostrazione è immediata.

25.1.15 Funzione potenza principale

Definizione 25.1.15.1 *Sia $w \in \mathbf{C}$; la funzione*

$$\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z^w$$

si chiama funzione potenza principale di esponente w.

Osservazione 25.1.15.1 Si osservi che la funzione potenza principale non è in generale continua in alcun punto di $\{z \in \mathbf{C};\ \Re z = 0, \Im z < 0\}$. Negli altri punti di $\mathbf{C}^*$ è invece continua.

Teorema 25.1.15.1 *Sia $w \in \mathbf{C}$; sia A l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato; sia*

$$f : A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z^w \ ;$$

allora risulta:

1. *f è derivabile;*
2. *$(\forall z \in A)\ f'(z) = wz^{w-1}$.*

Dimostrazione. La (1) è immediata. Si ha poi $f'(z) = \exp(w \log z) w \frac{1}{z} = wz^w z^{-1} = wz^{w-1}$.

Osservazione 25.1.15.2 Considerando come dominio della funzione $\mathbf{C}^*$ tagliato, si ha dunque

$$\frac{d}{dz} z^w = wz^{w-1} \ .$$

25.1.16 Funzione esponenziale principale

Definizione 25.1.16.1 *Sia $w \in \mathbf{C}^*$; la funzione*

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow w^z$$

si chiama funzione esponenziale principale di base w.

Teorema 25.1.16.1 *Sia $w \in \mathbf{C}^*$; sia*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow w^z$$

allora risulta:

1. *f è derivabile;*
2. *$(\forall z \in \mathbf{C})\ f'(z) = w^z \log w$.*

La dimostrazione è immediata.

Osservazione 25.1.16.1 Si ha dunque

$$\frac{d}{dz} w^z = w^z \log w \ .$$

25.1.17 Funzione seno complessa

La funzione seno complessa è la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sin z \ .$$

Abbiamo visto che f è derivabile e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $f'(z) = \cos z$.
Si ha poi

$$(\forall z \in \mathbf{C})\ \sin(z + 2\pi) = \sin z \ ;$$

quindi f è periodica di periodo 2π.

25.1.18 Funzione coseno complessa

La funzione seno complessa è la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \cos z \ .$$

Abbiamo visto che f è derivabile e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $f'(z) = -\sin z$.
Si ha poi

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \ \cos(z + 2\pi) = \cos z \ ;$$

quindi f è periodica di periodo 2π.

25.1.19 Funzione seno iperbolico complessa

La funzione seno complessa è la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \operatorname{sh} z \ .$$

Abbiamo visto che f è derivabile e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $f'(z) = \operatorname{ch} z$.
Da $\operatorname{sh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}$ e dalla periodicità di $2\pi i$ della funzione esponenziale complessa si ricava

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \ \operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z \ ;$$

quindi f è periodica di periodo $2\pi i$.

25.1.20 Funzione coseno iperbolico complessa

La funzione seno complessa è la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \operatorname{ch} z \ .$$

Abbiamo visto che f è derivabile e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $f'(z) = \operatorname{sh} z$.
Da $\operatorname{ch} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}$ e dalla periodicità di $2\pi i$ della funzione esponenziale complessa si ricava

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \ \operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z \ ;$$

quindi f è periodica di periodo $2\pi i$.

25.2 Condizioni di monogenia

25.2.1 Differenziabilità per una funzione di variabili reali e a valori complessi

Nel capitolo 8 si è data la nozione di derivabiltà e di deriva per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$, con $A \subset \mathbf{R}$; tali nozioni si danno allo stesso modo, cambiate le cose da cambiare, per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{C}^M$, con $A \subset \mathbf{R}$; la derivata $f'(a)$ in tal caso è un elemento di $\mathbf{C}^M$.

Si osservi che se $f(A) \subset \mathbf{R}^N$, allora f è derivabile in un punto non isolato a di A se e solo se f come funzione da A a $\mathbf{R}^N$ è derivabile in a e che le derivate sono le stesse. Le regole di derivazione viste nel capitolo 8 si estendono a questo caso.

Esempi.

1. Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow t^2 + it^2 \ .$$
La funzione f è derivabile e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha
$$f'(t) = 2t + 3it^2 \ .$$

2. Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow (t^2 + it)(t^4 - i(t+3) \ .$$
La funzione f è derivabile e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha
$$f'(t) = (2t + i)(t^4 - i(t+3)) + (t^2 + it)(4t^3 - i) \ .$$

Riguardo alla derivata della funzione composta il teorema visto che afferma che per $A \subset \mathbf{R}$; $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$, $f(A) \subset B$, $g : B \longrightarrow \mathbf{R}^N$, a punto non isolato di A, $f(a)$ punto non isolato di B, f derivabile in a, g derivabile in $f(a)$, si ha $g \circ f$ derivabile in a e
$$(g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a)$$
vale anche per $A \subset \mathbf{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$, $B \subset \mathbf{C}$, $g : B \longrightarrow \mathbf{C}^N$.

Esempio. Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{it} \ .$$
La funzione f è derivabile e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha
$$f'(t) = ie^{it} \ .$$

Nel capitolo 14 si è data la nozione di derivabiltà parziale e di deriva parziale per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$, con $A \subset \mathbf{R}^N$; tali nozioni si danno allo stesso modo, cambiate le cose da cambiare, per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{C}^M$, con $A \subset \mathbf{R}$; le derivate parziali $D_i f(a)$ in tal caso sono elementi di $\mathbf{C}^M$.

Esempio. Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2, (x,y) \longrightarrow (x + e^{ixy}, y^2 + 3ix^3) \ .$$
Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, f è derivabile parzialmente rispetto a x e rispetto a y in (x,y) e si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 + iye^{ixy}, 9ix^2)$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (ixe^{ixy}, 2y) \ .$$
La nozione di funzione di classe C^p si estende a questo caso.

Nel capitolo 14 si è data la nozione di differenziabilità e di di derivata per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$, con $A \subset \mathbf{R}^N$; tali nozioni si danno allo stesso modo, cambiate le

cose da cambiare, per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{C}^M$; in tal caso la derivata di f in a è una trasformazione lineare $f'(a) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}^M$, considerando $\mathbf{C}^M$ come spazio vettoriale reale; la matrice jacobiana di f in a appartiene $\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$; in particolare per $A \subset \mathbf{R}^2$, per $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ e per $a \in A$, se f è differenziabile in a, si ha $f(a+h) - f(a) = D_1 f(a)h_1 + D_2 f(a)h_2 + \mathrm{o}(h)$.
Anche in questo caso, se A è aperto e se f è di classe C^1, allora f è differenziabile.

Esempio. Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^3, (x,y) \longrightarrow (\sin(ixy), i\,\mathrm{ch}(x+y), ix^2 + 5y) .$$

La funzione f è differenziabile in quanto di classe C^1.
Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ la matrice jacobiana di f in (x,y) è

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} iy\cos(ixy) & ix\cos(ixy) \\ i\,\mathrm{sh}(x+y) & i\,\mathrm{sh}(x+y) \\ 2xi & 5 \end{pmatrix} .$$

Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ la derivata di f in (x,y) è

$$f'(x,y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^3, (h_1,h_2) \longrightarrow$$

$$(iy\cos(ixy)h_1 + ix\cos(ixy)h_2, i\,\mathrm{sh}(x+y)h_1 + i\,\mathrm{sh}(x+y)h_2, 2xih_1 + 5h_2) .$$

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}^M$, sia $a \in \overset{\circ}{A}$; essendo $\mathbf{C}^M = (\mathbf{R}^2)^M$, identificando $((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_M,y_m))$ con $(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ possiamo identificare $\mathbf{C}^M$ con $\mathbf{R}^{2M}$; allora f è differenziabile in a come funzione da A a $\mathbf{C}^M$ se e solo se f è differenziabile in a come funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^{2M}$.

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f differenziabile in a; si pone $df(a) = f'(a)$; analogamente al caso di funzioni a valori reali si ha

$$df(a) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i .$$

Esempio. Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{C}, (x,y,z) \longrightarrow ix + yz .$$

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, f è differenziabile in x e si ha

$$df(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{C}, (h_1,h_2,h_3) \longrightarrow ih_1 + zh_2 + yh_3 .$$

Si ha $df(a) \in \mathrm{L}_R(\mathbf{R};\mathbf{C})$, dove $\mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ indica l'insieme delle trasformazioni $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ lineari rispetto alla struttura di spazio vettoriale reale.
Se $T \in \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ allora esiste una ed un solo vettore $a \in \mathbf{C}^N$ tale che per ogni $h \in \mathbf{R}^N$ $T(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$; tale vettore a si dice associato a T.
Il vettore associato a $df(a)$ è quindi $\mathrm{grad}\, f(a)$.

25.2.2 Condizione di monogenia

Ricordiamo che si è posto $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $z = x + iy = (x, y)$.
Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; in generale, quando si considera $A \subset \mathbf{C}$ (cioè quando per la funzione f si considerano le nozioni date sui numeri complessi) la funzione f si indica con $f(z)$; quando si considera $A \subset \mathbf{R}^2$ (cioè quando per la funzione f si considerano le nozioni date su $\mathbf{R}^N$, con $N = 2$) la funzione f si indica con $f(x, y)$.
Possiamo la derivata di f in a; se f è derivabile in a si ha

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Consideriamo l'insieme di partenza A come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$; possiamo quindi considerare le derivate parziali di $f(x, y)$ in un punto $a \in A$; in tal caso le derivate parziali sono dei numeri complessi; indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$ tali derivate saranno indicate con $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e con $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$; se f è derivabile in a rispetto a x e rispetto a y si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(1,0)) - f(a)}{t}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(0,1)) - f(a)}{t} .$$

Dalle definizioni si ricava facilmente che se f è derivabile in a, allora f è derivabile parzialmente in a rispetto a x e rispetto a y e che si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.
Supponiamo infatti f derivabile in a.
Per $h \in \mathbf{C}$ tale che $a + h \in A$, si ha $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.
Per $t \in \mathbf{R}$ tale che $a + t \in A$, si ha $t(1, 0) = (t, 0) = t$; quindi si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(1,0)) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) ;$$

quindi f è derivabile rispetto a x e si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$.
Per $t \in \mathbf{R}$ tale che $a + it \in A$, si ha $t(0, 1) = ti$; quindi si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((a + t(0,1)) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+it) - f(a)}{t} =$$

$$i \lim_{t \to 0} \frac{f(a+it) - f(a)}{it} = if'(a) ;$$

quindi f è derivabile rispetto a y e si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = if'(a)$.
Si ha poi $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a) + i^2 f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
Nel teorema che segue completiamo quando affermato e provato sopra.

Teorema 25.2.2.1 *Sia* $A \subset \mathbf{C}$*; sia* $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* $a \in \overset{\circ}{A}$*; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *f derivabile in a;*

2. *considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, f è differenziabile in a e*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \ ;$$

in tal caso si ha
$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo f derivabile in a. Esiste $\alpha : -a+A \longrightarrow \mathbf{C}$, $\alpha(h) \lll_{h\to 0} h$, tale che per ogni $h \in a + A$ si ha $f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)$; si ha quindi

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h+\alpha(h) = f'(a)(h_1+ih_2)+\alpha(h) = f'(a)h_1+if'(a)h_2+\alpha(h) \ .$$

Quindi f è differenziabile in a e

$$df(a) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}, (h_1, h_2) \longrightarrow f'(a)h_1 + if'(a)h_2 \ ;$$

essendo grad $f(a)$ il vettore associato a $df(a)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = if'(a)$.
Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a) + i^2 f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
Viceversa considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, supponiamo f è differenziabile in a e $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.
Essendo f differenziabile in a, esiste $\alpha : -a + A \longrightarrow \mathbf{C}$, tale che $\alpha(h) \lll_{h\to 0} h$ e tale che per ogni $h \in -a + A$ si ha

$$f(a + h) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \alpha(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + \alpha(h) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + \alpha(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h + \alpha(h) \ .$$

Si ha quindi
$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\alpha(h)}{h} \ .$$

Quindi f è derivabile in a e si

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \ .$$

La condizione
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

si chiama condizione di monogenia complessa.
Nel seguente teorema si considera una funzione derivabile con continuità su tutto A.

Teorema 25.2.2.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *f derivabile su A e f' continua;*
2. *considerando $A \subset \mathbf{R}^2$ e indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, f è di classe C^1 e*
$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ;$$

in tal caso si ha
$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \ .$$

Dimostrazione. Sia f derivabile su A e f' continua; per il teorema sopra f è derivabile parzialmente e si ha $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$; quindi f è di classe C^1 e si ha $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Viceversa considerando $A \subset \mathbf{R}^2$ e indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, sia f è di classe C^1 e sia $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Essendo f di classe C^1, f è differenziabile; essendo per il teorema sopra $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$, f' è continua.

Esempi.

1. La funzione
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \Re z$$
non è derivabile in alcun punto di $\mathbf{C}$.
Si ha infatti $f(x, y) = x$; quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$.
2. La funzione
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \Im z$$
non è derivabile in alcun punto di $\mathbf{C}$.
Si procede come sopra.
3. La funzione
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \overline{z}$$
non è derivabile in alcun punto di $\mathbf{C}$.
Si ha infatti $f(x, y) = x - iy$; quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -i$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - i^2 = 2$.
4. La funzione
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow |z|^2$$
non è derivabile in alcun punto di $\mathbf{C}$.
Si ha infatti $f(x, y) = x^2 + y^2$; quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2iy$.

25.2.3 Condizioni di monogenia reali

Definizione 25.2.3.1 *Sia A un insieme; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; si pone*

1. *$\Re f : A \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \Re f(x)$,*
2. *$\Im f : A \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \Im f(x)$.*

Considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$, si ha $\Re f = f_1$ e $\Im f = f_2$.

Teorema 25.2.3.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *f derivabile in a;*
2. *considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, posto $u = \Re f$ e $v = \Im f$, u e v differenziabili in a e*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a) \; ;$$

in tal caso si ha

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) \; .$$

Dimostrazione. Supponiamo f derivabile in a; considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$ e considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ per il teorema sopra f è differenziabile in a e si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$; quindi, posto $u = \Re f$ e $v = \Im f$, u e v sono differenziabili in a e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a) \; .$$

Viceversa considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, posto $u = \Re f$ e $v = \Im f$, siano u e v differenziabili in a e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a) \; .$$

allora considerando considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ f è differenziabile in a e si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$; quindi per il teorema sopra f è derivabile in a.
Se f è derivabile in a si ha poi

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) \; .$$

Le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

si chiamano condizioni di monogenia reali.
Considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, posto $u = \Re f$, $v = \Im f$, $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(a)$ e $\beta = \frac{\partial v}{\partial x}(a)$ la matrice jacobiana di f è

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} .$$

Teorema 25.2.3.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *f derivabile su A e f' continua;*
2. *considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$ e considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$ f è di classe C^1 e posto $u = f_1$ e $v = f_2$ si ha*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} ;$$

in tal caso si ha

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} .$$

Dimostrazione. Sia f derivabile su A e f' continua; per il teorema sopra f è derivabile parzialmente e si ha $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$; quindi f è di classe C^1 e si ha $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.
Viceversa considerando $A \subset \mathbf{R}^2$, considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$, indicando con (x, y) i punti di $\mathbf{R}^2$, sia f è di classe C^1 e sia $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.
Essendo f di classe C^1, f è differenziabile; essendo per il teorema sopra $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, f' è continua.

Esercizio. Verificare le condizioni di monogenia complesse e reali per le seguenti funzioni; verificare le formule sull'espressione della derivata; si chiede di non utilizzare nel calcolo delle derivate parziali, la derivabilità delle funzioni di variabile complessa:

1. $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $z \longrightarrow z^2$;
2. $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $z \longrightarrow \sin z$.

Risoluzione.

1. Posto $z = x + iy$, si ha

$$f(x, y) = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2iy$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 2ix .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2iy + i(-2y + 2ix) = 2x + 2iy - 2iy - 2x = 0 .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z = f'(z) .$$

Sia $u = \Re f = f_1$ e $v = \Im f = f_2$.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

e

$$v(x, y) = 2xy .$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x \ ;$$

quindi si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y \ ;$$

quindi si ha

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x + 2iy = 2(x+iy) = 2z = f'(z) \ .$$

2. Posto $z = x + iy$, si ha

$$f(x,y) = f(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y + i \cos x \operatorname{ch} y \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y + i(\sin x \operatorname{sh} y + i \cos x \operatorname{ch} y) =$$

$$\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y + i \sin x \operatorname{sh} y - \cos x \operatorname{ch} y) = 0 \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos(x+iy) = \cos z = f'(z) \ .$$

Sia $u = \Re f = f_1$ e $v = \Im f = f_2$.
Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y$$

e

$$v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y \ ;$$

quindi si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \ .$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\sin x \,\mathrm{sh}\, y \;;$$

quindi si ha

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \;.$$

Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cos x \,\mathrm{ch}\, y + i(-\sin x \,\mathrm{sh}\, y) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) =$$

$$\cos(x+iy) = \cos z = f'(z) \;.$$

25.2.4 Differenziale di una funzione di variabile complessa e a valori complessi

Teorema 25.2.4.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora f è derivabile in a se e solo se esiste $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare, esiste $\alpha : -a + A \longrightarrow \mathbf{C}$ tali che $\alpha(h) \lll_{h\to 0} h$ e tale che*

$$(\forall h \in -a + A)\; f(a+h) - f(a) = T(h) + \alpha(h) \;;$$

in tal caso la T è unica e si ha

$$T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow f'(a)h \;.$$

Definizione 25.2.4.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile in a; si pone*

$$df(a) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow f'(a)h \;.$$

$df(a)$ è quindi una trasformazione lineare da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}$; dunque un elemento di $\mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$. Per ogni $h \in \mathbf{C}$ si ha $df(a)(h) = f'(a)h$. Si ha poi

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + o(h) \;.$$

L'insieme $\mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale complesso; rispetto a tale struttura una base di $\mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$ è

$$p : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow h \;,$$

cioè la funzione identica di $\mathbf{C}$.
Si dice che p è la base canonica di $\mathrm{L}_C(\mathbf{C},\mathbf{C})$.
Se $T \in \mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$ allora esiste una ed un solo $a \in \mathbf{C}$ tale che per ogni $h \in \mathbf{C}$ $T(h) = ah$; tale numero complesso a si dice associato a T.
Il numero complesso associato a $df(a)$ è quindi $f'(a)$.
Si ha $T = ap$, cioè a è la coordinata di T rispetto alla base canonica di $\mathrm{L}_C(\mathbf{C},\mathbf{C})$.

Esempio. Sia

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow e^{z^3} \;.$$

Per ogni $z \in \mathbf{C}$ f è derivabile in z se si ha

$$df(z) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow 3z^2 e^{z^3} h \;.$$

25.3 Integrale di una funzione complessa di variabile complessa

25.3.1 Traiettorie chiuse omotope

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$.
Traiettorie con uguale dominio omotope. Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettorie di A; a livello intuitivo, un'omotopia di φ in ψ è una deformazione continua che fa passare dalla traiettoria φ alla traiettoria ψ attraverso traiettorie intermedie θ_ξ, restando in A, con ξ appartenente ad un intervallo $[\alpha, \beta]$ in modo tale che $\theta_\alpha = \varphi$ e $\theta_\beta = \psi$.
Precisamente:
Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\alpha < \beta$; sia $\theta : [a, b] \times [\alpha, \beta] \longrightarrow X$; si dice che θ è una omotopia in X di φ in ψ se risulta

1. θ continua;
2. $(\forall t \in [a, b])\ \varphi(t) = \theta(t, \alpha)$;
3. $(\forall t \in [a, b])\ \psi(t) = \theta(t, \beta)$.

Posto per ogni $\xi \in [\alpha, \beta]$

$$\theta_\xi : [a, b] \longrightarrow X, t \longrightarrow \theta(t, \xi) \ ,$$

$\theta_x i$ sono le traiettorie intermedie che portano φ in ψ.
Due traiettorie φ e ψ con stesso dominio sono omotope se esiste un'omotopia di φ in ψ.
Traiettorie equivalenti. Date due traiettorie $\varphi : [a, b] \longrightarrow A$ e $\psi : [c, d] \longrightarrow A$ si dice che φ è equivalente a ψ se esiste $\alpha : [c, d] \longrightarrow [a, b]$, α continua e strettamente crescente tale che $\psi = \varphi \circ \alpha$.
Traiettorie omotope. Date due traiettorie $\varphi : [a, b] \longrightarrow A$ e $\psi : [c, d] \longrightarrow A$, se $\psi_1 : [a, b] \longrightarrow A$ è equivalente a ψ si dice che φ è omotopa a ψ, se φ è omotopa a ψ_1.
Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettorie chiuse di A; a livello intuitivo, un'omotopia traiettorie chiuse di φ in ψ è una deformazione continua che fa passare dalla traiettoria φ alla traiettoria ψ attraverso traiettorie chiuse intermedie θ_ξ, restando in A, con ξ appartenente ad un intervallo $[\alpha, \beta]$ in modo tale che $\theta_\alpha = \varphi$ e $\theta_\beta = \psi$.
Precisamente:
Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; siano $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettorie di A chiuse; siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\alpha < \beta$; sia $\theta : [a, b] \times [\alpha, \beta] \longrightarrow X$; si dice che θ è una omotopia di traiettorie chiuse di φ in ψ se risulta

1. θ continua;
2. $(\forall \xi \in [\alpha, \beta])\ \theta(a, \xi) = \theta(b, \xi)$;
3. $(\forall t \in [a, b])\ \varphi(t) = \theta(t, \alpha)$;
4. $(\forall t \in [a, b])\ \psi(t) = \theta(t, \beta)$.

Per ogni $\xi \in [\alpha, \beta]$ sia

$$\theta_\xi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow \theta(t, \xi) \ ;$$

allora si ha

1. $(\forall \xi \in [\alpha, \beta]\ \theta_\xi$ traiettoria di X chiusa;
2. $\theta_\alpha = \varphi$;
3. $\theta_\beta = \psi$.

Traiettorie chiuse omotope Due traiettorie φ e ψ chiuse con stesso dominio sono omotope se esiste un'omotopia di traiettorie chiuse di φ in ψ.
Date due traiettorie chiuse $\varphi : [a, b] \longrightarrow A$ e $\psi : [c, d] \longrightarrow A$ se $\psi_1 : [a, b] \longrightarrow A$ è equivalente a ψ si dice che φ è omotopa a ψ, se φ è omotopa a ψ_1.
Traiettoria ridotta ad un punto. Sia $P \in A$; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; allora la traiettoria

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow X, t \longrightarrow P$$

si chiama traiettoria di dominio $[a, b]$ in A ridotta al punto P.

Traiettoria omotopa a 0. Sia φ una traiettoria chiusa di A; si dice che ψ è omotopa a 0 se esiste esiste ψ traiettoria di X ridotta ad un punto tale che φ è omotopa come traiettoria chiusa a ψ.
Se A è un aperto connesso, ciò equivale a dire che φ è omotopa ad ogni traiettoria ridotta ad un qualunque punto di A.
Insieme a omotopia nulla. Si dice che A è un insieme a omotopia nulla se per ogni φ traiettoria in A chiusa, φ è omotopa a 0 in A.
Insieme semplicemente connesso. Sia A aperto; si dice che X è un insieme semplicemente connesso se A è connesso e se A è a omotopia nulla.
Insieme stellato come insieme semplicemente connesso. Se A è un aperto stellato, allora A è semplicemente connesso.

25.3.2 Invarianza per omotopia di traiettorie chiuse dell'integrale di una forma differenziale chiusa su traiettorie chiuse

Teorema 25.3.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega \in \Lambda(A)$; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A chiusa di classe C^1 a tratti; siano $c, d \in \mathbf{R}$; sia $c < d$; sia $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A chiusa di classe C^1 a tratti; φ sia omotopa a ψ come traiettoria chiusa; allora si ha*

$$\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega \ .$$

Enunciato

Teorema 25.3.2.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia*

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow P$$

una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia φ una traiettoria chiusa; sia φ omotopa a 0 in A; allora si ha

$$\int_\varphi \omega = 0 \ .$$

Dimostrazione. Esiste ψ traiettoria ridotta ad un punto omotopa a φ come traiettorie chiuse; si ha
$\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega = 0$.

Osservazione 25.3.2.1 Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow P$$

una traiettoria in A di classe C^1 a tratti chiusa; allora sono due i casi notevoli per i quali

$$\int_\varphi \omega = 0 \ ;$$

precisamente

1. ω esatta;
2. φ omotopa a 0.

25.3.3 Forme differenziali chiuse su un aperto a omotopia nulla

Teorema 25.3.3.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A un aperto ad omotopia nulla; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia φ una traiettoria chiusa; allora si ha*

$$\int_\varphi \omega = 0 \ .$$

Dimostrazione. Infatti φ è omotopa a 0.

Teorema 25.3.3.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A un aperto ad omotopia nulla; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; allora si ha*

$$\omega \ \textit{chiusa} \Leftrightarrow \omega \ \textit{esatta} \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo infatti ω chiusa; allora l'integrale di ω su ogni traiettoria di classe C^1 a tratti chiusa è uguale a 0; quindi ω è esatta.

Teorema 25.3.3.3 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $a \in A$; allora $A - \{a\}$ è un aperto non ad omotopia nulla.*

Dimostrazione. Esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}'(a, r) = \{x \in A' \ \|x - a\| \leq r\} \subset A$; sia

$$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (a_1 + r\cos t, a_2 + r\sin t) \ ;$$

la funzione φ è una traiettoria chiusa in $A - \{a\}$.
Sia $\omega : A - \{a\} \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$ la forma differenziale

$$-\frac{x_2 - a_2}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}\, dx + \frac{x_1 - a_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}\, dy \ .$$

Si verifica subito che ω è una forma differenziale chiusa.
Si ha

$$\int_\varphi \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2} r\cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \ .$$

Per il teorema sopra $A - \{a\}$ non è ad omotopia nulla.

Teorema 25.3.3.4 *Sia A un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$; sia $a \in A$; allora $A - \{a\}$ non è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Segue da sopra.

25.3.4 Catene di traiettorie

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$.
Catena di traiettorie. Intuitivamente una catena di traiettorie in A è un insieme finito di traiettorie percorse un certo numero di volte nel loro verso o nel verso opposto.
Precisamente:
Sia T l'insieme delle traiettorie di A; si chiama catena di traiettorie di X una funzione

$$\mathcal{C} : T \longrightarrow \mathbf{Z}$$

diversa da 0 solo per un numero finito di traiettorie.
Le traiettorie che si considerano sino quelle per cui $\mathcal{C}$ è diverso da 0; se $\varphi \in T$ e se $\mathcal{C}(\varphi) = n > 0$, allora φ si pensa percorsa n volte nel suo verso, se $\mathcal{C}(\varphi) = n < 0$, allora φ si pensa percorsa n volte nel suo verso opposto.
Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ catene di traiettorie di X; poniamo

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow \mathcal{C}_1(\varphi) + \mathcal{C}_2(\varphi) \ .$$

L'insieme delle catene di traiettorie di X dotato dell'operazione $+$ è un gruppo commutativo.
L'elemento neutro è la catena nulla

$$0 : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow 0 \ .$$

L'opposta di una catena $\mathcal{C}$ è la catena

$$-\mathcal{C} : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow -\mathcal{C}(\varphi) \ .$$

Se $n \in \mathbf{Z}$, resta anche definita la catena $n\mathcal{C}$.
Traiettoria come catena di traiettorie. Ad una traiettoria $\varphi \in T$ associamo la catena di traiettorie

$$c(\varphi) : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \psi \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } \psi = \varphi \\ 0 & \text{per } \psi \neq \varphi \end{cases}$$

$c(\varphi)$ si indica (per abuso) con φ.
Con questa convenzione se $(\varphi_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ è una successione di T tale che

$$\{\varphi \in T; \mathcal{C}(\varphi) \neq 0\} \subset \{\varphi_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} \ ,$$

posto per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $a_i = \mathcal{C}(\varphi_i)$; si ha

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \ .$$

Giustapposizione di traiettorie. Due traiettorie φ e ψ tali che il punto finale di φ sia uguale al punto iniziale di ψ possono essere unite in un'unica traiettoria detta la **giustapposizione** di φ e di ψ.
Precisamente:
Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria di A; sia $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria di A; sia $\varphi(b) = \psi(c)$; allora la traiettoria

$$\varphi \vee \psi : [a, b + d - c] \longrightarrow X, t \longrightarrow \begin{cases} \varphi(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{per } t \in]b, b + d - c] \end{cases}$$

si chiama giustapposizione delle traiettorie φ e ψ.
Analogamente si definisce la giustapposizione di tre o più traiettorie.
Viceversa una traiettoria può essere spezzata in un numero finito di traiettorie di cui è giustapposizione.
Sottocatena di traiettorie. Sia $\mathcal{C}$ una catena di traiettorie; una sottocatena di $\mathcal{C}$ è una catena che si ottiene da $\mathcal{C}$ scomponendo le traiettorie di $\mathcal{C}$ in un numero finito di traiettorie la cui giustapposizione dà la traiettoria di partenza.
Traiettorie opposte. Date due traiettorie $\varphi : [a, b] \longrightarrow A$ e $\psi : [c, d] \longrightarrow A$ si dice che φ è opposta a ψ se esiste $\alpha : [c, d] \longrightarrow [a, b]$, α continua e strettamente decrescente tale che $\psi = \varphi \circ \alpha$.
Intuitivamente l'immagine viene percorsa in verso opposto per le due traiettorie.

Catene di traiettorie equivalenti. Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due catene di traiettorie. Intuitivamente $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono equivalenti se è possibile scomporre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ in un numero finito di traiettorie equivalenti percorse nello stesso numero di volte nello stesso verso o opposte percorse nello stesso numero di volte in verso opposto.
Precisamente:
Si dice che $\mathcal{C}_1$ è equivalente $\mathcal{C}_2$ se esiste $\mathcal{C}'_1$ sottocatena di $\mathcal{C}_1$ se esiste $\mathcal{C}'_2$ sottocatena di $\mathcal{C}_2$ tali che esiste

$$\Phi : \{\varphi \in T; \mathcal{C}'_1(\varphi) \neq 0\} \longrightarrow \{\varphi \in T; \mathcal{C}'_2(\varphi) \neq 0\}$$

biettiva tale che per ogni $\varphi \in T$, $\mathcal{C}'_1(\varphi) \neq 0$ si ha

1. φ traiettoria equivalente a $\Phi(\varphi)$ e $\mathcal{C}'_1(\varphi) = \mathcal{C}'_2(\Phi(\varphi))$,
2. φ traiettoria opposta a $\Phi(\varphi)$ e $\mathcal{C}'_1(\varphi) = -\mathcal{C}'_2(\Phi(\varphi))$.

Se C è l'insieme delle catene, resta definita su C un'equivalenza R. R è compatibile con l'operazione $+$ di C. Resta quindi definito il gruppo quoziente $(C/R, +)$.
Sostegno di una classe di catene di traiettorie. Il sostegno di una classe di catene di traiettorie è dato dall'unione delle immagini delle traiettorie di una catena della classe, non considerando le coppie di traiettorie percorse in verso opposto.
Sia $[\mathcal{C}]$ una classe di catene di traiettorie; sia $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$; supponiamo che per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $c_i \neq 0$ e che per ogni $i, j = 1, 2, \ldots, n$ non esista una traiettoria restrizione di φ_i opposta ad una traiettoria restrizione di φ_j; allora l'insieme

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cod}(\varphi)$$

si chiama sostegno di $[\mathcal{C}]$.
Il sostegno di una catena di traiettorie $\mathcal{C}$ è il sostegno della classe $[\mathcal{C}]$.
Ciclo. Si chiama ciclo una catena equivalente ad una catena formata da traiettorie chiuse.
Una classe di catene $[\varphi]$ di $C/\sim$ si dice un ciclo se φ è un ciclo.

25.3.5 Catene di parametrizzazioni di dimensione 2

Sia $D \subset \mathbf{R}^N$.
Dominio semplice Si dice che D è un dominio semplice se D è omeomorfo a $\mathrm{B}'(0,1)$ dove $\mathrm{B}'(0,1)$ è la palla unitaria chiusa di $\mathbf{R}^N$.
I domini semplici di $\mathbf{R}$ sono gli intervalli $[a, b]$ con $a < b$.
I rettangoli $[a, b] \times [c, d]$, con $a < b$ e $c < d$ sono domini semplici di $\mathbf{R}^2$.
Omeomorfismo positivo. Siano D e D_1 domini semplici di $\mathbf{R}^N$; sia $f : D \longrightarrow D_1$ un omeomorfismo; si dice che l'omeomorfismo f è positivo se

$$(\forall a \in D)(\exists V \text{ intorno di } a \text{ in } D)$$
$$(\forall (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in V^N\ (v_1 - a, v_2 - a, \ldots, v_n - a) \text{ base di } \mathbf{R}^N \text{ positiva})$$
$$(f(v_1) - f(a), f(v_2) - f(a), \ldots, f(v_n) - f(a)) \text{ base di } \mathbf{R}^N \text{ positiva})\ .$$

Omeomorfismo negativo Si dice che l'omeomorfismo f è negativo se

$$(\forall a \in D)(\exists V \text{ intorno di } a \text{ in } D)$$
$$(\forall (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in V^N\ (v_1 - a, v_2 - a, \ldots, v_n - a) \text{ base di } \mathbf{R}^N \text{ positiva})$$
$$(f(v_1) - f(a), f(v_2) - f(a), \ldots, f(v_n) - f(a)) \text{ base di } \mathbf{R}^N \text{ negativa})\ .$$

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$.
Sia D un dominio semplice di $\mathbf{R}^2$.
Parametrizzazione di dimensione 2. Una funzione del tipo

$$\varphi : D \longrightarrow A$$

continua, si dice parametrizzazione in A di dimensione 2.

In particolare una funzione del tipo

$$\varphi : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow A$$

continua, è una parametrizzazione di dimensione 2.

Parametrizzazioni di dimensione 2 equivalenti. Siano D, D_1 domini semplici di $\mathbf{R}^2$; siano $\varphi : D \longrightarrow X$, $\varphi_1 : D_1 \longrightarrow X$ parametrizzazioni di dimensione 2; si dice che φ è equivalente a φ_1 se esiste $\alpha : D \longrightarrow D_1$ omeomorfismo positivamente orientato tale che $\varphi = \varphi_1 \circ \alpha$.

Parametrizzazioni di dimensione 2 opposte. Siano D, D_1 domini semplici di $\mathbf{R}^2$; siano $\varphi : D \longrightarrow X$, $\varphi_1 : D_1 \longrightarrow X$ parametrizzazioni di dimensione 2; si dice che φ è opposta a φ_1 se esiste $\alpha : D \longrightarrow D_1$ omeomorfismo negativamente orientato tale che $\varphi = \varphi_1 \circ \alpha$.

Catene di parametrizzazioni di dimensione 2. Sia S l'insieme delle parametrizzazioni di dimensione 2 in A; si chiama catena di parametrizzazioni di dimensione 2 in A una funzione

$$\mathcal{C} : S \longrightarrow \mathbf{Z}$$

diversa da 0 solo per un numero finito di parametrizzazioni su domini semplici di $\mathbf{R}^2$.

Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ catene di parametrizzazioni di dimensione 2; poniamo

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow \mathcal{C}_1(\varphi) + \mathcal{C}_2(\varphi) \ .$$

L'insieme delle catene di parametrizzazioni di dimensione 2 in X dotato dell'operazione $+$ è un gruppo commutativo.

L'elemento neutro è la catena nulla

$$0 : S \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow 0 \ .$$

L'opposta di una catena $\mathcal{C}$ è la catena

$$-\mathcal{C} : S \longrightarrow \mathbf{Z}, \varphi \longrightarrow -\mathcal{C}(\varphi) \ .$$

Se $n \in \mathbf{Z}$, resta anche definita la catena $n\mathcal{C}$.

Ad una parametrizzazione di dimensione 2 $\varphi \in T$ associamo la catena di parametrizzazioni di dimensione 2

$$c(\varphi) : T \longrightarrow \mathbf{Z}, \psi \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } \psi = \varphi \\ 0 & \text{per } \psi \neq \varphi \end{cases}$$

$c(\varphi)$ si indica (per abuso) con φ.

Con questa convenzione se $(\varphi_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ è una successione di C tale che

$$\{\varphi \in T; \mathcal{C}(\varphi) \neq 0\} \subset \{\varphi_i;\ i = 1,2,\ldots,n\} \ ,$$

posto per ogni $i = 1,2,\ldots,n$ sia $a_i = \mathcal{C}(\varphi_i)$; si ha

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \ .$$

Sottocatena di una catena di parametrizzazioni di dimensione 2 Sia $\mathcal{C}$ una catena di parametrizzazioni di dimensione 2; una sottocatena di $\mathcal{C}$ è una catena che si ottiene da $\mathcal{C}$ scomponendo il dominio delle traiettorie di $\mathcal{C}$ in un numero finito di di domini semplici.

Catene di parametrizzazioni di dimensione 2 equivalenti. Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due catene di dimensione 2; si dice che $\mathcal{C}_1$ è equivalente $\mathcal{C}_2$ se esiste $\mathcal{C}_1'$ sottocatena di $\mathcal{C}_1$, se esiste $\mathcal{C}_2'$ sottocatena di $\mathcal{C}_2$ tali che esiste

$$\Phi : \{\varphi \in S; \mathcal{C}_1'(\varphi) \neq 0\} \longrightarrow \{\varphi \in S; \mathcal{C}_2'(\varphi) \neq 0\}$$

biettiva tale che per ogni $\varphi \in S$, $\mathcal{C}_1'(\varphi) \neq 0$ si ha

1. φ equivalente a $\Phi(\varphi)$ e $\mathcal{C}_1'(\varphi) = \mathcal{C}_2'(\Phi(\varphi))$,
2. φ opposta a $\Phi(\varphi)$ e $\mathcal{C}_1'(\varphi) = -\mathcal{C}_2'(\Phi(\varphi))$.

Se C_2 è l'insieme delle catene di dimensione 2, resta definita su C_2 un'equivalenza R. R è compatibile con l'operazione $+$ di C_2. Resta quindi definito il gruppo quoziente $(C_2/R, +)$.
Sostegno di una classe di catene di parametrizzazioni di dimensione 2. Il sostegno di una classe di catene di parametrizzazioni di dimensione 2 è dato dall'unione delle immagini delle parametrizzazioni di una catena della classe, non considerando le coppie di parametrizzazioni opposte.
Sia $[\mathcal{C}]$ una classe di catene di parametrizzazioni di dimensione 2; sia $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$; supponiamo che per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $c_i \neq 0$ e che per ogni $i, j = 1, 2, \ldots, n$ non esista una parametrizzazione di dimensione 2 restrizione di φ_i opposta ad una parametrizzazione di dimensione 2 di φ_j; allora l'insieme

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cod}(\varphi)$$

si chiama sostegno di $[\mathcal{C}]$.
Il sostegno di una catena di parametrizzazioni di dimensione 2 $\mathcal{C}$ è il sostegno della classe $[\mathcal{C}]$.
Bordo di una parametrizzazione su un rettangolo. Sia $\varphi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow A$ una parametrizzazione di dimensione 2.
Sia

$$b_1 : [a, b] \longrightarrow X, t \longrightarrow \varphi(t, c) \ ,$$
$$b_2 : [c, d] \longrightarrow X, t \longrightarrow \varphi(b, t) \ ,$$
$$b_3 : [a, b] \longrightarrow X, t \longrightarrow \varphi(t, d) \ ,$$
$$b_4 : [c, d] \longrightarrow X, t \longrightarrow \varphi(a, t) \ ,$$

La classe di catene

$$[b_1 + b_2 - b_3 - b_4]$$

si chiama bordo di φ e si indica con $\partial\varphi$.
$\partial\varphi$ è un ciclo.
Bordo di una parametrizzazione di dimensione 2. Sia D un dominio semplice di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow X$ una parametrizzazione di dimensione 2; e esiste $\alpha : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow D$ omeomorfismo positivamente orientato; $\varphi \circ \alpha$ è una parametrizzazione su $[0, 1] \times [0, 1]$. allora $\partial(\varphi \circ \alpha)$ si chiama bordo di φ.
$\partial\varphi$ è un ciclo.
Il **Bordo di una catena di parametrizzazioni di dimensione** 2 è la classe di catene di traiettorie che si ottiene facendo il bordo di ciascuna parametrizzazione di dimensione 2 della catena. Se $\mathcal{C}$ è la catena di parametrizzazioni di dimensione 2, il bordo di $\mathcal{C}$ si indica $\partial\mathcal{C}$.
$\partial\mathcal{C}$ è un ciclo.
Bordo di una classe di parametrizzazioni di dimensione 2. Catene di parametrizzazioni di dimensione 2 equivalenti hanno lo stesso bordo; il bordo della classe $[\mathcal{C}]$ è il bordo $\partial\mathcal{C}$. Si indica $\partial[\mathcal{C}]$.
Bordo come ciclo. $\partial[\mathcal{C}]$ è un ciclo.

25.3.6 Cicli omologhi

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$.
Ciclo omologo a 0. Sia $[\mathcal{C}]$ una classe di traiettorie in A; sia $[\mathcal{C}]$ un ciclo; si dice che $[\mathcal{C}]$ è omologo a 0 se esiste una catena di parametrizzazioni di dimensione 2 il cui bordo sia $[\mathcal{C}]$.
Un ciclo $\mathcal{C}$ si dice omologo a 0 se la classe $[\mathcal{C}]$ è omologa a 0.
Cicli omologhi. Due cicli $[\mathcal{C}_1]$ e $[\mathcal{C}_2]$ sono omologhi se la loro differenza è omologa a 0.
Due cicli $[\mathcal{C}_1]$ e $[\mathcal{C}_2$ sono omologhi se le loro classi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono omologhe; ciò equivale a dire che la loro differenza è omologa a 0.
Omologia e omotopia. Siano φ_1 e φ_2 traiettorie chiuse in A; sia $c(\varphi_1)$ il ciclo associato a φ_1; sia $c(\varphi_2)$ il ciclo associato a φ_2; allora si ha

$$\varphi_1 \text{ omotopo a } \varphi_2 \Rightarrow [c(\varphi_1)] \text{ omologo a } [c(\varphi_2)] \ .$$

In generale non vale il viceversa. Una traiettoria chiusa φ può essere tale che $c(\varphi)$ è omologo a 0 senza che φ sia omotopa a 0.

Insieme con omologia nulla Si dice che A è un insieme con omologia (di ordine 1) nulla se ogni ciclo in A è omologo a 0.
Insiemi con omologia nulla e insiemi con omotopia nulla. Se A è a omotopia nulla, allora A è anche a omologia nulla. In generale non vale il viceversa.
Per $N = 2$ e A aperto, A è a omotopia nulla se e solo se A è a omologia nulla; in particolare, se A è connesso, allora A è semplicemente connesso se e solo se ogni ciclo in A è omologo a 0.
Gruppo di omologia. L'insieme dei cicli $[\mathcal{C}]$ di X è un sottogruppo dell'insieme delle classi delle catene su A; la relazione d'equivalenza di cicli omologhi è compatibile con l'operazione di somma di cicli; il gruppo quoziente si chiama gruppo di omologia (di ordine 1).
In $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)]$ il gruppo di omologia è isomorfo a $(\mathbf{Z}, +)$; in $\mathbf{R}^2$ privato di due punti il gruppo di omologia è isomorfo a $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, +)$; e così via.

25.3.7 Integrale di una forma differenziale su una catena

Definizione 25.3.7.1 Catene di classe C^1. *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\mathcal{C}$ una catena in A; si dice che $\mathcal{C}$ è di classe C^1 se ogni traiettoria φ tale che $\mathcal{C}(\varphi) \neq 0$ è di classe C^1.*

Definizione 25.3.7.2 Integrale di una forma differenziale su una catena. *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; si a $\mathcal{C}$ una catena in A; sia $\mathcal{C}$ di classe C^1; sia*

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \ ;$$

sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω continua; si pone

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\varphi_i} \omega \ .$$

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ catene in A di classe C^1; sia $n \in \mathbf{Z}$; sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω continua; allora si ha

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega$$

e

$$\int_{n\mathcal{C}} \omega = n \int_{\mathcal{C}} \omega \ .$$

In particolare si ha

$$\int_{-\mathcal{C}} \omega = - \int_{\mathcal{C}} \omega \ .$$

Teorema 25.3.7.1 Invarianza dell'integrale per catene equivalenti. *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ catene in A; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ di classe C^1; sia $\mathcal{C}_1$ equivalente a $\mathcal{C}_2$; sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω continua; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_2} \omega \ .$$

Enunciato

Teorema 25.3.7.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$. sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω continua; allora ω è esatta se e solo se $\int_{\mathcal{C}} \omega = 0$ per ogni $\mathcal{C}$ ciclo in A.*

Enunciato

25.3.8 Invarianza per omologia dell'integrale di una forma differenziale chiusa su un ciclo

Teorema 25.3.8.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cicli in A; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ di classe C^1; sia $\mathcal{C}_1$ omologo a $\mathcal{C}_2$; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_2} \omega \ .$$

Enunciato

Teorema 25.3.8.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ omologo a 0; sia $\mathcal{C}$ di classe C^1; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = 0 \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Osservazione 25.3.8.1 Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\mathcal{C}$ una catena di traiettorie in A di classe C^1; allora sono due i casi notevoli per i quali

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = 0 \ ;$$

precisamente

1. ω esatta;
2. $\mathcal{C}$ omologa a 0.

25.3.9 Forme differenziali chiuse su un aperto a omologia nulla

Teorema 25.3.9.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A un aperto ad omologia nulla; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ di classe C^1; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = 0 \ .$$

Dimostrazione. Infatti $\mathcal{C}$ è omologa a 0.

Teorema 25.3.9.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A un aperto ad omologia nulla; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; allora si ha*

$$\omega \ \textit{chiusa} \Leftrightarrow \omega \ \textit{esatta} \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo infatti ω chiusa; allora l'integrale di ω su ogni ciclo di classe C^1è uguale a 0; quindi ω è esatta.

25.3.10 Forma differenziale chiusa su un aperto di $\mathbf{R}^2$ privato di un punto

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia A a omologia nulla; sia $a \in A$; sia $\omega : A-\{a\} \longrightarrow L(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$; sia ω di classe C^1; sia $r > 0$. sia $\mathrm{B}'(a;r) \subset A$. sia

$$\varphi : [0.2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (r\cos t, r\sin t) \ ;$$

allora ω è esatta se e solo se

$$\int_\Gamma \omega = 0 \ .$$

Infatti da ciò segue che l'integrale di ω su ogni ciclo di classe C^1 è uguale a 0.
Il risultato si estende ad A privato di un numero finito di punti.

25.3.11 Forme differenziali lineari complesse di variabili reali

Definizione 25.3.11.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si chiama forma differenziale lineare su A complessa di variabile reale una funzione*

$$\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \ ,$$

dove si considera $\mathbf{C}$ come spazio vettoriale reale.

Esempio. Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f differenziabile; allora

$$df : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), x \longrightarrow df(x) \ ;$$

è una forma differenziale complessa di variabile reale su A.

Quanto visto per le forme differenziali reali di variabile reale si estende alle forme differenziali complesse di variabile reale.
In particolare si definiscono la somma di forme differenziali lineari complesse di variabile reale, e il prodotto di una funzione da A a $\mathbf{C}$ e di una forma differenziale lineare complessa di variabile reale.
L'insieme $\mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale complesso; rispetto a tale struttura una base è data dalle forme lineari

$$P_i : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, h \longrightarrow h_i \ .$$

Come nel caso delle forme differenziali reali, vale il seguente teorema

Teorema 25.3.11.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ una forma differenziale complessa di variabile reale su A; allora esiste una ed una sola funzione $F : A \longrightarrow \mathbf{C}^N$ tale che*

$$(\forall x \in A)\, \omega(x) = \sum_{i=1}^{N} F_i(x) P_i \ .$$

Si dice che $F : A \longrightarrow \mathbf{C}^N$ è il campo di vettori complesso associato ad ω.
Si dice che ωè continua, se F è continuo; si dice che ω è di classe C^p (risp. di classe C^∞) se F è di classe C^p (risp. di classe C^∞).
Come nel caso delle forme differenziali reali, vale il seguente teorema

Teorema 25.3.11.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f differenziabile; allora il campo di vettori associato alla forma differenziale df è* $\mathrm{grad}\, f$.

Sia x una variabile; indicando per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ con x_i, la funzione

$$A \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow x_i \ ,$$

in base a quanto si è visto, si ha

$$dx_i : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}), x \longrightarrow P_i \ .$$

Come nel caso reale, da ciò segue che se F è il campo di vettori complesso associato a ω, si ha

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} F_i dx_i \ .$$

Tale scrittura si chiama espressione canonica della forma differenziale ω nella variabile x o anche espressione della forma differenziale ω come combinazione lineare delle forme differenziali $(dx_i)_{i=1,2,\ldots,N}$.
In particolare per il differenziale df di una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ si ha

$$df = \sum_{i=1}^{N} D_i f dx_i \ .$$

Indichiamo ancora con ω il campo associato ad ω, la forma canonica di ω si scrive

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i dx_i \ .$$

Si osservi che la differenza con le forme differenziali reali di variabile reale consiste nel fatto che ora le ω_i sono funzioni a valori complessi, mentre prima le ω_i erano funzioni a valori reali.

Esempio. Un esempio di forma differenziale complessa su $\mathbf{R}^3$ è

$$\omega(x, y, z) = (y + ix)\, dx + e^{iy}\, dy + (3 - i \sin(xyz))\, dz \ .$$

Le nozioni di forme differenziali chiuse, di primitiva di una forma differenziale e di forme differenziali esatte viste nel caso di $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$, si danno allo stesso modo per le forme differenziali $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Esercizio. Dire se le seguenti forme differenziali complesse sono esatte e, in caso affermativo, determinare l'insieme delle primitive.

1. $\omega(x,y) = \sin(ix)\,dx + \cos(ix)\,dy$;
2. $\omega(x,y) = i\cos(ix)\,dx - \sin y\,dy$.

Risoluzione.

1. Si ha $\mathrm{dom}(\omega) = \mathbf{R}^2$. Si ha
$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(ix)) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x}(\cos(ix)) = i\sin(ix)$;
quindi ω non è chiusa; quindi ω non è esatta.
2. Si ha $\mathrm{dom}(\omega) = \mathbf{R}^2$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}, (x,y) \longrightarrow \sin(ix) + \cos y$. Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = i\cos(ix)$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\sin y$;
quindi f è una primitiva di ω; quindi ω è esatta. L'insieme delle primitive di ω è $\{f+c;\ c \in \mathbf{C}\}$.

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ una forma differenziale complessa di variabile reale; sia $x \in A$; si ha allora $\omega(x) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare; possiamo quindi considerare $\Re(\omega(x))$ e $\Im(\omega(x))$, che risultano funzioni da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}$; si prova immediatamente che tali funzioni sono lineari; ciò permette di dare la seguente definizione.

Definizione 25.3.11.2 Parte reale e parte immaginaria di una forma differenziali complessa *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ una forma differenziale complessa su A; poniamo*

1. $\Re\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}), x \longrightarrow \Re(\omega(x))$,
2. $\Im\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}), x \longrightarrow \Im(\omega(x))$,

La forma lineare reali $\Re\omega$ si chiama parte reale di ω; la forma lineare reali $\Im\omega$ si chiama parte immaginaria di ω.
Si ha
$$\omega = \Re\omega + i\Im\omega\ .$$

Se F è il campo associato a ω, allora $\Re F$ è il campo associato a $\Re\Omega$ e $\Im F$ è il campo associato a $\Im\omega$.

Esempio. Sia ω la forma differenziale complessa su $\mathbf{R}^3$
$$\omega(x,y,z) = (y+ix)\,dx + e^{iy}\,dy + (3 - i\sin(xyz))\,dz\ .$$
Si ha
$$\Re\omega(x,y,z) = y\,dx + \cos y\,dy + 3\,dz$$
e
$$\Im\omega(x,y,z) = x\,dx + \sin y\,dy - \sin(xyz)\,dz\ .$$

Supposta ω di classe C^1, ω è chiusa se e solo se $\Re\omega$ e $\Im\omega$ sono chiuse.
ω è esatta se e solo se $\Re\omega$ e $\Im\omega$ sono esatte.

La teoria sulle forme differenziali complesse esatte può quindi essere ricondotta alla teoria delle forme differenziali reali esatte. Si ottengono quindi per le forme differenziali complesse risultati corrispondenti a quelli visti per le forme differenziali reali.
Sia I un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; siano $x, y \in I$l; si pone

$$\int_x^y f = \int_x^y \Re f + i \int_x^y \Im f \ .$$

Una primitiva di f è una funzione $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$ derivabile tale che $g' = f$.
Anche per $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continua, se g è una primitiva di f, si ha

$$\int_x^y f = g(y) - g(x) \ .$$

I risultati visti per gli integrali di funzioni reali si estendono agli integrali di funzioni complesse.
La definizione di integrale per una funzione complessa permette di estendere la nozione di integrale su una traiettoria di classe C^1 a tratti alle forme differenziali complesse di variabile reale.

Esercizio. Calcolare

$$\int_\varphi ix\,dx + (iy + x)\,dy$$

dove

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (t, t^2) \ .$$

Risoluzione. La traiettoria φ si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} , \ t \in [0, 1] \ .$$

Si ha

$$\int_\varphi ix\,dx + (iy + x)\,dy = \int_0^1 (it + (it^2 + t)2t)\,dt = \left[i\frac{t^2}{2} + 2i\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + i \ .$$

Considerando la parte reale e la parte complessa della forma ci si può ricondurre alle forme differenziali reali di variabile reale, come risulta dal teorema che segue.

Teorema 25.3.11.3 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ una forma differenziale lineare complessa; sia ω continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha*

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi \Re\omega + i \int_\varphi \Im\omega \ .$$

Dimostrazione. Immediata.

Quanto visto per le forme differenziali reali di variabile reale si estende alle forme differenziali complesse di variabile reale; in particolare il teorema sull'integrale del differenziale, la caratterizzazione delle forme differenziali esatte tramite gli integrali su traiettorie, il teorema di Poicarè, la nozione di forma localmente esatta, l'invarianza per omotopia dell'integrale di una forma chiusa su una traiettoria chiusa, il fatto che una forma chiusa su un dominio a omotopia nulla ammetta primitiva, la nozione di integrale di una forma differenziale su una catena di traiettorie, l'invarianza per omologia dell'integrale di una forma chiusa su una ciclo, il fatto che una forma chiusa su un dominio a omologia nulla ammetta primitiva.

Esercizio. Calcolare

$$\int_{\varphi} 2xyi\,dx + (x^2 i + z^2)\,dy + 2yz\,dz$$

dove

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (\sqrt{1+t+2t^2}, t^2+t^4, t^6-t+1)\ .$$

Risoluzione. Sia ω la forma differenziale.
Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{C}, (x,y,z) \longrightarrow x^2yi + yz^2\ .$$

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyi$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 i + z^2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2yz$.
Quindi f è una primitiva di ω.
Il punto iniziale di φ è $\varphi(0) = (1,0,1)$; il punto finale di φ è $\varphi(1) = (2,20,63)$.
Si ha quindi

$$\int_{\varphi} 2xyi\,dx + (x^2 i + z^2)\,dy + 2yz\,dz = f(2,20,63) - f(1,0,0) = 4\cdot 20i + cdot 20\cdot 63^2 - 0 = 79280 + 80i\ .$$

25.3.12 La forma differenziale complessa di variabile complessa $f(z)\,dz$

Definizione 25.3.12.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; si chiama forma differenziale lineare su A complessa di variabile complessa una funzione*

$$\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})\ .$$

Esempio. Sia A un aperto di CC; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; allora

$$df : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C}), z \longrightarrow df(z)\ ;$$

è una forma differenziale complessa di variabile complessa su A.

Si definiscono la somma di forme differenziali lineari complesse di variabile complessa, e il prodotto di una funzione da A a $\mathbf{C}$ e di una forma differenziale lineare complessa di variabile complessa.
Ricordiamo che con p (coincidente con l'identità di $\mathbf{C}$) si è indicata la la base canonica di $\mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$

Teorema 25.3.12.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$ una forma differenziale complessa di variabile complessa su A; allora esiste una ed una sola funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che*

$$(\forall z \in A)\,\omega(z) = f(z)p\ .$$

Si dice che $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ è la funzione complessa associata ad ω.
Si dice che ω è continua, se f è continua; si dice che ω è di classe C^p (risp. di classe C^∞) se f è di classe C^p (risp. di classe C^∞).
Come nel caso delle forme differenziali reali, vale il seguente teorema

Teorema 25.3.12.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; allora la funzione associata alla forma differenziale df è f'.*

Sia z una variabile; indicando con z, la funzione

$$A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z \ ,$$

in base a quanto si è visto, si ha

$$dz : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C}), z \longrightarrow p \ .$$

Come nel caso reale, da ciò segue che se f è la funzione complessa associato a ω, si ha

$$\omega = f dz \ .$$

Tale scrittura si chiama espressione canonica della forma differenziale ω nella variabile z o anche espressione della forma differenziale ω come combinazione lineare delle forma differenziale dz.
In particolare per il differenziale df di una funzione derivabile $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ si ha

$$df = f' dz \ .$$

Esempio. Un esempio di forma differenziale complessa di variabile complessa definita su $\mathbf{C}$ è

$$\omega(z) = z^2 \, dz \ .$$

25.3.13 Forma differenziale complessa di variabile complessa esatta

Le nozioni di primitiva di una forma differenziale complessa di variabile complessa, di forma differenziale complessa di variabile complessa esatta, si danno allo stesso modo per le forme differenziali reali di variabile reale.

Definizione 25.3.13.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma differenziale complessa di variabile complessa su A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; si dice che f è una primitiva di ω se f è derivabile e se*

$$df = \omega \ .$$

Definizione 25.3.13.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma differenziale complessa di variabile complessa su A; si dice che ω è esatta se esiste $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ derivabile tale che*

$$df = \omega \ .$$

25.3.14 Primitiva di una funzione complessa di variabile complessa

Definizione 25.3.14.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; siano $f, g : A \longrightarrow \mathbf{C}$; si dice che f è una primitiva di g se f è derivabile e se*

$$f' = g \ .$$

Teorema 25.3.14.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; siano $f, g : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora f è una primitiva di g se e solo se f è una primitiva della forma differenziale complessa di variabile complessa $g\, dz$.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.3.14.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora g ammette primitiva se e solo se la forma differenziale complessa di variabile complessa $g\, dz$ è esatta.*

Dimostrazione. Immediata.

Per analogia con le forme differenziali, le funzioni $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ che ammettono primitiva, si chiamano esatte.

25.3.15 Forma differenziale lineare complessa di variabili reali associata ad una forma differenziale lineare complessa di variabile complessa

Lo spazio vettoriale complesso $\mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ è un sottospazio dello spazio vettoriale complesso $\mathrm{L}_R(\mathbf{R}^2; \mathbf{C})$.

Definizione 25.3.15.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma lineare complessa di variabile complessa; si chiama forma differenziale complessa di variabile reale associata ad ω la forma differenziale complessa di variabili reali*

$$A \longrightarrow \mathrm{L}_R(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}), x \longrightarrow \omega(x) \ .$$

Per dire che si considera la forma differenziale complessa di variabile reale associata ad ω, si dice che si considera ω come forma differenziale complessa di variabili reali.

Teorema 25.3.15.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma lineare complessa di variabile complessa; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata ad ω; consideriamo ω come forma differenziale complessa di variabili reali; allora il campo complesso associato ad ω è*

$$F : A \longrightarrow \mathbf{C}^2, (x, y) \longrightarrow (f(x, y), if(x, y)) \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo ω come forma differenziale complessa di variabili reali. Sia $(x, y) \in A$; sia $(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$;

$$\omega(x, y)(h_1, h_2) = f(x, y)(h_1 + ih_2) = f(x, y)h_1 + if(x, y)h_2 \ .$$

Quindi $\omega(x, y) = f(x, y)P_1 + if(x, y)P_2$.
Quindi il campo associato ad ω è quindi (f, if).

Teorema 25.3.15.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata al campo; consideriamo la forma differenziale complessa $f\,dz$ di variabile complessa come forma differenziale complessa di variabili reali; allora si ha*

$$f\,dz = f\,dx + if\,dy \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

In generale, se scriviamo $\omega = f\,dz$ consideriamo ω come forma differenziale complessa di variabile complessa; se scriviamo $\omega = f\,dx + if\,dt$ consideriamo ω come forma differenziale complessa di variabili reali.

Teorema 25.3.15.3 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma lineare complessa di variabile complessa; sia $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora g è una primitiva di ω se e solo se g è una primitiva della forma forma differenziale complessa di variabile reale associata ad ω.*

Dimostrazione. Immediata.

In particolare ω è esatta se e solo se forma forma differenziale complessa di variabile reale associata ad ω è esatta.

Teorema 25.3.15.4 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile su A; sia f' continua; allora la forma differenziale complessa di variabile reale $f\,dx + if\,dy$ è chiusa.*

Dimostrazione. Per le condizioni di monogenia, si ha infatti $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$.

25.3.16 Parte reale e parte immaginaria della forma differenziale complessa di variabile reale $f\,dx + if\,dy$

Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora alla forma differenziale complessa di variabili reali $f\,dx + if\,dy$ restano associate le due forme differenziali reali di variabili reali, parte reale e parte immaginaria di $f\,dx + if\,dy$.

Teorema 25.3.16.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$, sia $u = f_1$ e $v = f_2$; allora si ha*

1. $\Re(f\,dx + if\,dy) = u\,dx - v\,dy$;
2. $\Im(f\,dx + if\,dy) = v\,dx + u\,dy$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.3.16.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$, sia $u = f_1$ e $v = f_2$; allora le forme differenziali reali di variabili reali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono chiuse.*

Dimostrazione. Segue dalle condizioni di monogenia reali.

25.3.17 Integrali di forme differenziali complesse di variabile complessa

Definizione 25.3.17.1 *Siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; una funzione continua*

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$$

si chiama traiettoria complessa di dominio $[a, b]$ in $\mathbf{C}$.

Essendo $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ le traiettorie complesse sono un caso particolare di traiettorie in $\mathbf{R}^N$; le nozioni viste per le traiettorie in $\mathbf{R}^N$ si applicano dunque a questo caso.

Definizione 25.3.17.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma differenziale lineare complessa di variabile complessa; sia ω continua; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata a ω; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria in A di classe C^1; poniamo*

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Il numero complesso $\int_\varphi \omega$ si chiama integrale della forma differenziale complessa di variabile complessa ω sulla traiettoria φ.
Come nel caso delle forme differenziali reali la definizione si estende alle traiettorie di classe C^1 a tratti.

Definizione 25.3.17.3 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; allora l'integrale della forma differenziale complessa di variabile complessa $f\,dz$ su φ, $\int_\varphi f(z)\,dz$, si chiama anche integrale della funzione complessa di variabile complessa f su φ.*

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali di funzioni complesse di variabile complessa su traiettorie

1. $\int_\varphi \overline{z}\,dz$, dove $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow 2 + 3t + 3i + 4it$;
2. $\int_\varphi (\Re z + (\Im z)^2 i)\,dz$, dove $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow 2e^{it}$.

Risoluzione.

1. La traiettoria φ si scrive
$$z = 2 + 3t + 3i + 4it,\ t \in [0,1]\ .$$
Per ogni $t \in [0,1]$ si ha $z'(t) = 3 + 4i$.
Si ha
$$\int_\varphi \overline{z}\, dz = \int_0^1 (2 + 3t - 3i - 4it)(3 + 4i)\, dt = (3 + 4i)\int_0^1 (2 + 3t - 3i - 4it)\, dt =$$
$$(3 + 4i)\left[2t + \frac{3}{2}t^2 - 3i - 2it^2\right]_0^1 - (3 + 4i)(2 + \frac{3}{2} - 3i - 2i) = (3 + 4i)(\frac{7}{2} - 5i) =$$
$$\frac{21}{2} - 15i + 14i + 20 = \frac{61}{2} - i\ .$$

2. La traiettoria φ si scrive
$$z = e^{it},\ t \in [0,\pi]\ .$$
Per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha $z'(t) = ie^{it}$.
Per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha $e^{it} = \cos t + i \sin t$.
Si ha quindi
$$\int_\varphi (\Re z + (\Im z)^2 i)\, dz = \int_0^\pi (\cos t + i \sin^2 t) i (\cos t + i \sin t)\, dt =$$
$$i \int_0^\pi (\cos^2 t + i \sin t \cos t + i \sin^2 t \cos t - \sin^3 t)\, dt =$$
$$i \left(\int_0^\pi \cos^2 t\, dt + i \int_0^\pi \sin t \cos t\, dt + i \int_0^\pi \sin^2 t \cos t - \int_0^\pi \sin^3 t\, dt\right) =$$
$$i \left(\int_0^\pi \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt + i \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi + i \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \sin t\, dt\right) =$$
$$i \left(\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\, dt - \int_0^\pi \cos^2 t(-\sin t)\, dt\right) =$$
$$i \left(\frac{\pi}{2} - [-\cos t]_0^\pi - \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3\pi - 8}{6} i\ .$$

Teorema 25.3.17.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A\omega \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha*
$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_\varphi f\, dx + if\, dy\ .$$

Dimostrazione. Immediata.

In altri termini l'integrale della forma differenziale complessa di variabile complessa $f\, dz$ è uguale all'integrale della forma differenziale complessa di variabile reale $f\, dx + if\, dy$.

Teorema 25.3.17.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; considerando $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$, sia $u = f_1$ e $v = f_2$; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha*
$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_\varphi (u\, dx - v\, dy) + i \int_\varphi (v\, dx + u\, dy)\ .$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $f\,dx + if\,dy$.

L'integrale di una forma differenziale complessa di variabile complessa è quindi ricondotto a due integrali di forme differenziali reali di variabili reali.

25.3.18 Integrale del differenziale

Come nel caso delle forme differenziali reali, vale il seguente risultato.

Teorema 25.3.18.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha*

$$\int_\varphi df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo φ di classe C^1.
Si ha

$$\int_\varphi df = \int_\varphi f'(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [f(\varphi(t))]_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \ .$$

Se φ è di classe C^1 a tratti si procede sommando gli integrali sui tratti di classe C^1

Possiamo anche scrivere

$$\int_\varphi f'(z)\,dz = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \ .$$

Esercizio. Calcolare il seguente integrale su traiettoria di funzione complessa di variabile complessa:

$$\int_\varphi z^3\,dz \ ,$$

dove $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \sqrt{1 + 3t^2} + it^4$.
Risoluzione. Sia

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z^4}{4} \ ;$$

La funzione f è una primitiva di z^3.
Il punto iniziale di φ è $\varphi(0) = 1$; il punto finale di φ è $\varphi(1) = 2 + i$.
Si ha quindi

$$\int_\varphi z^3\,dz = f(2 + i) - f(1) = \frac{(2 + i)^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24i - 7}{4} - \frac{1}{4} = 6i - 2 \ ,$$

25.3.19 Forme differenziali esatte e integrali su traiettorie

Come nel caso delle forme differenziali reali, vale il seguente teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.

Teorema 25.3.19.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}_C(\mathbf{C};\mathbf{C})$ una forma differenziale lineare complessa di variabile complessa; sia ω continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *ω esatta;*
2. *per ogni φ, ψ traiettorie in A di classe C^1 a tratti aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale si ha*
$$\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega \; ;$$
3. *per ogni φ traiettoria in A di classe C^1 a tratti chiusa si ha*
$$\int_\varphi \omega = 0 \; .$$

Per ogni componente connessa di B di A sia $a_B \in B$; allora se ω è esatta, una primitiva di ω è la funzione $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che per ogni componente connessa B di A e per ogni $x \in B$ si ha
$$g(x) = \int_\varphi \omega$$
dove φ è una traiettoria in B di classe C^1 a tratti di punto iniziale a_B e di punto finale x.

Il teorema sopra può essere rivisto come teorema sulla primitiva di una funzione complessa di variabile complessa.

Teorema 25.3.19.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione complessa di variabile complessa; sia f continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f ammette primitiva;*
2. *per ogni φ, ψ traiettorie in A di classe C^1 a tratti aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale si ha*
$$\int_\varphi f\,dz = \int_\psi f\,dz \; ;$$
3. *per ogni φ traiettoria in A di classe C^1 a tratti chiusa si ha*
$$\int_\varphi f\,dz = 0 \; .$$

Per ogni componente connessa di B di A sia $a_B \in B$; allora se ω è esatta, una primitiva di ω è la funzione $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che per ogni componente connessa B di A e per ogni $x \in B$ si ha

$$g(x) = \int_\varphi f\,dz$$

dove φ è una traiettoria in B di classe C^1 a tratti di punto iniziale a_B e di punto finale x.

Il teorema sopra permette di provare che la funzione $\frac{1}{z}$ non ammette primitiva.

Teorema 25.3.19.3 *La funzione*

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z}$$

non ammette primitiva su $\mathbf{C}^*$.

Dimostrazione. Sia

$$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{it}\ ;.$$

Si ha $e^{it} = \cos t + i \sin t$; quindi $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$.
Quindi φ è una traiettoria chiusa.
Si ha poi
$\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0.$
Quindi f non ammette primitiva.

25.3.20 Esistenza della primitiva

Teorema 25.3.20.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia A a omologia nulla; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; allora la forma differenziale complessa di variabile complessa $f\,dz$ è esatta.*

Dimostrazione. Infatti la forma differenziale complessa di variabile reale $f\,dx + if\,dy$ è chiusa; essendo il dominio a omologia nulla, per il teorema di sulle forme differenziali complesse di variabili reali $f\,dx + if\,dy$ è esatta; quindi $f\,dz$ è esatta.

Il teorema sopra può essere rivisto come teorema sulla primitiva di una funzione complessa di variabile complessa.

Teorema 25.3.20.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia A a omologia nulla; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; allora f ammette primitiva.*

Osservazione 25.3.20.1 L'ipotesi su A di essere a omologia nulla equivale in $\mathbf{C}$ A a omotopia nulla; inoltre comprende come caso particolare A stellato.

25.3.21 Primitiva di una funzione complessa su un aperto privato di un punto

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia A a omologia nulla; sia $a \in A$; sia $f : A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $r > 0$. sia $\mathrm{B}'(a; r) \subset A$; sia

$$\varphi : [0.2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (r \cos t, r \sin t) \; ;$$

allora f ammette primitiva se e solo se

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 \; .$$

Infatti da ciò segue che l'integrale di ω su ogni ciclo di classe C^1 è uguale a 0.
Il risultato si estende ad A privato di un numero finito di punti.

25.3.22 Locale esattezza di una forma differenziale complessa di variabile complessa

Teorema 25.3.22.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A$; allora esiste $U \subset A$, U aperto tale che $a \in U$, $U \subset A$ e ω è esatta su U.*

Dimostrazione. Se U è una palla di centro a contenuta in A, U è stellato; quindi ω è esatta su U.

Si esprime la proprietà del teorema dicendo che la forma differenziale complessa di variabile complessa $f\,dz$ (con f derivabile e f' continua) è localmente esatta.
Il teorema sopra può essere rivisto come teorema sulla primitiva di una funzione complessa di variabile complessa.

Teorema 25.3.22.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A$; allora esiste $U \subset A$, U aperto tale che $a \in U$, $U \subset A$ e $f|U$ ammette primitiva.*

Si esprime la proprietà del teorema dicendo che una funzione f derivabile con f' continua ammette localmente primitiva o anche che è localmente esatta.

Osservazione 25.3.22.1 Il fatto che una funzione complessa di variabile complessa possa ammettere localmente primitiva senza ammettere globalmente primitiva può provocare uno certo stupore, tenendo conto del fatto che una funzione reale di variabile reale che localmente ammetta primitiva, ammette globalmente primitiva.
La differenza sta nel fatto che in $\mathbf{R}$ l'intersezione di due intervalli è un intervallo; da ciò segue che se su ciascun intervallo esiste una primitiva di una funzione, le due primitive sull'intersezione dei due intervalli differiscono per una costante; da ciò segue subito che esiste una primitiva anche sull'unione dei due intervalli; in $\mathbf{C}$ invece l'intersezione di due connessi non è in generale un connesso; il ragionamento sopra dunque non può essere ripetuto.

Osservazione 25.3.22.2 Sia $f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}$, $z \longrightarrow \frac{1}{z}$; si è visto sopra che f non ammette primitiva; essendo però f derivabile, con derivata continua, f ammette localmente primitiva; più precisamente f ammette primitiva su ogni aperto stellato contenuto in $\mathbf{C}^*$; di fatto se A è l'aperto $\mathbf{C}^*$ tagliato, abbiamo visto che su A si ha $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$; quindi $\log z$ è una primitiva di f su A; ciò è in accordo con la teoria svolta in quanto la relazione $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ non vale su $\mathbf{C}^*$, ma su A e A è un aperto stellato.

25.3.23 Invarianza per omotopia di traiettorie chiuse dell'integrale di una forma differenziale complessa $f(z)\,dz$ su traiettorie chiuse

L'integrale della forma differenziale complessa $f(z)\,dz$ su traiettorie chiuse non cambia se le traiettorie chiuse sono omotope, con omotopia di traiettorie chiuse.

Teorema 25.3.23.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A chiusa di classe C^1 a tratti; siano $c, d \in \mathbf{R}$; sia $c < d$; sia $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A chiusa di classe C^1 a tratti; φ sia omotopa a ψ come traiettoria chiusa; allora si ha*

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_\psi f(z)\,dz \; .$$

Dimostrazione. Ci si riconduce infatti al caso di integrali di una forma differenziale complessa di variabili reali chiusa.

L'integrale della forma complessa di variabile complessa $f(z)\,dz$ su una traiettoria chiusa omotopa a 0 è 0.

Teorema 25.3.23.2 (Teorema di Cauchy per le traiettorie chiuse omotope a 0.) *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A chiusa di classe C^1 a tratti; sia φ una traiettoria chiusa; sia φ omotopa a 0 in A; allora si ha*

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0 \; .$$

Dimostrazione. Infatti a $f(z)\,dz$ è associata una forma differenziale chiusa, con uguale integrale su traiettorie.

Osservazione 25.3.23.1 Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow P$$

una traiettoria di classe C^1 a tratti chiusa; allora sono due i casi notevoli per i quali

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0 \; ;$$

precisamente

1. f ammette primitiva;
2. φ omotopa a 0.

25.3.24 Integrale su catene di traiettorie

Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\mathcal{C}$ una catena in A; sia $\mathcal{C}$ di classe C^1.
Sia

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \; ;$$

Sia $\omega : A \longrightarrow L(\mathbf{C}; \mathbf{C})$ una forma differenziale su A; sia ω continua.
Si pone

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\varphi_i} \omega \; .$$

Se $\omega = f\,dz$ tale integrale si chiama anche integrale di f su $\mathcal{C}$.

Teorema 25.3.24.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; allora f ammette primitiva se e solo se $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$ per ogni $\mathcal{C}$ ciclo di classe C^1 in A.*

Dimostrazione. Segue da sopra.

25.3.25 Invarianza per omologia dell'integrale su cicli

Teorema 25.3.25.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f di classe C^1; siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cicli in A di classe C^1; sia $\mathcal{C}_1$ omologo a $\mathcal{C}_2$; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,dz \; .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema corrispondente per le forme differenziali reali di variabile reale.

Teorema 25.3.25.2 Teorema di Cauchy per i cicli omologhi a 0 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f di classe C^1; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ omologo a 0; sia $\mathcal{C}$ di classe C^1 a tratti; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0 \; .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema corrispondente per le forme differenziali reali di variabile reale.

Osservazione 25.3.25.1 Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $\mathcal{C}$ un ciclo di classe C^1; allora sono due i casi notevoli per i quali

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0 \; ;$$

precisamente

1. f ammette primitiva;
2. $\mathcal{C}$ omologo a 0.

25.3.26 Generalizzazione alle traiettorie di classe lipschitziana

Una traiettoria $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ si dice di classe lipschitziana se φ è localmente lipschitziana.
In quanto svolto è possibile sostituire la condizione di classe C^1 o classe C^1 a tratti per le traiettorie e per le catene, con la condizione di localmente lipschitziane.

25.3.27 Integrale su una curva orientata di una forma differenziale complessa di variabile complessa

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia Γ una sottovarietà di $\mathbf{R}^N$ di dimensione 1 lipschitziana, con bordo orientata contenuta in A; sia $M \subset \Gamma$; sia M misurabile rispetto a Γ.
Analogamente a quanto svolto per l'integrale $\int_M \omega_R$ di una forma differenziale lineare ω_R reale di variabili reali integrabile definita su A, si procede per una forma differenziale lineare ω complessa di variabili reali integrabile definita su A; si dà dunque la nozione di ω integrabile su M (supponendo dapprima Γ parametrizzabile) e per ω integrabile su M si definisce $\int_M \omega$.
Supposta ω integrabile su M si ha $\int_M \omega \in \mathbf{C}$.
Supposta ω integrabile su M, $\Re\omega$ e $\Im\Omega$ sono forme differenziali reali di variabile reale integrabili su M e si ha

$$\int_M \omega = \int_M \Re\omega + i \int_M \Im\omega \; .$$

In ciò che segue si definisce $\int_M f(z)\,dz$ l'integrale su M con $M \subset \Gamma \subset \mathbf{C}$ della forma differenziale complessa di variabile complessa $f(z)\,dz$.

Definizione 25.3.27.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{C};\mathbf{C})$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata a ω; sia V una sottovarietà differenziale di $\mathbf{C}$ di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $V \subset A$; sia D un aperto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{C}$ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; si dice che ω è 1-misurabile su M se*

$$P \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

è misurabile.

La forma differenziale complessa di variabile complessa ω è 1-misurabile se e solo se la forma differenziale complessa di variabile reale $f\,dx + if\,dy$ è 1-misurabile e se e solo se le forme differenziali reali di variabile reale $\Re(f\,dx + if\,dy)$ e $\Im(f\,dx + if\,dy)$ sono 1-misurabili su M.

Definizione 25.3.27.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{C};\mathbf{C})$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata a ω; sia V una sottovarietà differenziale di $\mathbf{C}$ di dimensione 1* *parametrizzabile orientata; sia $V \subset A$; sia D un aperto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{C}$ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; sia ω 1-misurabile su M; si dice che ω è 1-integrabile su M se*

$$P \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

è integrabile.

La forma differenziale complessa di variabile complessa ω è 1-integrabile se e solo se la forma differenziale complessa di variabile reale $f\,dx + if\,dy$ è 1-integrabile e se e solo se le forme differenziali reali di variabile reale $\Re(f\,dx + if\,dy)$ e $\Im(f\,dx + if\,dy)$ sono 1-integrabili su M.

Definizione 25.3.27.3 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{C};\mathbf{C})$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione associata a ω; sia V una sottovarietà differenziale di $\mathbf{C}$ di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $V \subset A$; sia D un aperto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{C}$ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; sia ω 1-misurabile su M sia ω 1-integrabile su M poniamo*

$$\int_M f(z)\,dz = \int_P f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ .$$

Si ha

$$\int_M f(z)\,dz = \int_M (f\,dx + if\,dy) = \int_M \Re(f\,dx + if\,dy) + i\int_M \Im(f\,dx + if\,dy)\ .$$

$\int_M f(z)\,dz$ è quindi ricondotto all'integrale di una forma differenziale complessa di variabile reale o a due integrali di forme differenziali reali di variabile reale.
Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{C};\mathbf{C})$; sia V una sottovarietà lipschitziana di $\mathbf{C}$ di dimensione 1 con bordo orientata (non necessariamente parametrizzabile); sia $V \subset A$. Analogamente a quanto fatto per gli integrali di m-forme differenziali, si dà la definizione di ω misurabile su un sottoinsieme misurabile M di V, di ω integrabile su M e di integrale di ω su M.
Quanto visto per V parametrizzabile si estende a questo caso.
L'integrale $\int_M f(z)\,dz$ di $f(z)\,dz$ su M si chiama anche integrale di $f(z)$ su M.

Esercizio. Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale complessa

$$\int_\Gamma \overline{z}^2\,dz\ ,$$

dove Γ è il segmento $[1-i, i]$ orientato in modo che $1-i$ sia il punto iniziale e i il punto finale.
Risoluzione. Per ogni $t \in [0,1]$ si ha $1 - i + t(i - (1-i) = 1 - i + t(-1+2i)$.
Una parametrizzazione di Γ è data dalla funzione *varphi* definita da

$$z = 1 - i + t(-1+2i),\ t \in [0,1]\ .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma \overline{z}^2\,dz = \int_0^1 (1 + i + t(-1-2i))^2(-1+2i)\,dt = (-1+2i)\int_0^1 (1 + i - t - 2it)^2\,dt =$$

$$(-1+2i)\int_0^1 (1-1+t^2-4t^2+2i-2t-4it-2it+4t+4it^2)\,dt =$$
$$(-1+2i)\int_0^1 (-3t^2+2i+2t-4it-2it+4it^2)\,dt =$$
$$(-1+2i)\left[-t^3+2it+t^2-2it^2-it^2+\frac{4}{3}it^3\right]_0^1 = (-1+2i)(-1+2i+1-2i-i+\frac{4}{3}i) =$$
$$(-1+2i)\frac{1}{3}i = -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\,.$$

Il teorema di Stokes applicato a integrali di forme differenziali complesse di variabile complessa da luogo ai seguenti risultati.

Teorema 25.3.27.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia Γ una arco semplice lipschitziano orientato di punto iniziale A e punto finale B; sia $\Gamma \subset A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; allora si ha*

$$\int_\Gamma df = f(B) - f(A)\,.$$

Teorema 25.3.27.2 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia Γ una curva semplice chiusa lipschitziana orientata; sia $\Gamma \subset A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; allora si ha*

$$\int_\Gamma df = 0\,.$$

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di funzioni complesse di variabile complessa.

1. $\int_\Gamma z^2\,dz$, dove Γ è l'arco semplice orientato
$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1,\ \Im z \geq 0\}$$
con orientazione tale che 1 sia il punto iniziale e -1 il punto finale.
2. $\int_\Gamma \sin z\,dz$, dove Γ è la circonferenza
$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$$
con orientazione tale che $\vec{t}(1) = \mathbf{e}_2$.

Risoluzione.

1. Posto
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z^3}{3}\,,$$
f è una primitiva di z^2.
Per il teorema sopra si ha quindi
$$\int_\Gamma z^2\,dz = f(-1) - f(1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\,.$$
2. Posto
$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow -\cos z\,,$$
f è una primitiva di $\sin z$.
Per il teorema sopra si ha quindi
$$\int_\Gamma \sin z\,dz = \int_\Gamma df = 0\,.$$

25.3.28 Catena associata ad una sottovarietà con bordo orientata compatta

Catene di traiettorie associate ad una curva con bordo orientata compatta. Sia $\Gamma \subset \mathbf{R}^N$; sia Γ una sottovarietà topologica di dimensione 1 con bordo; sia V orientata; sia V compatta; allora esiste $n \in \mathbf{N}$, esiste $(\varphi_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ successione di parametrizzazioni di dimensione m in $\mathbf{R}^N$, tali che

1. $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{cod}(\varphi_i) = \Gamma$;
2. $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$ la funzione
$$\mathrm{dom}(\varphi_i) \longrightarrow \mathrm{cod}(\varphi_i), t \longrightarrow \varphi_i(t)$$
omeomorfismo concorde con l'orientazione di Γ;
3. $(\forall i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j)$ $\mathrm{cod}(\varphi_i) \cap \mathrm{cod}(\varphi_j)$ è contenuto nell'intersezione dell'insieme degli estremi di φ_i e dell'insieme degli estremi di φ_j.

Intuitivamente, si è diviso Γ in un numero finito di archi semplici e si è parametrizzato ciascun arco semplice in modo concorde con l'orientazione di Γ.
La catene di traiettorie,
$$\sum_{i=1}^n \varphi_i$$
si dice associata a V.
La classe di catene di traiettorie $\left[\sum_{i=1}^n \varphi_i\right]$ non dipende dalla particolare $(\varphi_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ successione di traiettorie che parametrizza Γ.
Ciclo associato ad una curva con bordo orientata compatta chiusa. Sia $\sum_{i=1}^n$ una catena di traiettorie associata a Γ; la curva Γ è una sottovarietà con bordo chiusa se e solo se $\sum_{i=1}^n \varphi_i$ è un ciclo.
In tal caso si dice che $\sum_{i-1}^n \varphi_i$ è un ciclo associato a Γ.
Catene di parametrizzazioni di dimensione 2 associate ad una superficie con bordo orientata compatta. Sia $S \subset \mathbf{R}^N$; sia S una sottovarietà topologica di dimensione 2 con bordo; sia S orientabile orientata; sia V compatta; allora esiste $n \in \mathbf{N}$, esiste $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ successione di parametrizzazioni di dimensione m in $\mathbf{R}^N$, tali che

1. $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{cod}(\alpha_i) = S$;
2. $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$ la funzione
$$\mathrm{dom}(\alpha_i) \longrightarrow \mathrm{cod}(\alpha_i), t \longrightarrow \varphi_i(t)$$
omeomorfismo concorde con l'orientazione di S;
3. $(\forall i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j)$ $\mathrm{cod}(\alpha_i) \cap \mathrm{cod}(\alpha_j)$ è contenuto nell'intersezione del sostegno di $\partial\alpha_i$ e del sostegno di $\partial\alpha_j$.

Intuitivamente, si è diviso S in un numero finito di superfici semplici semplici (superfici omeomorfe ad un cerchio chiuso) e si è parametrizzato ciascuna superficie semplice in modo concorde con l'orientazione di S.
La catena di parametrizzazioni di dimensione 2
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i$$
si dice associata a S.
La classe di catene di parametrizzazioni di dimensione 2, $\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\right]$ non dipende dalla particolare $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ successione di parametrizzazioni di dimensione 2 che parametrizza S.
Classe di parametrizzazioni di dimensione 2 associata a S e classe di traiettorie associata a ∂S. Se $[\sum_{i=1}^n \alpha_i]$ è la classe di catene di parametrizzazioni di dimensione 2 associata a S; e se $[\sum_{i=1}^m \varphi_i]$ è la classe di catene di traiettorie associata a ∂S, allora si ha
$$\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\right] = \partial \left[\sum_{i=1}^m \varphi_i\right] .$$

Integrale di una forma differenziale su Γ e integrale su $\sum_{i=1}^n \varphi_i$. Supponiamo la curva Γ di classe lipschitziana, allora esiste $\sum_{i=1}^n$ di traiettorie associata a Γ tale che φ_i localmente lipschitziana, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.
In tal caso, se A è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^N$ se $\Gamma \subset A$, e se ω è una forma differenziale su A continua, si ha

$$\int_V \omega = \int_{\sum_{i=1}^n \varphi_i} \omega \; .$$

Curva chiusa orientata compatta omologa a 0 in un insieme. Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\Gamma \subset A$; sia Γ una sottovarietà topologica di dimensione 1 con bordo; sia Γ orientata; sia Γ compatta; sia Γ una sottovarieà con bordo chiusa (cioè $\partial\Gamma = \emptyset$); si dice che Γ è omologa a 0 in A se esiste ia $S \subset A$, S sottovarietà topologica di dimensione 2 con bordo orientabile orientata, compatta tale che $\partial S = \Gamma$.
Curva chiusa orientata compatta omologa a 0 e catena di traiettorie associata. Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $\Gamma \subset A$; sia Γ una sottovarietà topologica di dimensione 1 con bordo; sia Γ orientata; sia Γ compatta; sia Γ una sottovarieà con bordo chiusa (cioè $\partial\Gamma = \emptyset$); sia $\sum_{i=1}^n \varphi_i$ un ciclo associato a Γ; allora V è omologa a 0 in A se e solo se il ciclo $\sum_{i=1}^n \varphi_i$ è omologa a 0 in A.
Integrale di forme differenziali chiuse su curve chiuse omologhe a 0 Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; sia $\Gamma \subset A$; sia Γ una sottovarietà lipschitziana di dimensione 1 con bordo; sia Γ orientabile orientata; sia Γ compatta; sia Γ una sottovarieà con bordo chiusa (cioè $\partial\Gamma = \emptyset$); sia Γ omologa a 0 in A; allora si ha

$$\int_\Gamma \omega = 0 \; .$$

Infatti se $\sum_{i=1}^n \varphi_i$ un ciclo di classe lipschitziana associato a Γ si ha

$$\int_V \omega = \int_{\sum_{i=1}^n \varphi_i} \omega = 0$$

in quanto $\sum_{i=1}^n \varphi_i$ è un ciclo omologo a 0 in A e ω è chiusa.

25.3.29 Teorema di Cauchy per il bordo di domini

Ricordiamo che un dominio di $\mathbf{R}^2$ è una sottovarietà topologica con bordo di dimensione 2.

Teorema 25.3.29.1 Teorema di Cauchy per il bordo di domini. *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f di classe C^1; sia $D \subset A$; sia D un dominio; sia ∂D di classe lipschitziana; allora si ha*

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0 \; .$$

Dimostrazione. Infatti ∂D è una curva chiusa compatta orientata omologa a 0.

25.4 Indice di un punto

25.4.1 Indice di un punto rispetto ad una traiettoria chiusa

Definizione 25.4.1.1 *Sia $a \in \mathbf{C}$; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; allora l-insieme*

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}; \|z - a\| = r\} \; ;$$

si chiama circonferenza di centro a e raggio r.

L'insieme γ è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{C}$ di dimensione 1.
La parametrizzazione di $\gamma-\{a+r\}$

$$\varphi_1 :]0, 2\pi[\longrightarrow \gamma-\{1\}, t \longrightarrow a + re^{it}$$

e la parametrizzazione di $\gamma-\{a-r\}$

$$\varphi_2 :] - \pi, \pi[\longrightarrow \gamma-\{a-r\}, t \longrightarrow a + re^{it} \ ;$$

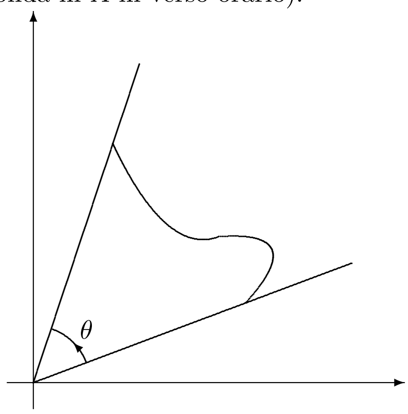
definiscono su $\gamma-\{a+r, a-r\}$ la stessa orientazione; si chiama orientazione canonica (o orientazione antioraria) di γ l'orientazione definita da (φ_1, φ_2).
Introduciamo la nozione di indice di un punto rispetto ad una traiettoria chiusa attraverso alcuni punti.

1. Sia A l'aperto di $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$ tagliato; abbiamo visto che su A la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ ammette primitiva e che una primitiva di f è la funzione $g(z) = \log z$.

   Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1 a tratti di sostegno contenuto in A.

   Si ha allora
   $\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = \log(\varphi(b)) - \log(\varphi(a)) =$
   $\log|\varphi(b)| + i\,\mathrm{Am}(\varphi(b)) - (\log|\varphi(a)| + i\,\mathrm{Am}(\varphi(a)) = \log\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right| + i(\mathrm{Am}(\varphi(b)) - \mathrm{Am}(\varphi(a)))$.

   La differenza $\mathrm{Am}(\varphi(b)) - \mathrm{Am}(\varphi(a))$ può essere vista come la misura con segno dell'angolo θ fra la semiretta di origine 0 e passante per $\varphi(a)$ e la la semiretta di origine 0 e passante per $\varphi(b)$ (misura positiva se la prima semiretta si sovrappone alla seconda in A in verso antiorario, negativa se la prima semiretta si sovrappone alla seconda in A in verso orario).

   Si ha quindi

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = \log\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right| + i\theta \ .$$

2. Nel punto sopra si considera come dominio della funzione $\frac{1}{z}$ l'aperto di $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{C}^*$ tagliato, cioè $\mathbf{C}^*$ meno il semiasse reale negativo.

   Nella conclusione a cui siamo giunti niente si riferisce alla particolare semiretta tolta a $\mathbf{C}^*$; si intuisce così che la conclusione del discorso è ancora valida se si considera come dominio della funzione una aperto A di $\mathbf{C}^*$ ottenuto da $\mathbf{C}^*$ togliendo a $\mathbf{C}^*$ una qualunque semiretta di origine 0.

   Si ottiene dunque il seguente risultato.

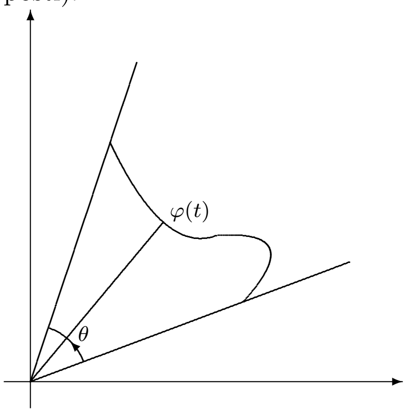
   Sia r una semiretta di $\mathbf{C}$ di origine 0; sia $A = \mathbf{C}^* - r$;

   Sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1 a tratti di sostegno contenuto in A; sia θ la misura con segno dell'angolo fra la semiretta di origine 0 e passante per $\varphi(a)$ e la la semiretta di origine 0 e passante per $\varphi(b)$ (misura positiva se la prima semiretta si sovrappone alla seconda in A in verso antiorario, negativa se la prima semiretta si sovrappone alla seconda in A in verso orario); allora si ha

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = \log \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \right| + i\theta \, .$$

3. Diamo un'altra interpretazione dell'angolo θ utilizzato sopra e definito a partire dai punti $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ tenendo conto dell'insieme A; nella interpretazione di θ che stiamo per dare teniamo conto invece che di A della traiettoria φ inclusa in A.

   Come sopra sia r una semiretta di $\mathbf{C}$ di origine 0, $A = \mathbf{C}^* - r$ e $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1 a tratti di sostegno contenuto in A; consideriamo la semiretta di origine 0 e passante per $\varphi(t)$; tenendo conto che il sostegno φ è incluso in A, possiamo anche dire (a livello geometrico-intuitivo) che θ è misura dell'angolo descritto dalla semiretta $0\varphi(t)$ quando t si muove da a a b (con la convenzione di non tenere conto di regioni percorse due volte in versi di rotazione opposti).

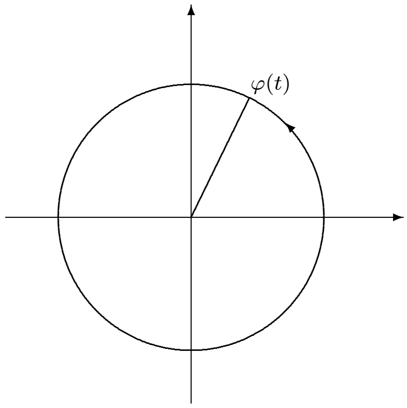


4. L'interpretazione di θ come misura dell'angolo descritto dalla semiretta $0\varphi(t)$ prescinde dal fatto che A sia $\mathbf{C}^* - r$; di fatto il risultato è ancora vero per $A = \mathbf{C}^*$, come si intuisce applicando la proprietà di additività dell'integrale. Dunque:

   Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1 a tratti di sostegno contenuto in $\mathbf{C}^*$ (cioè non contenente 0; sia θ è misura dell'angolo descritto dalla semiretta $0\varphi(t)$ quando t si muove da a a b; allora si ha

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = \log \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \right| + i\theta \, .$$

   Dicevamo che tale formula si ottiene da quella su $\mathbf{C}^* - r$ per additività; questo comporta che nella misura θ dell'angolo descritto dalla semiretta $0\varphi(t)$ vi sia incluso anche il numero di volte in cui tale semiretta gira attorno all'origine: ogni giro in senso antiorario porta una variazione della misura θ di 2π, ogni giro in senso orario, una variazione della misura θ di -2π. Se ad esempio $\varphi : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbf{C}$, $t \longrightarrow e^{it}$ è la circonferenza unitaria di centro 0, con punto iniziale 1 e percorsa una volta e mezzo in senso antiorario, si ha $\theta = 3\pi$.



5. Supponiamo ora la traiettoria φ chiusa, cioè che sia $\varphi(a) = \varphi(b)$; in queste ipotesi θ è uguale a $k(2\pi)$, dove k è uguale al numero di volte in cui la semiretta $0\varphi(t)$ gira attorno all'origine, considerando positivi i giri compiuti in senso antiorario e negativi i giri compiuti in senso orario, tenendo conto che $\log \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \right| = \log 1 = 0$, la formula sopra diventa quindi

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = 2k\pi i \; ;$$

   si ha quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = k \; ;$$

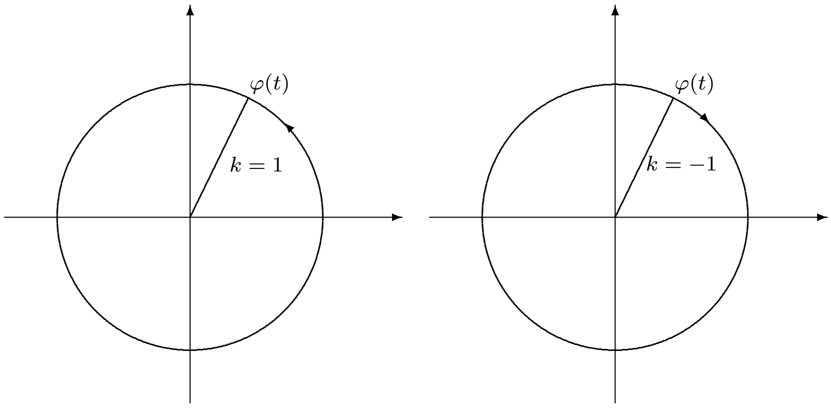
   con $k \in \mathbf{Z}$, uguale uguale al numero di volte in cui la semiretta $0\varphi(t)$ gira attorno all'origine.

Ad esempio se $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow e^{it}$, (circonferenza unitaria di centro 0, con punto iniziale 1 e percorsa una volta in senso antiorario), si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = 1 \, .$$

Ad esempio se $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow e^{-it}$, (circonferenza unitaria di centro 0, con punto iniziale 1 e percorsa una volta in senso orario), si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z}\, dz = -1 \, .$$



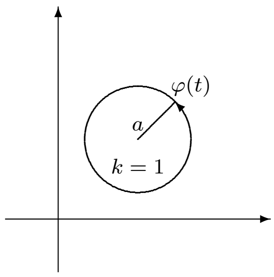
6. Sostituiamo il punto 0 con un punto $z_0 \in \mathbf{C}$ qualunque; sia dunque $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1 a tratti chiusa di sostegno contenuto in $\mathbf{C} - \{z_0\}$; agendo per traslazione, sostituendo cioè z con $z - z_0$ si trova

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - z_0}\, dz = k \; ;$$

con $k \in \mathbf{Z}$, uguale uguale al numero di volte in cui la semiretta $z_0\varphi(t)$ gira attorno al punto z_0.

Ad esempio se $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow 3 + i + 2e^{it}$, (circonferenza di raggio 2 di centro $3 + 3i$, con punto iniziale $5 + 3i$ e percorsa una volta in senso antiorario), si ha

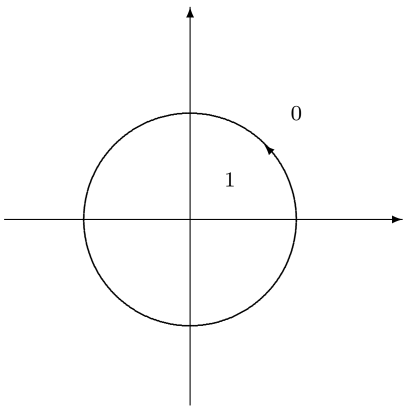
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - (3 + 3i)}\, dz = 1 \, .$$



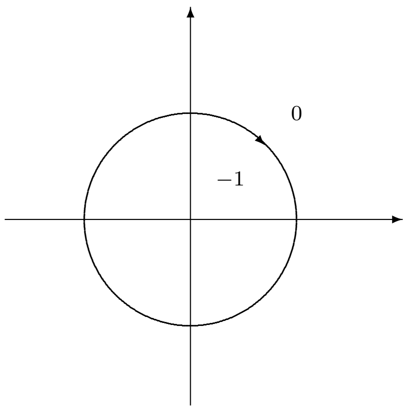
7. Cambiamo il punto di vista: invece di considerare prima il punto a e successivamente la traiettoria φ il cui sostegno non contiene a, consideriamo dapprima la traiettoria φ e successivamente i punti $a \in C$ non appartenenti al sostegno di φ; chiamiamo indice di z_0 rispetto a φ il numero di volte in cui la semiretta $z_0\varphi(t))$ gira attorno a z_0; si indica $j(z_0, \varphi)$; si ha dunque
$$j(z_0, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - z_0}\, dz \,.$$

8. L'insieme $\mathbf{C} - \varphi([a, b])$ risulta aperto; le sue componenti connesse sono aperti; se C è una di queste componenti connesse e se a appartiene a $\mathbf{C}$, l'indice di a rispetto a φ, $j(z_0, \varphi)$, è costante al variare di $z_0 \in C$.

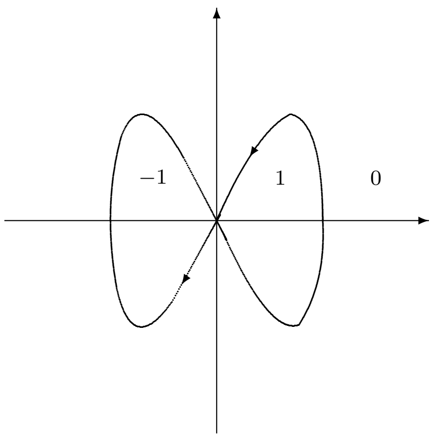
   Fra le componenti connesse ve ne è una e solo una non limitata; per z_0 appartenente a tale componente si ha $j(z_0, \varphi) = 0$.



$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{it}$



$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-it}$



$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \cos t + i \sin(2t)$

L'introduzione sopra rende naturale il seguente teorema.

Teorema 25.4.1.1 *Sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe C^1; sia φ una traiettoria chiusa; sia $z_0 \in \mathbf{C} - \varphi([a,b])$; allora si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-z_0}\,dz \in \mathbf{Z}\ .$$

Dimostrazione. Sia

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \int_a^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)-z_0}\,ds\ .$$

Per ogni $t \in [a,b]$ h è derivabile in t e si ha

$$h'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-z_0}\ .$$

Sia

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-h(t)}(\varphi(t)-z_0)\ .$$

Per ogni $t \in [a,b]$ g è derivabile in t e si ha
$g'(t) = e^{-h(t)}(-h'(t))(\varphi(t)-z_0) + e^{-h(t)}\varphi'(t) =$
$e^{-h(t)}((-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-z_0})(\varphi(t)-z_0)+\varphi'(t)) = e^{-h(t)}((-\frac{\varphi'(t)}{+}\varphi'(t)) = 0.$
Quindi esiste $c \in \mathbf{C}$ tale che per ogni $t \in [a,b]$ $g(t) = c$; per ogni $t \in [a,b]$ si ha quindi $g(t) = g(a)$, cioè $e^{-h(t)}(\varphi(t)-z_0) = \varphi(a)-z_0$, cioè $e^{h(t)} = \frac{\varphi(t)-z_0}{\varphi(a)-z_0}$; per $t = b$ si ha quindi $e^{h(b)} = 1$; per il teorema sui logaritmi complessi, esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $h(b) = 2\pi k$; essendo $h(b) = \int_\varphi \frac{1}{z-z_0}\,dz$, si ottiene la tesi.

Osservazione 25.4.1.1 Il teorema si generalizza al caso di φ di classe lipschitziana.

Definizione 25.4.1.2 *Sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ una traiettoria complessa di classe lipschitziana; sa φ una traiettoria chiusa; sia $z_0 \in \mathbf{C} - \varphi([a,b])$; poniamo*

$$j(z_0,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-z_0}\,dz\ .$$

In numero intero $j(z_0,\varphi)$ si chiama indice di z_0 rispetto a φ.
Sia $A = \mathbf{C} - \varphi([a,b])$; sia

$$j : A \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow j(z,\varphi)\ ;$$

allora j è una funzione continua.
Dal ciò e dal fatto che j assume valori interi segue che j è costante su ogni componente connessa di A.

25.4.2 Indice di un punto rispetto ad un ciclo

Definizione 25.4.2.1 *Sia $\mathcal{C}$ un ciclo in $\mathbf{C}$; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; sia S il sostegno di $\mathcal{C}$; sia $z_0 \in \mathbf{C} - S$; poniamo*

$$j(z_0,\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-z_0}\,dz\ .$$

Sia $A = \mathbf{C} - S$; sia

$$j : A \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow j(z, \varphi) \; ;$$

allora j è una funzione continua.
j è costante su ogni componente connessa di A.

Teorema 25.4.2.1 *Sia $\mathcal{C}$ un ciclo in $\mathbf{C}$; sia S il sostegno di $\mathcal{C}$; sia $A = \mathbf{C} - S$; allora A ammette una ed una sola componente connessa non limitata.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che S è compatto.

Teorema 25.4.2.2 *Sia $\mathcal{C}$ un ciclo in $\mathbf{C}$; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; sia S il sostegno di $\mathcal{C}$; sia $A = \mathbf{C} - S$; sia C la componente connessa non limitata di A; allora per ogni $z_0 \in C$ si ha $j(z_0, \mathcal{C}) = 0$.*

Enunciato

25.4.3 Cicli omologhi a 0 e indice

Teorema 25.4.3.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; allora $\mathcal{C}$ è omologo a 0 in A se e solo se*

$$(\forall z_0 \in \mathbf{C} - A) \; j(z_0, \mathcal{C}) = 0 \; .$$

Enunciato

25.5 Formula integrale di Cauchy

25.5.1 Formula integrale di Cauchy per i cicli omologhi a 0

Teorema 25.5.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $B'(a, r) \subset A$; sia*

$$\varphi : [0.2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + re^{it} \; ;$$

sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; allora si ha

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z - a} \, dz = 2\pi i f(a) \; .$$

Dimostrazione. Per ogni $\rho \in]0, r]$ sia

$$\varphi_\rho : [0.2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + \rho e^{it} \; .$$

Si ha $\varphi_r = \varphi$.
Per ogni $\rho \in]0, r]$ la funzione

$$\alpha : [0, 2\pi] \times [\rho, r] \longrightarrow \mathbf{C}, (t, s) \longrightarrow a + se^{it}$$

è un'omotopia di curve chiuse in $A-\{a\}$ tale che per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\alpha(t, rho) = \varphi_\rho(t)$ e $\alpha(t, r) = \varphi_r(t) = \varphi(t)$.
Le traiettorie chiuse φ_ρ e φ sono quindi omotope in $A-\{a\}$.
Per il teorema sull'invarianza dell'integrale per omotopia applicato alla funzione

$$A-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{f(z)}{z-a}$$

si ha quindi

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{rho \to 0, \rho \in]0,r]} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_\varphi \frac{f(z)}{z-a}\, dz\ .$$

Per ogni $\rho \in]0, r]$ si ha

$$\int_{\varphi_r ho} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{a + \rho e^{it}}{a + \rho e^{it} - a} \rho i e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it})\, dt\ .$$

La funzione

$$g : [0, r] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, (\rho, t) \longrightarrow \mathbf{C}, (\rho, t) \longrightarrow f(a + \rho e^{it})$$

è continua.
Per una teorema sull-integrale di Riemann, la funzione

$$\varphi : [0, r] \longrightarrow \mathbf{C}, \rho \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it})\, dt$$

è continua.
Si ha quindi

$$\lim_{\rho \to 0, \rho \in]0,r]} \varphi(rho) = \varphi(0) = \int_0^{2\pi} f(a)\, dt = 2\pi f(a)\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{rho \to 0, \rho \in]0,r]} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \lim_{rho \to 0, \rho \in]0,r]} i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it})\, dt = 2\pi i f(a)\ .$$

Si ha quindi

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a)\ .$$

Teorema 25.5.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; sia $\mathcal{C}$ omologo a 0; sia S il sostegno di $\mathcal{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A-S$; allora si ha*

$$j(a; \mathcal{C}) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0\ .$$

Dimostrazione. Sia $r \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $\mathrm{B}'(a,r) \subset A - S$.
Sia

$$\varphi_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + re^{it} \ .$$

Sia

$$\mathcal{C}_r = \mathcal{C} - j(a, \mathcal{C})\varphi_r \ .$$

Per ogni $z \in \mathbf{C} - (A \cup \{a\})$ si ha $j(z, \mathcal{C}_r) = 0$; quindi $\mathcal{C}_r$ è omologa a 0 in $A - \{a\}$.
La funzione

$$g : A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{f(z)}{z - a}$$

è derivabile con derivata continua.
Per il teorema di Cauchy per i cicli omologhi a 0 si ha quindi

$$\int_{\mathcal{C}_r} g(z)\, dz = 0 \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{\mathcal{C}_r} g(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz - j(a, \mathcal{C}) \int_{\varphi_r} g(z)\, dz \ .$$

Quindi

$$\int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz - j(a, \mathcal{C}) \int_{\varphi_r} g(z)\, dz = 0 \ .$$

Quindi per il teorema sopra

$$\int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz = j(a, \mathcal{C}) \int_{\varphi_r} g(z)\, dz = j(a, \mathcal{C}) 2\pi i f(a) \ .$$

Da ciò la tesi.

25.5.2 Formula integrale di Cauchy per le traiettorie chiuse omotope a 0

Teorema 25.5.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A di classe lipschitziana; sia φ una traiettoria chiusa; sia φ omotopa a 0; sia $a \in A - \varphi([a, b])$; allora si ha*

$$j(a; \varphi) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - a}\, dz = 0 \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra in quanto una traiettoria chiusa omotopa a 0 si identifica con un ciclo e questo ciclo è omologo a 0

25.5.3 Formula integrale di Cauchy per il bordo di domini

Teorema 25.5.3.1 *Sia $D \subset \mathbf{C}$; sia D un dominio; sia D compatto; sia ∂D una curva lipschitziana; sia $\mathcal{C}$ catena di classe lipschitziana tale che $[\mathcal{C}]$ sia la classe associata a ∂D; allora si ha*

1. *$\mathcal{C}$ è un ciclo omologo a* 0
2. *per ogni $a \in \overset{\circ}{D}$*
$$j(a, \mathcal{C}) = 1 \; ;$$
3. *per ogni $a \in \mathbf{C} - D$*
$$j(a, \mathcal{C}) = 0 \; .$$

Enunciato

Teorema 25.5.3.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $D \subset \mathbf{C}$; sia D un dominio; sia D compatto; sia ∂D di classe lipschitziana; sia $D \subset A$; sia $a \in \overset{\circ}{D}$; allora si ha*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} \, dz \; .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ un ciclo associato a a ∂D.
Per il teorema sulla formula di Cauchy per i cicli omologhi a 0, si ha

$$j(a, \mathcal{C}) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} \, dz \; .$$

Da ciò segue subito la tesi.

25.5.4 Derivabilità di ogni ordine per una funzione complessa di variabile complessa derivabile con derivata continua

Teorema 25.5.4.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ f è derivabile n-volte su A.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$; sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}'(a, r) \subset A$.
Quindi $\mathrm{B}'(a, r)$ è un dominio regolare contenuto in A. Si ha $\mathrm{Int}\,(\mathrm{B}'(a, r)) = \mathrm{B}(a, r)$.
Consideriamo $\mathrm{B}'(a, r)$ orientato canonicamente.
Sia

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}; \; |z - a| = r\} \; .$$

Indichiamo con Γ la curva γ con l'orientazione canonica. Si ha $\partial \mathrm{B}'(a, r) = \Gamma$.
Per la formula integrali di Cauchy per ogni $z \in \mathrm{B}(a, r) A$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, dz \; .$$

Per il teorema sopra sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su curve compatte applicato alla funzione

$$\mathrm{B}(a,r) \times (A-\mathrm{B}'(a,r)) \longrightarrow \mathbf{C}, (z,\zeta) \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

si ha

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, dz\ .$$

Per il teorema sopra sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su curve compatte applicato alla funzione

$$\mathrm{B}(a,r) \times (A-\mathrm{B}'(a,r)) \longrightarrow \mathbf{C}, (z,\zeta) \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

f' è quindi derivabile su $\mathrm{B}(a,r)$.
In particolare f' è derivabile in a; per l'arbitrarietà di a, f' è quindi derivabile su A.
Per il teorema sopra sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su curve compatte per ogni $z \in \mathrm{B}(a,r)$ si ha poi

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, dz\ .$$

Per il teorema sopra sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su curve compatte f'' è quindi derivabile su $\mathrm{B}(a,r)$.
In particolare f'' è derivabile in a; per l'arbitrarietà di a, f'' è quindi derivabile su A.
Quindi f è derivabile 2 volte in A.
Procedendo in questo modo (o più precisamente ragionando per induzione) si ottiene la dimostrazione.

25.5.5 Formula integrale di Cauchy per le derivate d'ordine superiore

Teorema 25.5.5.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in A; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; sia $\mathcal{C}$ omologo a 0; sia S il sostegno di $\mathcal{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A-S$; sia $n \in \mathbf{N}$; allora si ha*

$$j(a;\mathcal{C}) f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz\ .$$

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}'(a,r) \subset A-S$.
Per la formula integrali di Cauchy per ogni $z \in \mathrm{B}(a,r)$ si ha

$$j(z;\mathcal{C}) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ .$$

Si ha $S \subset A-\mathrm{B}'(a,r)$.

Per il teorema sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su catene di traiettorie applicato alla funzione

$$\mathrm{B}(a,r) \times (A - \mathrm{B}'(a,r)) \longrightarrow \mathbf{C}, (z,\zeta) \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

si ha

$$j(z;\mathcal{C})f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \;.$$

In particolare per $z = a$ si ha

$$j(a;\mathcal{C})f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}\, d\zeta \;.$$

Per il teorema sulla derivata sotto il segno di integrale per gli integrali su catene di traiettorie applicato alla funzione

$$\mathrm{B}(a,r) \times (A - \mathrm{B}'(a,r)) \longrightarrow \mathbf{C}, (z,\zeta) \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

per ogni $z \in \mathrm{B}(a,r)$ si ha

$$j(z;\mathcal{C})f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta \;.$$

In particolare per $z = a$ si ha

$$j(a;\mathcal{C})f''(a) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^3}\, d\zeta \;.$$

Procedendo in questo modo (o più precisamente ragionando per induzione) si ottiene la dimostrazione.

Teorema 25.5.5.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia $a < b$; sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ traiettoria in A di classe lipschitziana; sia φ una traiettoria chiusa; sia φ omotopa a 0; sia $x \in A - \varphi([a,b])$; sia $n \in \mathbf{N}$; allora si ha*

$$j(a;\varphi)f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz \;.$$

Dimostrazione. Segue da sopra in quanto una traiettoria chiusa omotopa a 0 si identifica con un ciclo e questo ciclo è omologo a 0

Teorema 25.5.5.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $D \subset \mathbf{C}$; sia D un dominio; sia ∂D di classe lipschitziana; sia D compatto; sia $D \subset A$; sia $a \in D$; sia $n \in \mathbf{N}$; allora si ha*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz \;.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ un ciclo associato a a ∂D.
Per il teorema sulla formula di Cauchy per i cicli omologhi a 0, si ha

$$j(a,\mathcal{C})f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\ .$$

Da ciò segue subito la tesi.

25.6 Funzioni analitiche complesse di variabile complessa

25.6.1 Funzioni analitiche

Definizione 25.6.1.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è analitica se*

$$(\forall w \in A)\ (\exists a \textit{ successione di } \mathbf{R})\ (\exists r \in \mathbf{R}_+^*)$$

$$\Big(\mathrm{B}(w,r) \subset A \ \text{ e } \ (\forall h \in \mathbf{R}, |h| < r)\ \big(\textit{ la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \textit{ è convergente } \ \text{e}$$

$$f(w+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n\big)\Big)\ .$$

La somma di una serie di potenze è una funzione analitica.
Essendo le funzioni esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico somme di serie di potenze, tali funzioni sono analitiche.
La composizione di funzioni analitiche è una funzione analitica.
Somma, opposta, differenza, prodotto, reciproco, quoziente di funzioni analitiche sono funzioni analitiche.
Il principio del prolungamento analitico afferma che una funzione analitica definita su un aperto connesso e nulla su un aperto non vuoto incluso nel dominio, è nulla dappertutto.

Teorema 25.6.1.1 Principio del prolungamento analitico. *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f analitica; sia $U \subset A$; sia $U \neq \emptyset$; sia U aperto; sia $f|U = 0$; allora si ha $f = 0$.*

Enunciato
Da ciò segue subito che due funzioni analitiche uguali su U, sono uguali su A; in altri termini la conoscenza di una funzione analitica sull'aperto U determina la conoscenza della funzione su tutto A o anche una funzione analitica definita su U è prolungabile in al più un modo ad un aperto connesso contenente U.

Teorema 25.6.1.2 Zeri di una funzione analitica *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f analitica; sia $f \neq 0$; sia $S = \{w \in A; f(w) = 0\}$; allora $(\forall w \in S)$ w è punto isolato di S.*

Enunciato
Da ciò segue subito che due funzioni analitiche uguali su un sottoinsieme U di A avente almeno un punto non isolato sono uguali su A; in altri termini la conoscenza di una funzione analitica su U determina la conoscenza della funzione su tutto A o anche una funzione analitica definita su U è prolungabile in al più un modo ad un aperto connesso contenente U. Ciò generalizza quanto visto sopra per U aperto.
Dal teorema sulla derivata della somma di una serie di potenze segue subito che una funzione analitica è infinitamente derivabile.

Teorema 25.6.1.3 Derivabilità di una funzione analitica. *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f analitica; allora f è derivabile infinite volte e $(\forall p \in \mathbf{N}) f^{(p)}$ è analitica.*

Osservazione 25.6.1.1 Si può dimostrare che nel caso reale una funzione può essere derivabile infinite volte senza essere analitica.

Teorema 25.6.1.4 *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f analitica; sia $w \in A$; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $\mathrm{B}(w, r) \subset A$; sia $(a_n)_{n \in N}$ successione di numeri reali; $(\forall h \in \mathbf{C}, |h| < r)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$ sia convergente e sia $f(w + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$; allora $(\forall n \in \mathbf{N})$ si ha*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} \quad .$$

Dimostrazione. Infatti $(\forall p \in \mathbf{N})$ e $(\forall h \in \mathbf{R}, |h| < r)$ si ha: $f^{(p)}(w + h) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n h^{n-p}$. Quindi per $h = 0$ si ha $f^{(p)}(w) = p! \cdot a_p$; quindi si ha $a_p = \frac{f^{(p)}(w)}{p!}$.

Il teorema sopra rende naturale la considerazione della seguente serie di potenze.

Definizione 25.6.1.2 Serie di Taylor. *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f derivabile infinite volte; sia $a \in A$; allora la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$$

si chiama serie di Taylor della funzione f di punto iniziale a.

Definizione 25.6.1.3 Sviluppabilità in serie di Taylor. *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f derivabile infinite volte; sia $a \in A$; sia $x \in A$; si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale a nel punto x se si ha:*

1. *la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$ è convergente;*

2. *si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(x)$.*

Teorema 25.6.1.5 Caratterizzazione delle funzioni analitiche. *Sia $A \subset \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ allora f è analitica se e solo se f derivabile infinite volte e $(\forall a \in A)$ $(\exists r \in \mathbf{R}_+^*)$ tale che $\mathrm{B}(a, r) \subset A$ e $\big(\forall x \in \mathrm{B}(w, r)\big)$ f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale a nel punto x.*

Dimostrazione. Segue subito dai teoremi sopra.

Funzioni analitiche complesse di variabile complessa. Analogamente, supponendo A un aperto di $\mathbf{C}$ e $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ si dà la nozione di funzione analitica complessa.
Dai risultati visti per le funzioni analitiche reali, sostituendo $\mathbf{R}$ con $\mathbf{C}$, si ottengono i risultati corrispondenti per le funzioni analitiche complesse di variabile complessa.

25.6.2 Massima palla aperta contenuta in un insieme

Se $a \in \mathbf{R}^N$ e se $A \subset \mathbf{R}^N$ si pone

$$d(a, A) = \inf(\{d(a, x);\ x \in A\}\ .$$

Teorema 25.6.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; $R = d(a, \mathrm{C}_{R^N}(A))$; allora si ha*

$$\{x \in \mathbf{R}^N; \|x - a\| < R\} \subset A\ .$$

Dimostrazione. Sia infatti $x \in \mathbf{R}^N$; sia $\|x - a\| < R$.
Supponiamo per assurdo che non sia $x \in A$; allora si ha $x \in \mathrm{C}_{R^N}(A))$; quindi $d(a, x) \geq R$; ciò è assurdo.

Teorema 25.6.2.2 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; $R = d(a, \mathrm{C}_{R^N}(A))$; allora*

1. *l'insieme*
$$\{r \in \overline{\mathbf{R}};\ r > 0,\ \{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\} \subset A\}\ ;$$
ammette massimo;

2. *si ha*
$$\max(\{r \in \overline{\mathbf{R}};\ r > 0,\ \{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\} \subset A\}) = R\ .$$

Dimostrazione. Per il teorema sopra si ha

$$R \in \{r \in \overline{\mathbf{R}};\ r > 0,\ \{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\} \subset A\}\ .$$

Proviamo che per ogni $r > 0$ tale che $\{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\} \subset A$, si ha $r \leq R$.
Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale $\{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\} \subset A$ e $R < r$; essendo $R < r$ esiste $b \in \mathrm{C}_{R^N}(A))$ tale che $d(a, b) < r$; si ha quindi $b \in \{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < r\}$; quindi $b \in A$; ciò è assurdo.

Definizione 25.6.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; $R = d(a, \mathrm{C}_{R^N}(A))$; allora*

$$\{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < R\})$$

si chiama massima palla aperta di centro a contenuta in A.

Se $R \in \mathbf{R}$, si ha $\{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < R\}) = \mathrm{B}(a, R)$; se $R = +\infty$ si ha $\{x \in \mathbf{R}^N;\ \|x - a\| < R\}) = \mathbf{R}^N$.
Per $N = 2$ la massima palla aperta di centro a contenuta in A si chiama massimo cerchio aperto di centro a contenuto in A.

25.6.3 Limite sotto il segno di integrale

Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ integrabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; per quasi ogni $x \in A$ sia $f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} f(x)$; supponiamo che esista $g : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ integrabile, $g \geq 0$ e tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per quasi ogni $x \in A$ sia $|f_n(x)| \leq g(x)$; allora f è integrabile, la successione $\left(\int_A f_n)_{n\in N}\right)$ è convergente e se si ha

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \ .$$

Supponiamo A di misura finita, allora in particolare vale la tesi del teorema sopra se esiste $M \in \mathbf{R}_+$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per quasi ogni $x \in A$ sia $|f_n(x)| \leq M$.

25.6.4 Serie di funzioni totalmente convergenti

Sia A un insieme qualunque; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : A \longrightarrow \mathbf{R}$; analogamente alle serie numeriche si considerano le serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Serie di funzioni totalmente convergenti. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è totalmente convergente se esiste $(c_n)_{n\in N}$ successione di $\mathbf{R}_+$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sia convergente e per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in A$ sia $|f_n(x)| \leq c_n$.
È immediato che una serie di funzioni totalmente convergente è tale che per ogni $x \in A$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente e che per ogni $n \in \mathbf{N}$ $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k$.
Supposto quindi $A \subset \mathbf{R}^N$ misurabile e di misura finita e la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ totalmente convergente, per il teorema sopra applicato alle somme parziali della serie, si ha

$$\int_A \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n \ .$$

Analogamente si procede con funzioni $f_n : A \longrightarrow \mathbf{C}$.
Sia ora A un aperto di $\mathbf{C}$ e sia φ una traiettoria di classe lipschitziana in A; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : A \longrightarrow \mathbf{C}$ continua; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$ continua; per ogni $x \in A$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sia convergente e sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$; supponiamo che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sia totalmente convergente su $\varphi([a,b])$; allora si ha

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\varphi f_n(z)\,dz \ .$$

Convergenza totale di una serie di potenze sui compatti. Si osservi infine che se A è il cerchio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $((a_n)_{n\in N}$ successione di $\mathbf{C})$ allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge totalmente su ogni compatto contenuto in A.
Se φ è una traiettoria di classe lipschitziana in A, essendo $\varphi * [a,b])$ compatto, si ha

$$\int_\varphi \sum_{n-0}^{\infty} a_n z^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\varphi a_n z^n\,dz \ .$$

25.6.5 Sviluppo in serie di Taylor delle funzioni derivabili con derivata continua

Teorema 25.6.5.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A$; sia B il massimo cerchio aperto di centro a contenuto in A; sia $z \in B$; allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale a in z.*

Dimostrazione. Sia $r \in]|z|, R[$.
Essendo
$$R = \sup(\{r' \in \mathbf{R}_+^*;\ \mathrm{B}(a, r') \subset A\})\ ;$$
R esiste $r' \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $r < r'$ e $\mathrm{B}(a, r') \subset A$.
Si ha quindi
$$\mathrm{B}'(a, r) \subset \mathrm{B}(a, r') \subset A\ .$$
Quindi $\mathrm{B}'(a, r)$ è un dominio regolare contenuto in A.
Consideriamo $\mathrm{B}'(a, r)$ orientato canonicamente.
Sia
$$\gamma_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z - a| = r\ .$$
Indichiamo con Γ_r la curva γ con l'orientazione canonica.
Per la formula integrali di Cauchy si ha
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a - (z - a)}\, d\zeta =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta\ .$$
L'insieme γ_r è un compatto di $\mathbf{C}$; la funzione $|f|$ è continua su γ_r; quindi ammette massimo su γ_r; sia
$$M = \max_{\zeta \in \gamma_r} |f(\zeta)|\ .$$
Per ogni $\zeta \in \gamma_r$ si ha quindi
$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| \le M\frac{1}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n\ .$$
Essendo $\frac{|z-a|}{r} < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$ è convergente; quindi la serie di funzioni di variabile ζ
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$
è quindi totalmente convergente su γ_r.
Si ha quindi, per la formula integrale di Cauchy per le derivate di ordine superiore,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\right)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\right)(z-a)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n \ .$$

Osservazione 25.6.5.1 La funzione f è quindi sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto del massimo cerchio aperto di centro a contenuto in A.

Teorema 25.6.5.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A$; sia $R = d(a, \mathrm{C}_C(A))$; sia $(a_n)_{n \in N}$ successione di numeri complessi; supponiamo che ogni $z \in \mathbf{C}$, $|z-a| < R$, la serie r $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ sia convergente e che sia*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \ ;$$

sia $r \in \mathbf{R}$ tale che $r < R$; sia Γ_r la circonferenza di centro a e raggio r orientata canonicamente; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \ .$$

Dimostrazione. Segue dalla formula integrale di Cauchy per le derivate d'ordine superiore.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-3\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z+3} \ ;$$

1. determinare il massimo cerchio aperto di cento 0 contenuto nel dominio di f;
2. determinare la serie di Taylor di f di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Risoluzione.

1. Il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f è $\mathrm{B}(0,3)$.
2. Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,3)$ si ha
$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} \ .$$
Si ha $|-\frac{z}{3}| < \frac{|z|}{3} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n \ .$$
La serie di Taylor di f di punto iniziale 0 è quindi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,3)$ si ha
$$f(z) = \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n \ .$$

Esercizio. Sia

$$f : \mathbf{C} - \{1,2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-1)(z-2)} \ ;$$

1. determinare il massimo cerchio aperto di cento 0 contenuto nel dominio di f;
2. determinare la serie di Taylor di f di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Risoluzione.

1. Il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f è $\mathrm{B}(0,1)$.
2. Considerando la scomposizione di $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ in fratti semplici, si trova che per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} .$$
Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,1)$ si ha
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} .$$
Si ha $|\frac{z}{2}| < \frac{1}{2} < 1$; quindi si ha
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}z^n .$$
Si ha poi
$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$
Si ha quindi
$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}} + 1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n .$$
La serie di Taylor di f di punto iniziale 0 è quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^{n+1}}{2^{n+2}}z^n$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,1)$ si ha
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{-3\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z-2} ;$$

1. determinare il massimo cerchio aperto di cento 1 contenuto nel dominio di f;
2. determinare la serie di Taylor di f di punto iniziale 1 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Risoluzione.

1. Il massimo cerchio aperto di centro 1 contenuto nel dominio di f è $\mathrm{B}(1,1)$.
2. Per ogni $z \in \mathrm{B}(1,1)$ si ha
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1+1-2} = \frac{1}{z-1-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} .$$
Si ha $|z-1| < 1$; quindi si ha
$$-\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n .$$

La serie di Taylor di f di punto iniziale 1 è quindi $\sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(1,1)$ si ha
$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n \; .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z-2} \; ;$$

1. determinare il massimo cerchio aperto di cento 3 contenuto nel dominio di f;
2. determinare la serie di Taylor di f di punto iniziale 3 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Risoluzione.

1. Il massimo cerchio aperto di centro 3 contenuto nel dominio di f è $\mathrm{B}(3,1)$.
2. Per ogni $z \in \mathrm{B}(3,1)$ si ha
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-3+3-2} = \frac{1}{z-3+1} = -\frac{1}{1-(-(z-3))} \; .$$
Si ha $|-(z-3)| = |z-3| < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{1-(-(z-3))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^n \; .$$
La serie di Taylor di f di punto iniziale 3 è quindi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^n$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(3,1)$ si ha
$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^n \; .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-2)^2} \; ;$$

1. determinare il massimo cerchio aperto di cento 0 contenuto nel dominio di f;
2. determinare la serie di Taylor di f di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Risoluzione.

1. Il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f è $\mathrm{B}(0,2)$.
2. Si ha
$$f(z) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z-2}\right) \; .$$
Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,2)$ si ha
$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \; .$$
Si ha $|\frac{z}{2}| = \frac{|z|}{2} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \; .$$

Si ha quindi

$$f(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{2^{m+2}}z^m \; .$$

La serie di Taylor di f di punto iniziale 0 è quindi $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{2^{m+2}}z^m$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(0,2)$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{2^{m+2}}z^m \; .$$

25.6.6 Funzioni derivabili con derivata continua e funzioni analitiche

Teorema 25.6.6.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f analitica;*
2. *f derivabile e f' continua.*

Dimostrazione. Se f è analitica evidentemente f è derivabile con derivata continua. Supponiamo f derivabile con derivata continua; allora per il teorema sopra f è analitica.

25.6.7 Funzioni derivabili con derivata continua nulle

Teorema 25.6.7.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $(\forall z \in A)\; f(z) = 0$;
2. $(\exists B \subset A)\; B$ *aperto*$)\; (\forall z \in B)\; f(z) = 0$;
3. $(\exists a \in A)\; (\forall n \in \mathbf{N})\; f^n(a) = 0$.

Dimostrazione. Segue dalle proprietà delle funzioni analitiche.

Teorema 25.6.7.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f derivabile; sia f' continua; sia $a \in A$; supponiamo che $(\forall n \in \mathbf{N}^*)\; f^n(a) = 0$; allora f è costante.*

Dimostrazione. Segue da sopra.

25.6.8 Teoremi di Morera e di Goursat

Teorema 25.6.8.1 Morera. *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f analitica;*
2. *per ogni R rettangolo contenuto in A si ha $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.*

Enunciato

Teorema 25.6.8.2 Goursat. *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f analitica;*
2. *per $z \in A$ f derivabile in z.*

Enunciato

25.7 Stima di Cauchy

25.7.1 Stima di Cauchy

Teorema 25.7.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $a \in A$; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}'(a,r) \subset A$; sia*

$$M = \max(\{|f(z)|;\ |z-a| = r\})\ ;$$

sia $n \in \mathbf{N}$; allora si ha

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n}\ .$$

Dimostrazione. Sia Γ la circonferenza di centro a e raggio r orientata canonicamente. Si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz\ .$$

Quindi

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_\Gamma |\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}|\,ds \leq \frac{n!}{2\pi}\int_\Gamma \frac{M}{r^{n+1}}|\,ds =$$

$$\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\int_\Gamma ds = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}\ .$$

In particolare per $n = 0$ si ha

$$|f(a)| \leq M\ .$$

25.7.2 Teorema di Liouville

Teorema 25.7.2.1 *Sia $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica; sia f limitata; allora f è costante.*

Dimostrazione. Esiste $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbf{C}$ $|f(z)| \leq M$.
Sia $r > 0$; sia $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.
Sia $n \in \mathbf{N}^*$.
Per il teorema sopra si ha

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n} \leq \frac{n!M}{r^n} \ .$$

Si ha quindi

$$|f^{(n)}(0)| \leq \lim_{r \to +\infty} \frac{n!M}{r^n} = 0 \ .$$

Quindi $|f^{(n)}(0)| = 0$; quindi $f^{(n)}(0) = 0$.
Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$f(z) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) \ .$$

Quindi f è costante.

Osservazione 25.7.2.1 Dal teorema di Liouville scende immediatamente il teorema fondamentale algebra, cioè che un polinomio complesso non costante ammette almeno una radice.
Sia infatti $p(z)$ un polinomio complesso non costante; supponiamo per assurdo che $p(z)$ non abbia radici; allora $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ è una funzione analitica complessa definita su $\mathbf{C}$; si ha $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$; da ciò e dal teorema di Weierstrass segue subito che $f(z)$ è limitata; quindi $f(z)$ è costante; quindi $p(z)$ è costante; ciò è assurdo.

25.7.3 Principio del massimo

Teorema 25.7.3.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $a \in A$; sia a un punto di massimo relativo per*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow |f(z)|;;$$

allora f è costante.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che a sia punto di massimo relativo per g.
Esiste allora $R > 0$ tale che sia $\mathrm{B}(a, R) \subset A$; e tale che per ogni $z \in \mathrm{B}(a, R)$ $|f(z)| \leq |f(a)|$.
Dimostriamo che per ogni $z \in \mathrm{B}(a, R)$ si ha $|f(z)| = |f(a)|$.
Supponiamo per assurdo che esista $w \in \mathrm{B}(a, R)$ tale che $|f(w)| < |f(a)|$.
Per continuità esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}(w, \delta) \subset \mathrm{B}(a, R)$ e per ogni $z \in \mathrm{B}(w, \delta)$ $|f(z)| < |f(a)|$.
Sia $r = |w - a|$; sia Γ la circonferenza di centro a e raggio r orientata canonicamente.

Si ha
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz \; .$$
Quindi
$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\frac{f(z)}{z-a}|\, ds =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}||rie^{it}|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{it})|\, dt \; .$$
Esiste $t_0 \in]-\pi, \pi]$ tale che $a + re^{it_0} = w$.
Supponiamo $t_0 \in]-\pi, \pi[$.
Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(t_0, \varepsilon) \subset]-\pi, \pi[$ e per ogni $s \in \mathrm{B}(t_0, \varepsilon)$ si ha $a + re^{is} \in \mathrm{B}(w, \delta)$.
Siano $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ tali che $t_0 - \varepsilon < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \varepsilon$.
Per il teorema della media integrale esiste $\tau \in [t_1, t_2]$ tale che
$$\int_{t_1}^{t+2} |f(a+re^{it})|\, dt = |f(a+re^{i\tau})(t_2 - t_1) \; .$$
Si ha $a + re^{i\tau}) \in W$; quindi $|f(a+re^{i\tau}| < |f(a)|$; quindi
$$\int_{t_1}^{t_2} |f(a+re^{it})|\, dt < |f(a+re^{i\tau})(t_2 - t_1) < |f(a)|(t_2 - t_1) \; .$$
Si ha quindi
$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi} \pi |f(a+re^{it})|\, dt =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{t_1} |f(a+re^{it})|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} |f(a+re^{it})|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_2}^{\pi} |f(a+re^{it})|\, dt <$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{t_1} |f(a)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} |f(a)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_2}^{\pi} |f(a)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a|\, dt = |f(a)| \; .$$
Quindi si ha $|f(a) < |f(a)|$.
Ciò è assurdo.
Supponiamo $t_0 = \pi$; si procede nello stesso modo sostituendo negli integrali l'intervallo $[-\pi, \pi]$ con $[0, 2\pi]$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(a, R)$ si ha quindi $|f(z)| = |f(a)|$.
Quindi per ogni $z \in \mathrm{B}(a, R)$ si ha $f(z)\overline{f(z)} = |f(a)|^2$.
Sia $u = \Re f$ e $v = \in f$.
Per ogni $z = (x, y)\mathrm{B}(a, R)$ si ha $f(z) = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ e $\overline{f(z)} = (u(x, y), -v(x, y))$.
Per le condizioni di monogenia la matrice jacobiana di f in (x, y) è
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$

La matrice jacobiana di $\overline{f}$ in (x,y) è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$

Essendo $f(z)\overline{f(z)} = |f(a)|^2$, la matrice jacobiana di $z \longrightarrow f(z)\overline{f(z)}$ in (x,y) è la matrice nulla.
Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si ha in particolare

$$(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y))^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y))^2 = 0 ;$$

quindi si ha $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$; quindi la matrice jacobiana di f su $\mathrm{B}(a,R)$ è la matrice nulla; quindi f è costante su $\mathrm{B}(a,R)$.
Essendo f analitica e A connesso f è costante su A.

Una formulazione equivalente del teorema sopra è la seguente.

Teorema 25.7.3.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f non sia costante; sia*

$$g : A \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow |f(z)|; ;$$

allora g non ammette punti di massimo relativo.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.7.3.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f non sia costante; sia $D \subset A$; sia D compatto*

$$g : D \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow |f(z)|; ;$$

sia E l'insieme dei punti di massimo di g;

1. *g ammette massimo;*
2. *si ha $E \subset \mathrm{Fr}\,(D)$.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.7.3.4 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia A connesso; sia A limitato; sia $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; sia $f|A$ analitica; supponiamo che f non sia costante;*

$$g : \overline{A} \longrightarrow \mathbf{R}, z \longrightarrow |f(z)|; ;$$

sia E l'insieme dei punti di massimo di g;

1. *g ammette massimo;*
2. *si ha $E \subset \mathrm{Fr}\,(A)$.*

Dimostrazione. Immediata.

25.8 Sviluppi in serie di Laurent

25.8.1 Serie di Laurent

Nella definizione che segue estendiamo la nozione di successione.

Definizione 25.8.1.1 *Sia X un insieme; sia a una funzione; si dice che a è una successione di elementi di X se* $\mathrm{dom}(a) \subset \mathbf{Z}$.

Definizione 25.8.1.2 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{R}^N$; si chiama serie di Laurent definita da $(a_n)_{n\in Z}$ la coppia*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right) .$$

La serie di Laurent definita da $(a_n)_{n\in Z}$ si indica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.

Definizione 25.8.1.3 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{R}^N$; si dice che la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ è convergente, se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ sono convergenti.*

Definizione 25.8.1.4 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{R}^N$; supponiamo che la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ sia convergente; allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

si chiama somma della serie di Laurent.

La somma della serie di Laurent si indica per abuso ancora con $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.

Definizione 25.8.1.5 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{R}^N$; si dice che la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ sono assolutamente convergenti.*

Evidentemente una serie di Laurent assolutamente convergente è anche convergente.

Definizione 25.8.1.6 *Sia A un insieme; sia $(f_n)_{n\in Z}$ una successione di $(\mathbf{R}^N)^A$; si dice che la serie di Laurent di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ è totalmente convergente, se le serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ sono totalmente convergenti.*

Analogamente a quanto visto per le serie ordinarie di funzioni, la convergenza totale di una serie di Laurent permette l'inversione fra i segni di integrale e di serie.

25.8.2 Funzione sviluppabile in serie di Laurent

Definizione 25.8.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

supponiamo $B \subset A$; si dice che f è sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a su B se esiste $(a_n)_{n \in Z}$ successione di numeri complessi tale che per ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ e convergente e si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \ .$$

Teorema 25.8.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

sia $(a_n)_{n \in Z}$ successione di numeri complessi; supponiamo che ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ e convergente e che sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \ ;$$

allora

1. *la serie di potenze*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$
ha raggio di convergenza r tale che $r \geq r_2$;

2. *la serie di potenze*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$$
ha raggio di convergenza r' tale che $r' \geq \frac{1}{r_1}$.

Dimostrazione. Sia $w \in B$; si ha $|w - a| < r_2$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-a)^n$ è convergente; quindi la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ha raggio di convergenza r tale che $r \geq |w - a|$; per l'arbitrarietà di w si ha quindi $r \geq r_2$.
Sia $w_1 \in B$; si ha $r_1 < |w_1 - a|$; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(w_1-a)^n}$ è convergente; quindi la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ ha raggio di convergenza r' tale che $r' \geq \frac{1}{|w_1-a|}$; per l'arbitrarietà di w_1 si ha quindi $r' \geq \frac{1}{r_1}$.

Teorema 25.8.2.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

supponiamo $B \subset A$; sia $(a_n)_{n \in Z}$ successione di numeri complessi; supponiamo che per ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ e convergente e che sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \ ;$$

sia $r \in \mathbf{R}$ tale che $r_1 < r < r_2$; sia Γ_r la circonferenza di centro a e raggio r orientata canonicamente; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \ .$$

Dimostrazione. Sia $\gamma_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z - a| = r\}$.
Per ogni $m \in \mathbf{Z}$ e per ogni $z \in B$ si ha

$$(z-a)^{-m-1} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1} \ .$$

Proviamo che la serie di Laurent di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1}$ è totalmente convergente su γ_r.
Ciò significa che le due serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n-m-1}$ sono totalmente convergenti su γ_r.
La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ha raggio di convergenza r' tale che $r' \geq r_2$.
Quindi r appartiene al cerchio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ è assolutamente convergente; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ è convergente.
Proviamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1}$ è totalmente convergente su γ_r.
Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in \gamma_r} |a_n (z-a)^{n-m-1}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{n-m-1}| = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-m-1} |a_n| r^n \ .$$

Essendo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-m-1} |a_n| r^n|$ è convergente. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1}$ è totalmente convergente su γ_r.
La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ ha raggio di convergenza r'' tale che $r'' \geq \frac{1}{r_1}$.
Quindi $\frac{1}{r}$ appartiene al cerchio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$; quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (\frac{1}{r})^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} r^{-n} =$ è assolutamente convergente; quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}| r^{-n}$ è convergente.
Proviamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n-m-1}$ è totalmente convergente su γ_r.

Si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z\in\gamma_r} |a_{-n}(z-a)^{-n-m-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|r^{-n-m-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-m-1}|a_{-n}|r^{-n} \; .$$
Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|r^{-n}$ convergente, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^{-m-1}|a_{-n}|r^{-n}|$ è convergente. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n-m-1}$ è totalmente convergente su γ_r.
Per il teorema sopra si ha
$$\int_{\Gamma_r} (z-a)^{-m-1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m-1}\,dz =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_r} a_n (z-a)^{n-m-1}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_r} (z-a)^{n-m-1}\,dz \; .$$
Per $n-m-1 \neq -1$, $\frac{(z-a)^{n-m}}{n-m}$ è una primitiva su A della funzione $(z-a)^{n-m-1}$. Essendo Γ_r una traiettoria chiusa, si ha allora $\int_{\Gamma_r} (z-a)^{n-m-1}\,dz = 0$.
Si ha quindi
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_r} (z-a)^{n-m-1}\,dz = a_m \int_{\Gamma_r} (z-a)^{-1}\,dz \; .$$
Si ha
$$\Gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + re^{it} \; .$$
Si ha quindi
$$a_m \int_{\Gamma_r} (z-a)^{-1}\,dz = a_m \int_0^{2\pi} r^{-1} e^{-it} rie^{it}\,dt = a_m \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i a_m \; .$$
Si ha dunque
$$\int_{\Gamma_r} (z-a)^{-m-1} f(z)\,dz = 2\pi a_m \; ;$$
quindi
$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,dz \; .$$

Teorema 25.8.2.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*
$$B = \{z \in \mathbf{C};\; r_1 < |z-a| < r_2\}$$
supponiamo $B \subset A$; supponiamo f sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a su B; allora esiste una ed una sola $(a_n)_{n\in Z}$ successione di numeri complessi tale che per ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ è convergente e si ha
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \; .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

Definizione 25.8.2.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

supponiamo $B \subset A$; supponiamo f sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a su B; allora l'unica successione di numeri complessi, $(a_n)_{n \in Z}$, tale che per ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ sia convergente e si abbia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n\ ,$$

si chiama successione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent della funzione f, di punto iniziale a, su B.

In tal caso la serie di Laurent di funzioni $\sum_{n--\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ si chiama serie di Laurent di f di punto iniziale a su B.

Teorema 25.8.2.4 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia*

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

supponiamo $B \subset A$; supponiamo f sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a su B; sia $(a_n)_{n \in Z}$, la successione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent della funzione f, di punto iniziale a, su B; sia $r \in \mathbf{R}$ tale che $r_1 < r < r_2$; sia Γ_r la circonferenza di centro a e raggio r orientata canonicamente; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz\ .$$

Dimostrazione. segue da sopra.

25.8.3 Corone circolari massimali

Definizione 25.8.3.1 *Sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in \overline{\mathbf{R}}$; sia $0 \leq r_1 < r_2$; poniamo*

$$C(a; r_1, r_2) = \{z \in \mathbf{C}; r_1 < |z - a| < r_2\}\ .$$

$C(a; r_1, r_2)$ si chiama corona circolare aperta di centro a e raggi r_1, r_2.

Teorema 25.8.3.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathbf{C}$; sia $R \in]0, +\infty[$; sia*

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z - a| = R\}\ ;$$

sia $\gamma_R \subset A$*; sia*

$$r'' = \sup(\{r \in \overline{\mathbf{R}}; r \geq R, \{z \in \mathbf{C};\ R \leq |z-a| \leq r\} \subset A\})\ ;$$

sia

$$r' = \inf(\{r \in \overline{\mathbf{R}}; 0 \leq r \leq R, \{z \in \mathbf{C};\ r \leq |z-a| \leq R\} \subset A\})\ ;$$

allora si ha

1. $0 \leq r' < R < r'' \leq +\infty$*;*
2. $C(a; r', r'') \subset A$*;*
3. $\gamma_R \subset C(a; r', r'')$*;*
4. $C(a; r', r'')$ *è la massima corona circolare di cento* a*, contenuta in* A *e contenente* γ_R*.*
5. $C(a; r', r'')$ *è un elemento massimale per l'insieme delle corone circolari aperte contenute in* A*.*

Dimostrazione. Immediata.

Definizione 25.8.3.2 *Sia* $A \subset \mathbf{C}$*; sia* A *aperto; sia* $a \in \mathbf{C}$*; sia* $R \in]0, +\infty[$*; sia*

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = R\}\ ;$$

sia $\gamma_R \subset A$*; sia*

$$r'' = \sup(\{r \in \overline{\mathbf{R}}; r \geq R, \{z \in \mathbf{C};\ R \leq |z-a| \leq r\} \subset A\})\ ;$$

sia

$$r' = \inf(\{r \in \overline{\mathbf{R}}; 0 \leq r \leq R, \{z \in \mathbf{C};\ r \leq |z-a| \leq R\} \subset A\})\ ;$$

allora $C(a; r', r'')$ *si chiama corona circolare aperta massimale di centro* a*, contenuta in* A *e contenente* γ_R*.*

Teorema 25.8.3.2 *Sia* $A \subset \mathbf{C}$*; sia* A *aperto; sia* $a \in A$*; sia* $r \in]0, +\infty[$*; sia* $B'(a, r) \subset A$*; sia*

$$\gamma_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = r\}\ ;$$

sia $R = d(a; \complement_C(A))$*; allora la corona circolare aperta massimale di centro* a*, contenuta in* A *e contenente* γ_r*; è* $C(a; 0, R)$*.*

Dimostrazione. Immediata.

Si osservi che se $B = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| < R\}$ è il massimo cerchio aperto di centro a contenuto in A si ha $C(a; 0, R) = B - \{a\}$.

25.8.4 Sviluppabilità in serie di Laurent

Definizione 25.8.4.1 Traiettoria associata ad una circonferenza. *Sia $a \in \mathbf{C}$; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia*

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}\,;|z-a| = r\}\ ;$$

allora la parametrizzazione

$$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + re^{it}$$

si chiama parametrizzazione associata a γ_r.

Teorema 25.8.4.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathbf{C}$; sia $R \in]0, +\infty[$; sia*

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = R\}\ ;$$

sia $\gamma_R \subset A$; sia $C(a; r', r'')$ la corona circolare aperta massimale di centro a, contenuta in A e contenente γ_R; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora f è sviluppabile in serie di Laurent di centro a su $C(a; r', r'')$.

Dimostrazione. Proviamo che esiste $(a_n))_{n\in Z}$ successione di $\mathbf{C}$ tale che per ogni $z \in C(a; r', r'')$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ è convergente e si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n\ .$$

Sia Γ_R la traiettoria associata a γ_r.
Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ poniamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\ .$$

Proviamo dunque che per ogni $z \in C(a; r', r'')$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ è convergente e si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n\ .$$

Sia $z \in C(a; r', r'')$; si ha

$$r' < |z-a| < r''\ .$$

Esistono $R_1, R_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tali che

$$r' < R_1 < |z-a| < R_2 < r''\ .$$

Si ha

$$\{x \in \mathbf{C};\ R_1 \le |x-a| \le R_2\} \subset A\ ;.$$

Per la formula integrale di Cauchy applicata a $C'(a; R_1, R_2) = \{x \in \mathbf{C};\ R_1 \le |x-a| \le R_2\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{x-z}\,dx - \int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{x-z}\,dx\right)\ .$$

Si ha

$$\int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{x-z}\,dx = \int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{x-a-(z-a)}\,dx = \int_{\Gamma_{R_2}} \frac{1}{x-a}\frac{f(x)}{1-\frac{z-a}{x-a}}\,dx =$$

$$\int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{x-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_{R_2}} f(x)\frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\right)(z-a)^n\ .$$

La traiettoria Γ_{R_2} è omotopa in $A-\{a\}$ a Γ_R; quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_2}} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\right)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R}} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\right)(z-a)^n\ .$$

Si ha

$$-\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{x-z}\,dx = -\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{x-a-(z-a)}\,dx = -\frac{1}{z-a}\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{\frac{x-a}{z-a}-1}\,dx =$$

$$\frac{1}{z-a}\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{1-\frac{x-a}{z-a}}\,dx = \frac{1}{z-a}\int_{\Gamma_{R_1}} f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n dx =$$

$$\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_{R_1}} f(x)\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n dx = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_{R_1}} f(x)\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n}\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_1}} f(x)(x-a)^n\,dx\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_1}} f(x)(x-a)^{n-1}\,dx\right)\frac{1}{(z-a)^{n}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{(x-a)^{-n+1}}\,dx\right)(z-a)^{-n}\ .$$

La traiettoria Γ_{R_1} è omotopa in $A-\{a\}$ a Γ_R; quindi si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(x)}{(x-a)^{-n+1}}\,dx\right)(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R}} \frac{f(x)}{(x-a)^{-n+1}}\,dx\right)(z-a)^{-n}\ .$$

Si ha quindi

$$f(z) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R}} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\right)(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{R}} \frac{f(x)}{(x-a)^{-n+1}}\,dx\right)(z-a)^{-n}\right) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_{R}} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx\right)(z-a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^{-n}\ .$$

Teorema 25.8.4.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathbf{C}$; sia $R \in]0, +\infty[$; sia*

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = R\}\ ;$$

sia $\gamma_R \subset A$; sia $C(a; r', r'')$ la corona circolare aperta massimale di centro a, contenuta in A e contenente γ_R; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora esiste

$$g_2 : \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| < r''\} \longrightarrow \mathbf{C}\ ,$$

g_2 analitica, esiste

$$g_1 : \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| > r'\} \longrightarrow \mathbf{C}\ ,$$

g_1 analitica, tali che

$$(\forall z \in C(a; r', r'')\ f(z) = g_2(z) + g_1(z)\ .$$

Dimostrazione. Per il teorema sopra f è sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a in $C(a; r', r'')$.
Sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti dello sviluppo di f in serie di Laurent.
Per ogni $z \in C(a; r', r'')$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n\ .$$

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza $r \geq r''$; per ogni $z \in \mathbf{C}$ $|z-a| < r''$ poniamo

$$g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\ .$$

La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ ha raggio di convergenza $r \geq \frac{1}{r'}$; per ogni $z \in \mathbf{C}$ $|z-a| > r'$ poniamo

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}\ .$$

g_2 e g_1 sono analitiche e per ogni $z \in C(a; r', r'')$ si ha $f(z) = g_2(z) + g_1(z)$.

Teorema 25.8.4.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $r \in]0, +\infty[$; sia $B'(a, r) \subset A$; sia*

$$\gamma_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = r\}\ ;$$

sia $R = d(a; \mathrm{C}_C(A))$; identifichiamo canonicamente una serie di Laurent di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ tale che $f_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{Z}, n \leq -1$ con la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$; allora la serie di Laurent di punto iniziale a su $C(a; 0, R)$ si identifica con la serie di Taylor di f di punto iniziale a.

Dimostrazione. Immediata.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbf{C} - \{1, 2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-1)(z-2)}\ ;$$

1. determinare la corona circolare massimale aperta di cento 0, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = \frac{3}{2}\}$, contenuta nel dominio di f;
2. determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su tale corona circolare aperta ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Risoluzione.

1. La corona circolare massimale aperta di cento 0, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = \frac{3}{2}\}$, contenuta nel dominio di f è $C(0;1,2)$.
2. Considerando la scomposizione di $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ in fratti semplici, si trova che per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \ .$$
Per ogni $z \in C(0;1,2)$ si ha
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \ .$$
Si ha $|\frac{z}{2}| < \frac{2}{2} = 1$; quindi si ha
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n \ .$$
Si ha poi
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \ .$$
Si ha $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \ .$$
Si ha quindi
$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} -z^{-n} \ .$$
Posto
$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}} & \text{per } n \geq 0 \\ -1 & \text{per } n < 0 \end{cases}$$
la serie di Laurent di f di punto iniziale 0 su $C(0;1,2)$ è quindi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.
Per ogni $z \in C(0,1,2)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \ .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{1,2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-1)(z-2)} \ ;$$

1. determinare la corona circolare massimale aperta di cento 0, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 3\}$, contenuta nel dominio di f;
2. determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su tale corona circolare aperta ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Risoluzione.

1. La corona circolare massimale aperta di cento 0, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 3\}$, contenuta nel dominio di f è $C(0; 2, +\infty)$.

2. Considerando la scomposizione di $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ in fratti semplici, si trova che per ogni $z \in$ dom(f) si ha
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \ .$$
Per ogni $z \in C(0; 0, +\infty)$ si ha
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \ .$$
Si ha $|\frac{2}{z}| = \frac{2}{|z|} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{-n} \ .$$
Si ha poi
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \ .$$
Si ha $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} \ .$$
Si ha quindi
$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)z^{-n} \ .$$
Posto
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \geq 0 \\ 2^{-n-1}-1 & \text{per } n < 0 \end{cases}$$
la serie di Laurent di f di punto iniziale 0 su $C(0; 2, +\infty)$ è quindi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.
Per ogni $z \in C(0, 2, +\infty)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \ .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{1, 3\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-1)(z-3)} \ ;$$

1. determinare la corona circolare massimale aperta di cento 2, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-2| = 2\}$, contenuta nel dominio di f;

2. determinare la serie di Laurent di punto iniziale 2 su tale corona circolare aperta ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Risoluzione.

1. La corona circolare massimale aperta di cento 2, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-2| = 2\}$, contenuta nel dominio di f è $C(2; 1, +\infty)$.

2. Considerando la scomposizione di $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in fratti semplici, si trova che per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right) .$$
Per ogni $z \in C(2;1,+\infty)$ si ha
$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-2+2-3} = \frac{1}{z-2-1} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} .$$
Si ha $|\frac{1}{|z-2|}| = \frac{1}{|z-2||} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{-n} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{-n-1} = \sum_{m=1}^{\infty}(z-2)^{-m} .$$
Si ha poi
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+2-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z-2})} .$$
Si ha $|\frac{1}{|z-2|}| = \frac{1}{|z-2||} < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z-2})} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z-2}\right)^n = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n-1} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(z-2)^{-m} .$$
Si ha quindi
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(z-2)^{-n}\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})z^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty}(z-2)^{-2k} .$$
La serie di Laurent di f di punto iniziale 2 su $C(2;1,+\infty)$ è quindi $\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-2)^{2n}$.
Per ogni $z \in C(2,1,+\infty)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-2)^{2n} .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{C}-\{1,3\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z-1)(z-3)} ;$$

1. determinare la corona circolare massimale aperta di cento 2, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-2| = \frac{1}{2}\}$, contenuta nel dominio di f;
2. determinare la serie di Laurent di punto iniziale 2 su tale corona circolare aperta ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Risoluzione.

1. La corona circolare massimale aperta di cento 2, contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-2| = \frac{1}{2}\}$, contenuta nel dominio di f è $C(2;0,1) = \mathrm{B}(2,1) - \{2\}$.
2. Considerando la scomposizione di $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in fratti semplici, si trova che per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right) .$$
Per ogni $z \in C(2;1,+\infty)$ si ha
$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-2+2-3} = \frac{1}{z-2-1} = -\frac{1}{1-(z-2)} .$$
Si ha $||z-2|| < 1$; quindi si ha
$$-\frac{1}{1-(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-2)^n .$$
Si ha poi
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+2-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{1-(-(z-2))} = \ .$$
Si ha $|-(z-2)| = |z-2| < 1$; quindi si ha
$$\frac{1}{1-(-(z-2))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-(z-2))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^(z-2)^n = \ .$$
Si ha quindi
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} -(z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\right) .$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1-(-1)^n)(z-2)^n = \sum_{k=0}^{\infty} -(z-2)^{2k} .$$
La serie di Laurent di f di punto iniziale 2 (coincidente con la serie di Taylor di f di punto iniziale 2) su $C(2;0,1)$ è quindi $\sum_{k=0}^{\infty} -(z-2)^{2k}$.
Per ogni $z \in C(2,0,1)$ si ha
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} -(z-2)^{2k} .$$

25.9 Singolarità per una funzione analitica

25.9.1 Punto singolare per un aperto

Definizione 25.9.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; si dice che a è un punto singolare per A se*
$$(\exists r \in \mathbf{R}_+^*)\ \mathrm{B}(a;r) - \{a\} \subset A .$$

Teorema 25.9.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; allora a un punto singolare per A se e solo se a è un punto isolato di $\mathrm{C}_C(A)$.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.9.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; allora*

$$(\exists r \in \mathbf{R}_+^*)\ \mathrm{B}'(a;r)-\{a\} \subset A\ .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.9.1.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; allora $A \cup \{a\}$ è aperto.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.9.1.4 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}'(a;r)-\{a\} \subset A$; sia $R = d(a; \mathrm{C}_C(A \cup \{a\})$; sia*

$$\gamma_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = r\}\ ;$$

allora la corona circolare massimale aperta di centro a. contenente γ_r, contenuta in A è uguale a $C(a;0,R)$.

Dimostrazione. Immediata.

Definizione 25.9.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $R = d(a; \mathrm{C}_C(A \cup \{a\})$; allora $C(a;0,R)$ si chiama corona circolare aperta massimale associata al punto singolare a.*

25.9.2 Serie di Laurent in un punto singolare

Teorema 25.9.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $C(a;0,R)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora f è sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale a su $C(a;0,R)$.*

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}'(a;r)-\{a\} \subset A$; allora $C(a;0,R)$ è la corona circolare aperta massimale contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = r\}$ e contenuta in A; l'affermazione segue allora dal teorema sopra.

Definizione 25.9.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $C(a;0,R)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent di punto iniziale a su $C(a;0,R)$; allora $(a_n)_{n \in Z}$ si chiama successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a.*

La serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

si chiama serie di Laurent di f in a.
Se $r \in \mathbf{R}_+^*$ è tale che $\mathrm{B}'(a,r)-\{a\} \subset A$ e se Γ_r è la circonferenza $\{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = r\}$ orientata canonicamente per quanto visto sopra, per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \ .$$

Teorema 25.9.2.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $C(a;0,R)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; allora per ogni $z \in \mathbf{C}(a;0,R)$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ è convergente e si ha*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \ .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.9.2.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $C(a;0,R)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; allora*

1. *la serie di potenze*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$
ha raggio di convergenza r' tale che $r' \geq R$;

2. *la serie di potenze*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$$
ha raggio di convergenza $+\infty$.

Dimostrazione. Immediata.

25.9.3 Parte principale di una funzione in un punto

Definizione 25.9.3.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $C(a;0,R)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; allora la funzione*

$$h : \mathbf{C}-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$$

si chiama parte principale di f in a.

25.9.4 Singolarità rimovibile

Definizione 25.9.4.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; si dice che a è una singolarità per f rimovibile (o eliminabile) (o che f è regolare in a) se si ha*

$$(\forall n \in \mathbf{Z},\, n < 0)\; a_n = 0 \;.$$

Teorema 25.9.4.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è una singolarità rimovibile per f;*
2. *f è convergente rispetto a $(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ in a;*
3. *esiste $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, g continua tale che g è un prolungamento di f;*
4. *esiste $R \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $\mathrm{B}(a, R) - \{a\} \subset A$ e $f|(\mathrm{B}(a, R) - \{a\})$ limitata;*
5. *esiste $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, g analitica tale che g è un prolungamento di f.*

in tal caso esiste una ed una sola $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, g analitica tale che g è un prolungamento di f; tale g è uguale al prolungamento continuo di f in a.

Dimostrazione. Sia $C(a; 0, r)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a.
Per ogni $z \in C(a; 0, r)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \;.$$

Proviamo 1 ⇒ 2. Supponiamo che a sia una singolarità rimovibile per f. Si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \;.$$

Si ha quindi

$$\lim_{z \to a} f(z) = a_0 \;.$$

Evidentemente 2 ⇒ 3.
Evidentemente 3 ⇒ 4.
Proviamo 4 ⇒ 1.
Supponiamo che esista $r \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $\mathrm{B}(a, r) - \{a\} \subset A$ $f|(\mathrm{B}(a, r) - \{a\})$ limitata.
Sia $(\forall z \in \mathbf{C})\; 0 < |z - a| < R\; |f(z)| \le M$.
Sia $n \in \mathbf{N}^*$.
Per ogni $\rho < R$ sia Γ_ρ la traiettoria associata alla circonferenza $\{z \in \mathbf{C};\; |z - a| = \rho\}$.

Si ha
$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z)(z-a)^{n-1}\, dz \ .$$
Si ha quindi
$$|a_{-n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it}) e^{(n-1)it}\, dt \right| \le$$
$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it}) \rho^{n-1} e^{(n-1)it} \rho i e^{it}\, dt \right| \le M\rho^n \ .$$
Si ha quindi
$$|a_{-n}| \le \lim_{\rho \to 0} M\rho^n = 0 \ .$$
Quindi $a_{-n} = 0$.
Proviamo $1 \Rightarrow 5$. Supponiamo che a sia una singolarità rimovibile per f.
Sia
$$g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \begin{cases} f(z) & \text{per } z \in A \\ a_0 & \text{per } z = a \end{cases} \ .$$
g è un prolungamento di f.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(a, r)$ si ha
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ .$$
Quindi g è analitica in $\mathrm{B}(a; r)$;
g è analitica in A.
Quindi g è analitica su $\mathrm{B}(a; r) \cup A = A \cup \{a\}$.
Proviamo $5 \Rightarrow 1$.
Infatti $5 \Rightarrow 3$ e $3 \Rightarrow 1$.

Definizione 25.9.4.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che a sia una singolarità rimovibile per f; allora l'unica $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, g analitica tale che g è un prolungamento di f si chiama prolungamento analitico di f in a.*

25.9.5 Ordine degli zeri di una funzione analitica

Definizione 25.9.5.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; si dice che a è uno zero per f se $f(a) = 0$.*

Definizione 25.9.5.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a uno zero per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; si dice che a è uno zero per f di ordine $\ge m$ se esiste $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica tale che*
$$(\forall z \in A)\ f(z) = (z-a)^m g(z) \ .$$
Se $m = 1$ si dice che a è uno zero almeno semplice, se $m = 2$ si dice che a è uno zero almeno doppio, se $m = 3$ si dice che a è uno zero almeno triplo, ecc.

Teorema 25.9.5.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a uno zero per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $(a_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di punto iniziale a; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è uno zero per f di ordine $\geq m$;*
2. *$(\forall n = 0, 1, \ldots, m-1)$ $a_n = 0$;*
3. *$(\forall n = 0, 1, \ldots, m-1)$ $f^n(a) = 0$;*
4. *la funzione*
$$A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{f(z)}{(z-a)^m}$$
ha in a una singolarità rimovibile;
5. *$f(z) \preceq_{z \to a} (z-a)^m$.*

Dimostrazione. Proviamo $1 \Rightarrow 2$.
Supponiamo che a sia uno zero di ordine $\geq m$; esiste $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica tale che
$$(\forall z \in A) \ f(z) = (z-a)^m g(z) \ .$$
Sia $C(a; r)$ il cerchio massimo di centro a contenuto in a; sia $(b_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a.
Per ogni $z \in C(a; r)$ si ha
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \ .$$
Si ha quindi
$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n+m} \ .$$
Da ciò segue 2
Proviamo $2 \Rightarrow 4$.
Per ogni $z \in C(a; r)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \ .$$
Quindi
$$\frac{f(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \longrightarrow_{z \to a} b_m; .$$
Quindi vale 4.
$4 \Rightarrow 1$ è immediata.
$2 \Leftrightarrow 3$ e $4 \Leftrightarrow 5$ sono immediate.

Definizione 25.9.5.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a uno zero per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; si dice che a è uno zero per f di ordine m se esiste $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica tale che $g(a) \neq 0$ e tale che*

$$(\forall z \in A)\ f(z) = (z-a)^m g(z)\ .$$

Se $m = 1$ si dice che a è uno zero semplice, se $m = 2$ si dice che a è uno zero doppio, se $m = 3$ si dice che a è uno zero triplo, ecc.

Teorema 25.9.5.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a uno zero per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $(a_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di punto iniziale a; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è uno zero per f di ordine m;*
2. *$(\forall n = 0, 1, \ldots, m-1)$ $a_n = 0$ e $a_m \neq 0$;*
3. *$(\forall n = 0, 1, \ldots, m-1)$ $f^n(a) = 0$ e $f^m(a) \neq 0$;*
4. *la funzione*
$$A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{f(z)}{(z-a)^m}$$
ha in a una singolarità rimovibile e, se g è il prolungamento analitico di f in a, si ha $g(a) \neq 0$;
5. *esiste $b \in \mathbf{C}^*$ tale che $f(z) \sim_{z\to a} b(z-a)^m$.*

Dimostrazione. Proviamo $1 \Rightarrow 2$.
Supponiamo che a sia uno zero di ordine $\leq m$; esiste $g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica tale che $g(a) \neq 0$ e tale che

$$(\forall z \in A)\ f(z) = (z-a)^m g(z)\ .$$

Sia $C(a; r)$ il cerchio massimo di centro a contenuto in a; sia $(b_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a.
Per ogni $z \in C(a; r)$ si ha $b_0 \neq 0$ e

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n\ .$$

Si ha quindi

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n+m}\ .$$

Da ciò segue 2
Proviamo $2 \Rightarrow 4$.

Per ogni $z \in C(a;r)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m} \; .$$

Quindi

$$\frac{f(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-a)^{n-m} \longrightarrow_{z\to a} a_m; .$$

Quindi $\frac{f(z)}{(z-a)^m}$ ha in a una singolarità rimovibile.
Sia $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$ il prolungamento analitico di $\frac{f(z)}{(z-a)^m}$.
Si ha $g(a) = a_m \neq 0$.
Quindi vale 4.
Proviamo $4 \Rightarrow 1$.
Sia $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$ il prolungamento analitico di $\frac{f(z)}{(z-a)^m}$.
Si ha $g(a) =\neq 0$.
Per ogni $z \in A - \{a\}$ si ha $\frac{f(z)}{(z-a)^m} = g(z)$; Essendo a uno zero di f, da ciò segue che per ogni $z \in A$ si ha $f(z) = (z-a)^m g(z)$; quindi vale 1.
Dall'espressione dei coefficienti a_n segue poi $2 \Leftrightarrow 3$.
Proviamo $4 \Rightarrow 5$.
Se è vera 4 si ha

$$\frac{f(z)}{(z-a)^m} \sim_{z\to a} g(a) \; .$$

Da ciò segue 5.
L'implicazione $\Rightarrow 4$ è immediata.

25.9.6 Lo spazio $\mathbf{S}_N$

Sia ∞ un elemento non appartenente a $\mathbf{R}^N$; poniamo

$$\mathbf{S}_N = \mathbf{R}^N \cup \{\infty\} \; .$$

In $\mathbf{S}_1$ si pone $|\infty| = +\infty$; in $\mathbf{S}_N$ si pone $\|\infty\| = +\infty$.
Sia $N \in \mathbf{N}^*$; sia $U \subset \mathbf{S}_N$, $a \in \mathbf{S}_N$; se $a \in \mathbf{R}^N$ si dice che U è un intorno di a in $\mathbf{S}_N$ se risulta:

$$(\exists r \in \mathbf{R}_+^*)\mathrm{B}(a,r) \subset U \; ;$$

se $a = \infty$ si dice che U è un intorno di a in $\mathbf{S}_N$ se risulta:

$$(\exists M \in \mathbf{R}_+^*)\{x \in \mathbf{S}_N; \|x\| > M\} \subset U \; .$$

$\mathbf{S}_N$ con tale sistema di intorni si chiama spazio topologico $\mathbf{S}_N$ o sfera N-dimensionale.
Se $X \in \tau_R$, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbf{S}_N$ si ha

$$f(x) \to_{x\to a} \infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbf{R}_+^*)(\exists V \text{ in torno di } a)(\forall x \in V \cap A) \; \|f(x)\| > M$$

e anche

$$f(x) \to_{x\to a} \infty \Leftrightarrow \|f(x)\| \to_{x\to a} +\infty \; ,$$

dove la seconda convergenza è rispetto agli spazi topologici $(X, \overline{\mathbf{R}})$.

25.9.7 Singolarità polare

Definizione 25.9.7.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; si dice che a è una singolarità polare (o un polo) per f se si ha*

1. $\{n \in \mathbf{Z};\ n < 0\ a_n \neq 0\} \neq \emptyset$;
2. $\{n \in \mathbf{Z};\ n < 0\ a_n \neq 0\}$ *finito.*

Teorema 25.9.7.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è una singolarità polare per f;*
2. *f è convergente rispetto a $(\mathbf{C}, \mathbf{S}_2)$ in a e si ha $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$;*
3. *esiste $R > 0$ tale $\mathrm{B}(a; R) - \{a\} \subset A$, tale che $(\forall z \in \mathbf{C},\ 0 < |z - a| < R)\ f(z) \neq 0$ e tale che la funzione*
$$\mathrm{B}(a; R) - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)}$$
ha in a una singolarità rimovibile con prolungamento analitico g tale che $g(a) = 0$.

Dimostrazione. Sia $C(a; 0, r)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a.
Per ogni $z \in C(a; 0, r)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n \ .$$
Proviamo $1 \Rightarrow 2$.
Sia
$$M = \{n \in \mathbf{N}^*;\ a_{-n} \neq 0\} \ .$$
L'insieme M è non vuoto e finito.
Sia $m = \max(M)$.
Per ogni $z \in C(a; 0, r)$ si ha
$$f(z) = \sum_{n=m}^{1} a_{-n}(z - a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \ .$$
Si ha quindi
$$f(z) = \sim_{z \to a} \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} \longrightarrow_{z \to a} \infty \ .$$

Proviamo $2 \Rightarrow 3$.
Supponiamo $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
Esiste quindi $R > 0$ tale che $\mathrm{B}(a; R) - \{a\} \subset A$ e tale che per ogni $z \in \mathrm{B}(a; R) - \{a\}$ $f(z) \neq 0$.
Sia

$$h : \mathrm{B}(a; R) - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)} .$$

Si ha $\lim_{z \to 0} \frac{1}{f(z)} = 0$.
Quindi a è una singolarità rimovibile per h con prolungamento analitico tale che $g(a) = 0$.
Quindi vale 3.
Proviamo che $3 \Rightarrow 1$.
Sia $(b_n)_{n \in N}$ i coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a; essendo $g(a) = 0$ si ha $b_0 = 0$; essendo g diversa dalla costante 0, esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che $b_n \neq 0$; sia

$$m = \min(\{n \in \mathbf{N}^*;\ b_n \neq 0\}) .$$

Per ogni $z \in \mathrm{B}(a; R)$, $z \neq a$, si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} .$$

Quindi

$$\frac{1}{(z-a)^m f(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \longrightarrow_{z \to a} b_m .$$

Quindi

$$(z-a)^m f(z) \longrightarrow_{z \to a} \frac{1}{b_m} .$$

Quindi la funzione $(z-a)^m f(z)$ ha in a una singolarità rimovibile.
Sia $h : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$ è il prolungamento analitico di $(z-a)^m f(z)$.
Si ha $h(a) = \frac{1}{b_m} \neq 0$.
Sia $(c_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a.
Si ha $c_0 = h(a) \neq 0$.
Per ogni $z \in C(a; 0, r)$ si ha

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} .$$

Si ha quindi $a_n = 0$ per ogni $n < -m$ e $a_{-m} = c_0 \neq 0$.
Quindi a è una singolarità polare per f.

25.9.8 Ordine di un polo

Definizione 25.9.8.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a un polo per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; si dice che a è un polo per f di ordine $\leq m$ se*

$$(\forall n \in \mathbf{Z},\ n < -m)\ a_n = 0\ .$$

Teorema 25.9.8.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a un polo per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è un polo di ordine $\leq m$ per f;*
2. *la funzione*
$$A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow (z-a)^m f(z)$$
ha in a una singolarità rimovibile;
3. *$f(z) \succeq_{z\to a} \frac{1}{(z-a)^m}$.*

Enunciato

Definizione 25.9.8.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a un polo per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; si dice che a è un polo per f di ordine m se si ha*

1. *$a_{-m} \neq 0$;*
2. *$(\forall n \in \mathbf{Z},\ n < -m)\ a_n = 0$.*

Teorema 25.9.8.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $m \in \mathbf{N}^*$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è un polo di ordine m per f;*
2. *la funzione*
$$A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow (z-a)^m f(z)$$
ha in a una singolarità rimovibile e $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$;
3. *esiste $R > 0$ tale $\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \subset A$, tale che $(\forall z \in \mathbf{C},\ 0 < |z-a| < R\ f(z) \neq 0$ e tale che la funzione*
$$\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)}$$
ha in a una singolarità rimovibile e il prolungamento analitico g ha in a uno zero di ordine m;

4. esiste $b \in \mathbf{C}^*$ tale che

$$f(z) \sim_{z \to a} \frac{b}{(z-a)^m} \ .$$

Dimostrazione. Sia $C(a;0,r)$ la corona circolare aperta massimale associata ad a; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a.
Proviamo $1 \Rightarrow 2$.
Per ogni $z \in C(a;0,r)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=m}^{1} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ .$$

Si ha quindi

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=m}^{1} a_{-n}(z-a)^{m-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{m+n} \ .$$

Si ha quindi $\lim_{z \to a}(z-a)^m f(z) = a_{-m} \neq 0$.
Proviamo $2 \Rightarrow 1$.
Sia g il prolungamento analitico di $(z-a)^m f(z)$ in a. Sia $(b_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a.
Per ogni $z \in C(a;0,r)$ si ha

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

e $b_0 \neq 0$.
Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \ .$$

Si ha quindi $a_{-m} = b_0 \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.
Quindi a è un polo di ordine m per f.
Proviamo $2 \Rightarrow 3$.
Sia $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, g analitica, g prolungamento di

$$A \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow (z-a)^m f(z) \ ;$$

si ha $g(a) \neq 0$.
Esiste $R > 0$ tale che $\mathrm{B}(a;R) - \{a\} \subset A$ e tale che per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)$ $g(z) \neq 0$; per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R) - \{a\}$ si ha allora $f(z) \neq 0$.
La funzione

$$k : \mathrm{B}(0,R) \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{g(z)}$$

è analitica.

Sia $(b_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di k di punto iniziale a; per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)$, $z \neq a$ si ha

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^m f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \ ,$$

con $b_0 = \frac{1}{g(a)} \neq 0$.
Quindi si ha

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n+m} \ .$$

Si ha quindi $\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$.
Quindi $\frac{1}{f(z)}$ ha in a una singolarità rimovibile con prolungamento analitico g avente in a uno 0 di ordine m.
Proviamo $3 \Rightarrow 2$.
Sia

$$g : \mathrm{B}(a;R) \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{per } z \in A \\ 0 & \text{per } z = a \end{cases}$$

il prolungamento analitico.
Sia $(b_n)_{n\in N}$ i coefficienti della serie di Taylor di g di punto iniziale a; essendo a uno 0 di ordine m per g, si ha $b_n = 0$ per $n = 0, 1, \ldots, m-1$ e $b_m \neq 0$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)$, $z \neq a$, si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \ .$$

Quindi

$$\frac{1}{(z-a)^m f(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \longrightarrow_{z\to a} b_m \ .$$

Quindi

$$(z-a)^m f(z) = \longrightarrow_{z\to a} \frac{1}{b_m} \ .$$

Quindi $(z-a)^m f(z)$ ha in a una singolarità rimovibile, con prolungamento continua h tale che $h(a) \neq 0$.
Quindi vale 2.
La $2 \Leftrightarrow 7$ è immediata.

Teorema 25.9.8.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a uno zero per f; sia $m \in \mathbf{N}^*$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è uno zero di ordine m per f;*

2. *esiste* $R > 0$ *tale* $\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \subset A$, *tale che* ($\forall z \in \mathbf{C}$, $0 < |z-a| < R$ $f(z) \neq 0$ *e tale che la funzione*

$$\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)}$$

è analitica e ha in a *un polo di ordine* m.

Dimostrazione. Proviamo $1 \Rightarrow 2$.
Essendo gli zeri di f isolati, esiste quindi $R > 0$ tale che $\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \subset A$ e tale che per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)-\{a\}$ $f(z) \neq 0$.
La funzione

$$h : \mathrm{B}(a;R)-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{f(z)}{(z-a)^m}$$

è prolungabile in a in una funzione analitica g tale che $g(a) \neq 0$;
Sia

$$k : \mathrm{B}(a;R)-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{(z-a)^m}{f(z)} \ .$$

Si ha $\lim_{z \to 0} k(z) = \frac{1}{g(a)}$.
Quindi k è prolungabile in a in una funzione analitica l.
Sia $(b_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Taylor di l di punto iniziale a; per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)$, $z \neq a$ si ha

$$\frac{(z-a)^m}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \ .$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \ ,.$$

con $b_0 \neq 0$.
Quindi la funzione

$$\mathrm{B}(a;R)-\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)}$$

è analitica e ha in a un polo di ordine m.
Proviamo $2 \Rightarrow 1$.
Sia

$$h : \mathrm{B}(a;R) \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)} \ .$$

Sia $(b_n)_{n \in N}$ i coefficienti della serie di Laurent di h associata alla singolarità a; essendo a un polo di ordine m per h, si ha $b_{-m} \neq 0$ e $b_n = 0$ per ogni $n < -m$.
Per ogni $z \in \mathrm{B}(a;R)$, $z \neq a$, si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n (z-a)^n \ .$$

Quindi

$$\frac{(z-a)^n}{f(z)} = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n (z-a)^{n+m} \longrightarrow_{z \to a} b_{-m} \, .$$

Quindi $\frac{(z-a)^n}{f(z)}$ è prolungabile in una funzione analitica k sempre diversa da 0.
Quindi $\frac{f(z)}{(z-a)^m}$ è prolungabile nella funzione analitica $\frac{1}{k}$.
Quindi a è uno zero di ordine m per f.

25.9.9 Singolarità essenziale

Definizione 25.9.9.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; si dice che a è una singolarità essenziale f se $\{n \in \mathbf{Z};\ n < 0\ a_n \neq 0\}$ è infinito.*

Teorema 25.9.9.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora è vera una ed una sola delle seguenti affermazioni:*

1. *a è una singolarità rimovibile per f;*
2. *a è una singolarità polare per f;*
3. *a è una singolarità essenziale per f.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.9.9.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *a è una singolarità essenziale per f;*
2. *f non è convergente rispetto a $(\mathbf{C}, \mathbf{S}_2)$ in a;*
3. *per ogni $w \in \mathbf{C}$, per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, per ogni $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ esiste $z \in \mathrm{B}(a;\delta) \cap A$ tale che $|f(z) - w| < \varepsilon$;*
4. *per ogni $c \in \mathbf{R}_+^*$, per ogni $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ esiste $z \in \mathrm{B}(a;\delta) \cap A$ tale che $|f(z)| = c$.*

Enunciato

Esercizio. Studiare le singolarità delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa definite naturalmente

1. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;
2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$;
3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$;
4. $f(z) = \sin \frac{1}{z}$;
5. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

Risoluzione.

1. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0\} \; .$$
0 è l'unico punto singolare di $\mathrm{dom}(f)$.
Si ha
$$\frac{\sin z}{z} \sim_{z \to 0} \frac{z}{z} = 1 \; .$$
Quindi si ha $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.
Quindi f ha in 0 una singolarità rimovibile.
2. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0\} \; .$$
0 è l'unico punto singolare di $\mathrm{dom}(f)$.
Si ha
$$\frac{\sin z}{z^2} \sim_{z \to 0} \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z} \; .$$
Quindi f ha in 0 una singolarità polare con polo di ordine 1.
3. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0\} \; .$$
0 è l'unico punto singolare di $\mathrm{dom}(f)$.
Si ha in $\overline{\mathbf{R}}$ $\lim_{z \to 0, z \in R, z > 0} e^{\frac{1}{z}} = +\infty$ e $\lim_{z \to 0, z \in R, z < 0} e^{\frac{1}{z}} = 0$; quindi f non è convergente rispetto a $\mathbf{S}_2$ per $z \to 0$.
Quindi f ha in 0 una singolarità essenziale.
4. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0\} \; .$$
0 è l'unico punto singolare di $\mathrm{dom}(f)$.
Per $x \in \mathbf{R}$ la funzione $\sin \frac{1}{x}$ non è convergente per $x \to 0$; quindi f non è convergente rispetto a $\mathbf{S}_2$ per $z \to 0$.
Quindi f ha in 0 una singolarità essenziale.
5. Si ha $\sin z = 0$ se e solo se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale $z = k\pi$.
Si ha quindi
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{k\pi ;\; k \in \mathbf{Z}\} \; .$$
L'insieme dei punti singolari di f è $\{k\pi ;\; k \in \mathbf{Z}\}$.
Sia
$$g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \sin z \; .$$
Per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.
Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $g'(z) = \cos z$.
Sia $k \in \mathbf{Z}$.
Si ha
$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \text{ pari} \\ -1 & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \; .$$
Quindi si ha $f(k\pi) = 0$ e $f'(k\pi) \neq 0$.
Quindi $k\pi$ è uno zero di ordine 1 per g.
Quindi $k\pi$ è un polo di ordine 1 per f.

25.10 Teorema dei residui

25.10.1 Residuo

Definizione 25.10.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata alla singolarità a; allora a_{-1} si chiama residuo di f in a e si indica* $\mathrm{Res}(f; a)$.

Teorema 25.10.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $R \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}'(a; R) - \{a\} \subset A$; sia Γ_R la traiettoria associata alla circonferenza $\{z \in \mathbf{C};\ |z - a| = R\}$; allora si ha si ha*

$$\mathrm{Res}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \ .$$

sia $(a_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti

Dimostrazione. Segue dall'espressione dei coefficienti di Laurent.

Teorema 25.10.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che a sia una singolarità rimovibile per f; allora si ha*

$$\mathrm{Res}(f; a) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 25.10.1.3 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che a sia un polo per f di ordine 1; allora la funzione $(z - a)f(z)$ è convergente per $z \to a$ e si ha*

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) \ .$$

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n \in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata ad a; si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \ .$$

Quindi

$$(z - a) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n+1} \ .$$

Quindi

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = a_{-1} \ .$$

Teorema 25.10.1.4 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che esista $b \in \mathbf{C}^*$ tale che*

$$f(z) \sim_{z \to a} \frac{b}{z-a} \ ;$$

allora f ha in a un polo semplice e si ha

$$\mathrm{Res}(f;a) = b \ .$$

Dimostrazione. Per il teorema sopra f ha in a un polo semplice; si ha $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) - b$.

Teorema 25.10.1.5 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia a una singolarità polare per f; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}(a;r) - \{a\} \subset A$; sia $(\forall z \in \mathrm{B}(a;r) - \{a\})\, f(z) \neq 0$; sia $g : \mathrm{B}(a;r) \longrightarrow \mathbf{C}$ il prolungamento analitico di*

$$\mathrm{B}(a;r) - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{f(z)}$$

in a; sia $g'(a) \neq 0$; allora f ha in a un polo semplice e si ha

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{g'(a)} \ .$$

Dimostrazione. g ha in a uno zero semplice; quindi f ha in a un polo semplice.
Si ha poi

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{1}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{1}{g'(a)} \ .$$

Teorema 25.10.1.6 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che a sia un polo per f di ordine m; allora la funzione $\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^n f(z))$ è convergente per $z \to a$ e si ha*

$$\mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m f(z)) \ .$$

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Laurent associata ad a; si ha

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n \ .$$

Quindi

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^{n+m} \ .$$

Quindi

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+m)(n+m-1)\ldots(n+2)a_n(z-a)^{n+1} \; .$$

Quindi

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m f(z)) = (m-1)(m-2)\ldots 1\, a_{-1} = (m-1)!a_{-1} \; .$$

Esercizio. Studiare le singolarità e determinare i residui delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa definite naturalmente

1. $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$;
2. $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$;
3. $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$;
4. $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$;
5. $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$.

Risoluzione.

1. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0,1\} \; .$$
L'insiemi dei punti singolari di f è $\{0,1\}$.
Si ha
$$\frac{z+1}{z(z-1)} \sim_{z\to 0} -\frac{1}{z} \; .$$
Quindi f ha in 0 un polo di ordine 1 e si ha $\mathrm{Res}(f;0) = -1$.
Si ha
$$\frac{z+1}{z(z-1)} \sim_{z\to 1} \frac{2}{z-1} \; .$$
Quindi f ha in 1 un polo di ordine 1 e si ha $\mathrm{Res}(f;1) = 2$.
2. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0,1\} \; .$$
L'insiemi dei punti singolari di f è $\{0,1\}$.
Si ha
$$\frac{z+1}{z(z-1)} \sim_{z\to 0} -\frac{1}{z^2} \; .$$
Quindi f ha in 0 un polo di ordine 2.
Si ha $f(z)z^2 = \frac{z+1}{z-1}$; quindi
$$\frac{d}{dz}\frac{z+1}{z-1} = -\frac{2}{(z-1)^2} \; .$$
Si ha
$$\lim_{z\to 0} -\frac{2}{(z-1)^2} = -2 \; .$$
Quindi si ha $\mathrm{Res}(f;0) = -2$.
Si ha
$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} \sim_{z\to 1} \frac{2}{z-1} \; .$$
Quindi f ha in 1 un polo di ordine 1 e si ha $\mathrm{Res}(f;1) = 2$.

3. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0\} \ .$$
0 è l'unico punto singolare di $\mathrm{dom}(f)$.
Si ha in $\overline{\mathbf{R}}$ $\lim_{z\to 0, z\in R, z>0} ze^{\frac{1}{z}} = +\infty$ e $\lim_{z\to 0, z\in R, z<0} ze^{\frac{1}{z}} = 0$; quindi f non è convergente rispetto a $\mathbf{S}_2$ per $z \to 0$.
Quindi f ha in 0 una singolarità essenziale.
Per ogni $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ si ha
$$f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n+1} = z+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n+1} =$$
$$z+1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-m+1)!}z^m + 1 + z \ .$$
Quindi la serie di Laurent di f in 0 è $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-m+1)!}z^m + 1 + z$
Per $m = -1$, si ha quindi $\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{2}$.
4. Si ha $e^z - 1 = 0$ se e solo $e^z = 1$; quindi se e solo se se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale $z = 2k\pi i$.
Si ha quindi
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{2k\pi i;\ k \in \mathbf{Z}\} \ .$$
L'insieme dei punti singolari di f è $\{2k\pi i;\ k\in\mathbf{Z}\}$.
Per ogni $k \in \mathbf{Z}$ sia $z_k = 2\pi k i$.
Per $k = 0$ si ha $z_0 = 0$; si ha
$$\frac{z}{e^z-1} \sim_{z\to 0} \frac{z}{z} = 1 \ .$$
Quindi f ha in 0 una singolarità rimovibile; si ha quindi $\mathrm{Res}(f;0) = 0$.
Sia $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$.
Sia
$$g : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{e^z-1}{z} \ .$$
g è analitica.
Per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$, si ha $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.
Si ha $g(z_k) = 0$
Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $g'(z) = \frac{ze^z - e^z + 1}{z^2}$.
Quindi
$$g(z_k) = \frac{2k\pi i - 1 + 1}{-4k^2\pi^2} = -\frac{1}{2k\pi} \neq 0 \ .$$
Quindi f ha in z_k un polo semplice e si ha $\mathrm{Res}(f;z_k) = \frac{1}{g'(z_k)} = -2k\pi$.
5. Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{C} - \{0,1\} \ .$$
0 è l'unico punto singolare di f.
Si ha
$$\frac{\sin z}{z^4)} \sim_{z\to 0} -\frac{z}{z^4} = \frac{1}{z^3} \ .$$
Quindi f ha in 0 un polo di ordine 3.
Per ogni $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ si ha
$$f(z) = \frac{1}{z^4}\sin z = z^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-3} =$$

$$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-3} .$$

Quindi La serie di Laurent di f in 0 è $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-3}$.
si ha quindi $\mathrm{Res}(f;0) = -\frac{1}{6}$.

Teorema 25.10.1.7 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}(a;r) - \{a\} \subset A$; allora $f|\mathrm{B}(a;r) - \{a\}$ ammette primitiva se e solo se* $\mathrm{Res}(f;a) = 0$.

Dimostrazione. Sia $0 < R < r$; sia Γ_R la traiettoria associata alla circonferenza $\{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = R\}$; allora si ha si ha

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz .$$

L'affermazione allora segue dalla condizione affinchè f ammetta primitiva vista.

Osservazione 25.10.1.1 Si osservi che

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{-n}}{1-n}\frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

è una primitiva di f su $\mathrm{B}(a,r) - \{a\}$.

Teorema 25.10.1.8 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $a \in \mathrm{C}_C(A)$; sia a un punto singolare per A; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\mathrm{B}(a;r) - \{a\} \subset A$; allora $\mathrm{Res}(f;a)$ è quell'unico $R \in \mathbf{C}$ tale che $f(z) - \frac{R}{z-a}$ ammette primitiva in* $\mathrm{B}(a;r) - \{a\}$.

Dimostrazione. Segue da sopra.

25.10.2 Teorema dei residui per i cicli omologhi a 0

Teorema 25.10.2.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $S \subset A$; sia S finito; sia $f : A - S \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $\mathcal{C}$ un ciclo in $A - S$; sia $\mathcal{C}$ di classe lipschitziana; sia $\mathcal{C}$ omologo a 0 in A; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s \in S} j(a;\mathcal{C})\mathrm{Res}(f;a) .$$

Dimostrazione. Sia Per ogni $a \in S$ sia $R_a > 0$ tale che $\mathrm{B}'(a;R_a) - \{a\} \subset A - S$.
Sia φ_a la traiettoria associata a $\{z \in \mathbf{C};\ |z-a| = R_a\}$.
Sia

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} - \sum_{a \in S} j(a,\mathcal{C})\varphi_a .$$

$\mathcal{C}_1$ è un ciclo omologo a 0 in $A - S$: infatti per ogni $z \in A - S$ si ha $j(z;\mathcal{C}_1) = 0$.

Si ha quindi

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz = 0\ .$$

Quindi

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{a\in S} j(a;\mathcal{C}) \int_{\varphi_a} f(z)\,dz = \sum_{a\in S} j(a;\mathcal{C}) 2\pi i \mathrm{Res}(f;a) =$$

$$2\pi i \sum_{s\in S} j(a;\mathcal{C})\mathrm{Res}(f;a)\ .$$

25.10.3 Teorema dei residui per le traiettorie chiuse omotope a 0

Teorema 25.10.3.1 *Sia $A\subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $S\subset A$; sia S finito; sia $f: A-S \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia φ una traiettoria chiusa in $A-S$; sia φ di classe lipschitziana; sia φ omotopa a 0 in A; allora si ha*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s\in S} j(a;\varphi)\mathrm{Res}(f;a)\ .$$

Dimostrazione. Infatti una traiettoria chiusa omotopa a 0 è un ciclo omologo a 0.

25.10.4 Teorema dei residui per il bordo di un dominio

Teorema 25.10.4.1 *Sia $A\subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $S\subset A$; sia S finito; sia $f: A-S \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $D\subset A$; sia D un dominio con bordo di classe lipschitziana; sia $\partial D\subset A-S$; allora si ha*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s\in S\cap D} \mathrm{Res}(f;a)\ .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ catena di classe lipschitziana tale che $[\mathcal{C}]$ sia la classe associata a ∂D.
Per il teorema dei residui per i cicli omologhi a 0, si ha

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s\in S} j(a;\mathcal{C})\mathrm{Res}(f;a)\ .$$

Si ha $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\partial D} f(z)\,dz$.
Per ogni $a\in S$ si ha $a \in \overset{\circ}{D}$ o $a\in A-D$; se $a\in \overset{\circ}{D}$, si ha $j(a,\mathcal{C})=1$; se $a\in A-D$, si ha $j(a,\mathcal{C})=0$.
Si ha quindi

$$\sum_{s\in S} j(a;\mathcal{C})\mathrm{Res}(f;a) = \sum_{s\in S\cap \overset{\circ}{D}} \mathrm{Res}(f;a) = \sum_{s\in S\cap D} \mathrm{Res}(f;a)\ .$$

Da ciò segue la tesi.

Esercizio. Calcolare
$$\int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)}\,dz$$
dove Γ è la circonferenza
$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = \frac{1}{2}\}\ ,$$
orientata canonicamente.

Risoluzione. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z(z-1)}$$
Sia
$$D = \left\{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq \frac{1}{2}\right\}\ .$$
D è un dominio regolare di $\mathbf{C}$ e di ha $\partial D = \Gamma$.
Si ha $\{0,1\} \cap D = \{0\}$.
Si ha
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \sim_{z\to 0} -\frac{1}{z}\ .$$
Si ha quindi $\mathrm{Res}(f;0) = -1$.
Si ha quindi
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i\ .$$

Esercizio. Calcolare
$$\int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)}\,dz$$
dove Γ è la circonferenza
$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 2\}\ ,$$
orientata canonicamente.

Risoluzione. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z(z-1)}$$
Sia
$$D = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq 2\}\ .$$
D è un dominio regolare di $\mathbf{C}$ e di ha $\partial D = \Gamma$.
Si ha $\{0,1\} \cap D = \{0,1\}$.
Si ha
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \sim_{z\to 0} -\frac{1}{z}\ .$$
Si ha quindi $\mathrm{Res}(f;0) = -1$.
Si ha
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \sim_{z\to 1} \frac{1}{z-1}\ .$$
Si ha quindi $\mathrm{Res}(f;1) = 1$.
Si ha quindi
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(-1+1) = 0\ .$$

Esercizio. Calcolare
$$\int_\Gamma \frac{z+5}{(z-5i)^3(z^2+4)}\,dz$$

dove Γ è la circonferenza
$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 3\}\ ,$$
orientata canonicamente.

Risoluzione. Sia
$$f : \mathbf{C} - \{5i, 2i, -2i\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z+5}{(z-5i)^3(z^2+4)}$$
Sia
$$D = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq 3\}\ .$$
D è un dominio regolare di $\mathbf{C}$ e di ha $\partial D = \Gamma$.
Si ha $\{5i, 2i, -2i\} \cap D = \{2i, -2i\}$.
Si ha
$$f(z) = \frac{z+5}{(z-5i)^3(z+2i)(z-2i)} \sim_{z \to 2i} \frac{2i+5}{(-3i)^3 4i(z-2i)} = \frac{5+2i}{27i \cdot 4i \cdot (z-2i)} =$$
$$-\frac{5+2i}{108}\frac{1}{z-2i} = \left(-\frac{5}{108} - \frac{1}{54}i\right)\frac{1}{z-2i}\ .$$
Si ha quindi $\mathrm{Res}(f; 2i) = -\frac{5}{108} - \frac{1}{54}i$.
Si ha
$$f(z) = \frac{z+5}{(z-5i)^3(z+2i)(z-2i)} \sim_{z \to -2i} \frac{-2i+5}{(-7i)^3(-4i)(z+2i)} = -\frac{5-2i}{343i \cdot 4i \cdot (z+2i)} =$$
$$\frac{5-2i}{1372}\frac{1}{z+2i} = \left(\frac{5}{1372} - \frac{1}{686}i\right)\frac{1}{z+2i}\ .$$
Si ha quindi $\mathrm{Res}(f; -2i) = \frac{5}{1372} - \frac{1}{686}i$.
Si ha quindi
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{5}{108} - \frac{1}{54}i + \frac{5}{1372} - \frac{1}{686}i\right) = 2\pi i\left(-\frac{395}{9261} - \frac{185}{9261}i\right) = \frac{370}{9261}\pi - \frac{790}{9261}\pi i\ .$$

25.11 Calcolo di integrali

25.11.1 Integrale di una funzione razionale del seno e del coseno

Teorema 25.11.1.1 *Siano $A(x,y)$, $B(x,y)$ polinomi complessi in due variabili; sia $B(x,y)$ diverso dal polinomio nullo; sia*
$$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ B(x,y) \neq 0\}\ ;$$
sia
$$R : M \longrightarrow \mathbf{C}, (x,y) \longrightarrow \frac{A(x,y)}{B(x,y)}\ ;$$
sia
$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\} \subset M\ ;$$
sia Γ la circonferenza
$$\{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}\ ,$$
orientata canonicamente; allora si ha
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = -i\int_\Gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}\,dz\ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} R(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} R(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}) i e^{it} \frac{1}{i} e^{-it}\, dt =$$

$$-i \int_\Gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}\, dz\ .$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt\ .$$

Risoluzione. Posto $t' = \pi - t$ si ha
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t'}(-1)\, dt' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$
Si ha quindi
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$
Quindi
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$
Si ha poi
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$
Quindi
$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$
Sia Γ la traiettoria associata a $\{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$.
Si ha
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt = -i\frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{2+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}\frac{1}{z}\, dz = -\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{1}{2+\frac{1}{2i}\frac{z^2-1}{z}}\frac{1}{z}\, dz =$
$-\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{2iz}{z^2+4iz-1}\frac{1}{z}\, dz = \int_\Gamma \frac{1}{z^2+4iz-1}\, dz.$
Si ha $z^2+4iz-1 = 0$ se e solo se $z = -2i \pm \sqrt{3}i$.
Sia

$$f : \mathbf{C} - \{(-2-\sqrt{3})i, (-2+\sqrt{3})i\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z^2+4iz-1}$$

Sia

$$D = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq 1\}\ .$$

D è un dominio con bordo di classe lipschitziana di $\mathbf{C}$ e di ha $\partial D = \Gamma$.
Si ha $\{(-2-\sqrt{3})i, (-2+\sqrt{3})i\} \cap D = \{(-2+\sqrt{3})i\}$.
La funzione f ha un polo di ordine 1 in $(-2+\sqrt{3})i$
Il residuo di f in 0 è

$$\lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}(z-(-2+\sqrt{3})i)\frac{1}{z^2+4iz-1} = \lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\frac{1}{z-(-2-\sqrt{3})i} = \frac{1}{2\sqrt{3}i}\ .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2+4iz-1}\, dz = 2\pi i\frac{1}{2i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ .$$

25.11.2 Integrale su R di una funzione razionale

Teorema 25.11.2.1 *Siano* $A(z)$, $B(z)$ *polinomi complessi; sia* $(\forall x \in \mathbf{R})$ $B(x) \neq 0$*; sia* $\mathrm{gr}(B(z)) \geq \mathrm{gr}(A(z)) + 2$*; sia*

$$R : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \;;$$

allora l'integrale improprio su un intervallo aperto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$$

è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Si ha $|R(x)| \simeq_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$; quindi $\int_0^{+\infty} R(x)\, dx$ è assolutamente convergente.
Analogamente si vede che $\int_{-\infty}^0 R(x)\, dx$ è assolutamente convergente.

Teorema 25.11.2.2 *Siano* $A(z)$, $B(z)$ *polinomi complessi; sia* $(\forall x \in \mathbf{R})$ $B(x) \neq 0$*; sia* $\mathrm{gr}(B(z)) \geq \mathrm{gr}(A(z)) + 2$*; sia*

$$R : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \;;$$

sia $S = \{z \in \mathbf{C};\ B(z) = 0\}$*; indichiamo ancora con* R *la funzione razionale complessa*

$$\mathbf{C} - D \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{A(z)}{B(z)} \;;$$

allora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R; a) \;.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\, dx \;.$$

Per ogni $r > 0$ sia

$$D_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq r,\ \Im z \geq 0\} \;.$$

D_r è un dominio lipschitziano e ∂D_r si scompone in

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = r,\ \Im z \geq 0\}$$

parametrizzata da

$$\varphi_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow re^{it}$$

e $[-r, r]$ parametrizzata da

$$\psi_r : [-r, r] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow t \ .$$

Scegliamo r abbastanza grande in modo che sia $\{a \in S; \Im a > 0\} \subset D_r$.
Si ha allora

$$\int_{\partial D_r} R(z)\, dz = \int_0^{\pi} R(re^{it}) rie^{it}\, dt + \int_{-r}^{r} R(t)\, dt \ .$$

Si ha allora

$$\int_{\partial D_r} R(z)\, dz = \sum_{a \in S, \Im a > 0} \operatorname{Res}(R; a) \ .$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} R(re^{it}) rie^{it}\, dt + \int_{-r}^{r} R(t)\, dt = \sum_{a \in S, \Im a > 0} \operatorname{Res}(R; a) \ .$$

Si ha $R(z) \simeq_{z \to \infty} \frac{1}{z^2}$; quindi esiste $r_0 > 0$, esiste $M > 0$ tale che per $|z| \geq r_0$ si ha $|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$.
Quindi

$$\left| \int_0^{\pi} R(re^{it}) rie^{it}\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} |R(re^{it}) r|\, dt \leq \frac{\pi M}{r} \longrightarrow_{r \to \infty} 0 \ .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi \sum_{a \in S, \Im a > 0} \operatorname{Res}(R; a) \ .$$

Osservazione 25.11.2.1 Considerando al posto del dominio D_r il dominio

$$D'_r = \{z \in \mathbf{C};\ |x| \leq r,\ \Im z \leq 0\}$$

si vede che si ha anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = -2\pi i \sum_{a \in S, \Im a < 0} \operatorname{Res}(R; a) \ .$$

Esercizio. Calcolare con il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\, dx \ .$$

Risoluzione. Se $z \in \mathbf{C}$, si ha $z^2 + 1 = 0$ se e solo se $z = \pm i$.
Sia

$$R : \mathbf{C} - \{i, -1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z^2 + 1} \ .$$

Si ha

$$\frac{1}{R(z)} = z^2 + 1 = (z + i)(z - i) \ .$$

Quindi $\frac{1}{R(z)}$ ha in i uno zero di ordine 1.

Quindi $R(z)$ ha in i un polo di ordine 1.
Si ha $(\frac{1}{R})'(z) = 2z$; Quindi si ha

$$\operatorname{Res}(R; i) = \frac{1}{2i} .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi .$$

Esercizio. Calcolare con il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx .$$

Risoluzione. Se $z \in \mathbf{C}$, si ha $z^2+1=0$ se e solo se $z = \pm i$.
Sia

$$R : \mathbf{C} - \{i, -1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{(z^2+1)^2} .$$

Si ha

$$\frac{1}{R(z)} = (z^2+1) = (z+i)^2(z-i)^2 .$$

Quindi $\frac{1}{R(z)}$ ha in i uno zero di ordine 2.
Quindi $R(z)$ ha in i un polo di ordine 2.
Si ha

$$\operatorname{Res}(R; i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2} R(z) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = \lim_{z \to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} .$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}\, dx .$$

Risoluzione. Se $z \in \mathbf{C}$, si ha $z^4 - z^2 + 1 = 0$ se e solo se $z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Consideriamo l'equazione complessa

$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i .$$

Si ha $|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i| = 1$ e $\frac{1}{3}\pi \in \arg(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$; quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) .$$

Consideriamo l'equazione complessa

$$z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i .$$

Si ha $|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i| = 1$ e $-\frac{1}{3}\pi \in \arg(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$; quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) .$$

Sia

$$R : \mathbf{C} - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z^4 - z^2 + 1} .$$

Le singolarità di $\mathrm{dom}(f)$ con parte immaginaria positiva sono

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} .$$

Per $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ si ha

$$R(z) = \frac{1}{z^4 - z^2 + 1} = \frac{1}{(z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i))(z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i))(z - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i))(z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i))}$$

$$\sim_{z \to \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \frac{1}{(\sqrt{3} + i)i\sqrt{3}} \frac{1}{z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = \frac{1}{3i - \sqrt{3}} \frac{1}{z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} =$$

$$\frac{3i + \sqrt{3}}{-12} \frac{1}{z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i .$$

Si ha quindi $\mathrm{Res}(R; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i$.
Per $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ si ha

$$R(z) = \frac{1}{z^4 - z^2 + 1} = \frac{1}{(z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i))(z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i))(z - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i))(z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i))}$$

$$\sim_{z \to \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \frac{1}{-\sqrt{3}i(-\sqrt{3} + i)} \frac{1}{z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = \frac{1}{3i + \sqrt{3}} \frac{1}{z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} =$$

$$\frac{3i - \sqrt{3}}{-12} \frac{1}{z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i .$$

Si ha quindi $\mathrm{Res}(R; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i$.
Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}i \right) = 2\pi i(-\frac{1}{2}i) = \pi .$$

Per simmetria si ha

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\, dx .$$

Risoluzione. Se $z \in \mathbf{C}$, si ha $z^6 + 1 = 0$ se e solo se $z^6 = -1$.
Consideriamo l-equazione complessa

$$z^6 = -1 .$$

Si ha $|-1| = 1$ e $\pi \in \arg(-1))$; quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$\begin{cases} z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_1 = i \\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_4 = -i \\ z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases} .$$

Sia

$$R : \mathbf{C} - \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z^6+1} \ .$$

Le singolarità di dom(f) con parte immaginaria positiva sono

$$\{z_0, z_1, z_2\} \ .$$

Per $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ si ha

$$R(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)} \sim_{z \to z_0}$$

$$\frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)(z_0-z_4)(z_0-z_5)} \, \frac{1}{z-z_0} =$$

$$\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)i} \, \frac{1}{z-z_0} = \frac{4}{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+3i)i} \, \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{3i - 3\sqrt{3}i} \, \frac{1}{z-z_0} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{i-\sqrt{3}} \, \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{3} \frac{i+\sqrt{3}}{-4} \, \frac{1}{z-z_0} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i \right) \frac{1}{z-z_0} \ .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(R; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i \ .$$

Per $z_1 = i$ si ha

$$R(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)} \sim_{z \to z_1}$$

$$\frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_1-z_5)} \, \frac{1}{z-z_1} =$$

$$\frac{1}{(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)2i(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)} \, \frac{1}{z-z_1} = \frac{8}{-4 \cdot (-12) \cdot i} \, \frac{1}{z-z_1} =$$

$$\frac{1}{6i} \, \frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{6}i \, \frac{1}{z-z_1} \ .$$

]

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(R; i) = -\frac{1}{6}i \ .$$

Per $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ si ha

$$R(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)} \sim_{z \to z_0}$$

$$\frac{1}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)(z_2-z_5)} \, \frac{1}{z-z_2} =$$

$$\frac{1}{-\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)i(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)(-\sqrt{3}+i)} \, \frac{1}{z-z_2} = \frac{4}{-\sqrt{3} \cdot 4(-\sqrt{3}+3i)i} \, \frac{1}{z-z_2} =$$

$$\frac{1}{3i + 3\sqrt{3}i} \, \frac{1}{z-z_2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{i+\sqrt{3}} \, \frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{3} \frac{i-\sqrt{3}}{-4} \, \frac{1}{z-z_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i \right) \frac{1}{z-z_2} \ .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(R; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i \ .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i - \frac{1}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i \right) = 2\pi i(-\frac{1}{3}i) = \frac{2}{3}\pi \ .$$

Per simmetria si ha

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx = \frac{\pi}{3} \ .$$

25.11.3 Integrale su R di una funzione razionale assolutamente convergente per $e^{i\alpha x}$

Teorema 25.11.3.1 *Siano* $A(z)$, $B(z)$ *polinomi complessi; sia* $(\forall x \in \mathbf{R})\ B(x) \neq 0$*; sia* $\mathrm{gr}(B(z)) \geq \mathrm{gr}(A(z)) + 2$*; sia*

$$R : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \ ;$$

sia $\alpha \in \mathbf{R}$*; allora l'integrale improprio complesso su un intervallo aperto*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Si ha $|R(x)e^{i\alpha x}| = |R(x)| \simeq_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$; quindi $\int_0^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx$ è assolutamente convergente.
Analogamente si vede che $\int_{-\infty}^{0} R(x)e^{i\alpha x}\,dx$ è assolutamente convergente.

Teorema 25.11.3.2 *Siano* $A(z)$, $B(z)$ *polinomi complessi; sia* $(\forall x \in \mathbf{R})\ B(x) \neq 0$*; sia* $\mathrm{gr}(B(z)) \geq \mathrm{gr}(A(z)) + 2$*; sia*

$$R : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \ ;$$

sia $S = \{z \in \mathbf{C};\ B(z) = 0\}$*; indichiamo ancora con* R *la funzione razionale complessa*

$$\mathbf{C} - D \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{A(z)}{B(z)} \ ;$$

sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$*; allora si ha*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} R(x)e^{i\alpha x}\,dx \ .$$

Per ogni $r > 0$ sia

$$D_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq r,\ \Im z \geq 0\} \ .$$

D_r è un dominio lipschitziano e ∂D_r si scompone in

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = r,\ \Im z \geq 0\}$$

parametrizzata da

$$\varphi_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow re^{it}$$

e $[-r,r]]$ parametrizzata da

$$\psi_r : [-r,r] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow t \ .$$

Scegliamo r abbastanza grande in modo che sia $\{a \in S; \Im a > 0\} \subset D_r$.
Si ha quindi

$$\int_{\partial D_r} R(z)e^{i\alpha z}\, dz = \int_0^{\pi} R(re^{it})e^{i\alpha re^{it}} rie^{it}\, dt + \int_{-r}^{r} R(t)e^{i\alpha t}\, dt \ .$$

Si ha

$$\int_{\partial D_r} R(z)e^{i\alpha z}\, dz = \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \ .$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} R(re^{it})e^{i\alpha re^{it}} rie^{it}\, dt + \int_{-r}^{r} R(t)e^{i\alpha t}\, dt = \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \ .$$

Si ha $R(z) \simeq_{z\to\infty} \frac{1}{z^2}$; quindi esiste $r_0 > 0$, esiste $M > 0$ tale che per $|z| \geq r_0$ si ha $|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$.
Per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha $0 \leq \sin t$; quindi,essendo $\alpha > 0$, $-r\alpha \sin t \leq 0$; quindi $|e^{-r\sin t}| \leq 1$.
Quindi

$$\left|\int_0^{\pi} R(re^{it})e^{i\alpha re^{it}} rie^{it}\, dt\right| \leq \int_0^{\pi} |R(re^{it})e^{i\alpha re^{it}} rie^{it}|\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} |R(re^{it})e^{i\alpha r(\cos t + i\sin t} r|\, dt = \int_0^{\pi} |R(re^{it})e^{i\alpha r\cos t}e^{-\alpha r \sin t} r|\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} |R(re^{it})e^{-r\alpha \sin t} r|\, dt \leq \frac{M}{r^2} r\pi = \frac{\pi M}{r} \longrightarrow_{r\to\infty} 0 \ .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \ .$$

Osservazione 25.11.3.1 Sia $\alpha \leq 0$; procedendo nello stesso modo sotto l'asse reale si vede che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{a\in S, \Im a<0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \ .$$

Osservazione 25.11.3.2 Supponiamo che $A(z)$ e $B(z)$ siano polinomi a coefficienti reali.

Passando alle parti reali e alle parti immaginarie, per $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx = \Re\left(2\pi i \sum_{a\in S,\Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)\right)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx = \Im\left(2\pi i \sum_{a\in S,\Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)\right)\ .$$

Per $\alpha \leq 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx = -\Re\left(2\pi i \sum_{a\in S,\Im <>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)\right)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx = -\Im\left(2\pi i \sum_{a\in S,\Im a<0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)\right)\ .$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\ .$$

Risoluzione. Sia $z \in \mathbf{C}$; si ha $z^2+1=0$ se e solo se $z^2=-1$; quindi se e solo se $z=\pm i$.
Sia

$$f:\mathbf{C}-\{i,-1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{e^{iz}}{z^2-1}\ .$$

Si ha

$$f(z)\frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z^2-i)(z+i)} \sim_{z\to i} \frac{e^{-1}}{2i(z-i)} = -\frac{1}{2e}i\frac{1}{z=i}\ .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(f;i) = -\frac{1}{2e}i\ .$$

Per il teorema sopra si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \Re\left(2\pi i(-\frac{1}{2e}i)\right) = \frac{\pi}{e}\ .$$

Quindi, per simmetria, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\cos(2\pi i\xi x)\,dx = \frac{\pi}{2e}\ .$$

25.11.4 Integrale su R di una funzione razionale per $e^{i\alpha x}$ convergente

Teorema 25.11.4.1 *Siano $A(z)$, $B(z)$ polinomi complessi; sia $(\forall x \in \mathbf{R})\ B(x) \neq 0$; sia $\mathrm{gr}(B(x)) \geq \mathrm{gr}(A(x))+1$; sia*

$$R:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)}\ ;$$

sia $S = \{z \in \mathbf{C};\ B(z) = 0\}$*; indichiamo ancora con* R *la funzione razionale complessa*

$$\mathbf{C} - D \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{A(z)}{B(z)}\ ;$$

sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$*; allora l'integrale improprio su un intervallo aperto* $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx$ *è convergente e si ha*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\ .$$

Dimostrazione. Per ogni $x_1, x_2, y > 0$ sia

$$D_{x_1,x_2,y} = \{z \in \mathbf{C};\ -x_1 < \Re z < x_2,\ 0 \le \Im z \le y\}\ .$$

$D_{x_1,x_2,y}$ è un dominio lipschitziano e $\partial D_{x_1,x_2,y}$ si scompone nei segmenti orientati $\Gamma_1 = [-x_1, x_2]$, $\Gamma_2 = [x_2, x_2 + iy]$, $\Gamma_3 = [x_2 + iy, -x_1 + iy]$, $\Gamma_4 = [-x_1 + iy, -x_1]$. Scegliamo x_1, x_2, y abbastanza grandi in valore assoluto in modo che sia

$$\{a \in S; \Im a > 0\} \subset D_{x_1,x_2,y}\ .$$

Si ha allora

$$\int_{\partial D_{x_1,x_2,y}} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\ .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz =$$

$$2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\ .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - 2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) =$$

$$\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\ .$$

Si ha quindi

$$\left|\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - 2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\right| \le$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| + \left|\int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| + \left|\int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right|\ .$$

Si ha $R(z) \simeq_{z\to\infty} \frac{1}{z2}$; quindi esiste $R > 0$, esiste $M > 0$ tale che per $|z| \geq R$ si ha $|R(z)| \leq \frac{M}{|z|}$.
Posto
$$A = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \geq R\}$$
per ogni $z \in A$ si ha $|zR(z)| \leq M$.
Supposto $x_1 > R$ si ha
$$\left|\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| = \left|\int_0^y R(x_2+it)ie^{i\alpha x_2-\alpha t}\,dt\right| \leq \int_0^y |R(x_2+it)ie^{i\alpha x_2-\alpha t}|\,dt =$$
$$\int_0^y |R(x_2+it)|e^{-\alpha t}\,dt = \int_0^y |(x_2+it)R(x_1+it)|\frac{1}{|x_2+it|}e^{-\alpha t}\,dt \leq$$
$$\int_0^y M\frac{1}{|x_2+it|}e^{-\alpha t}\,dt = M\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x_2^2+t^2}}e^{-\alpha t}\,dt \leq M\int_0^y \frac{1}{x_2}e^{-\alpha t}\,dt =$$
$$\frac{M}{x_2}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^y = \frac{M}{\alpha x_2}(1-e^{-\alpha y}) \leq \frac{M}{\alpha x_2}\ .$$
Si ha quindi
$$\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz \leq \frac{M}{\alpha x_2}\ .$$
Analogamente si vede che si ha
$$\int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz \leq \frac{M}{\alpha x_1}\ .$$
Supposto $y > R$ si ha
$$\left|\int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| = \left|\int_{-x_1}^{x_2} R(t+iy)e^{i\alpha t-\alpha y}\,dt\right| \leq \int_{-x_1}^{x_2} |R(t+iy)e^{i\alpha t-\alpha y}|\,dt =$$
$$\int_{-x_1}^{x_2} |R(t+iy)|e^{-\alpha y}\,dt = e^{-\alpha y}\int_{-x_1}^{x_2} |(t+iy)R(t+iy)|\frac{1}{|t+iy|}\,dt \leq$$
$$e^{-\alpha y}\int_{-x_1}^{x_2} M\frac{1}{|t+iy|}\,dt = Me^{-\alpha y}\int_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{t^2+y^2}}\,dt \leq Me^{-\alpha y}\int_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{y}\,dt =$$
$$\frac{M(x_1+x_2)}{y}e^{-\alpha y}\ .$$
Si ha quindi
$$\left|\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - 2\pi i\sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)\right| \leq$$
$$\frac{M}{\alpha x_2} + \frac{M}{\alpha x_1} + \frac{M(x_1+x_2)}{y}e^{-\alpha y}\ .$$

Per $y \to +\infty$ si trova

$$\left| \int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\, dz - 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \right| \leq$$

$$\frac{M}{\alpha x_2} + \frac{M}{\alpha x_1} \, .$$

Si ha

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (+\infty,+\infty)} \frac{M}{\alpha x_2} + \frac{M}{\alpha x_1} = 0 \, .$$

Quindi si ha

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (+\infty,+\infty)} \int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\, dz - 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) = 0 \, ,$$

cioè

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (+\infty,+\infty)} \int_{-x_1}^{x_1} R(x)e^{i\alpha x}\, dx - 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) = 0 \, ,$$

cioè

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (+\infty,+\infty)} \int_{-x_1}^{x_1} R(x)e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \, .$$

Osservazione 25.11.4.1 *Sia* $\alpha < 0$*; procedendo nello stesso modo e agendo sotto l'asse reale, si vede che si ha l'integrale su un intervallo aperto*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\, dx$$

è convergente e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{a \in S, \Im a < 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) \, .$$

Osservazione 25.11.4.2 Supponiamo che $A(z)$ e $B(z)$ siano polinomi a coefficienti reali.
Sia $\alpha \in \mathbf{R}^*$.
Passando alle parti reali e alle parti immaginarie si vede che gli integral;i impropri su un intervallo aperto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\, dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\, dx$$

sono convergenti.

Per $\alpha > 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx = \Re\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\right)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx = \Im\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\right) .$$

Per $\alpha < 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx = -\Re\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im <>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\right)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx = -\Im\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a<0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a)\right) .$$

25.11.5 Valore principale di un integrale improprio

Definizione 25.11.5.1 $f : \mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$; *sia* f *continua; si dice che l'integrale improprio* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ *ammette valore principale in* 0 *se*

1. *l'integrale improprio* $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ *è convergente;*
2. *l'integrale improprio* $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *è convergente;*
3. *la funzione*

$$\varphi :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}\delta \longrightarrow \int_{-1}^{-\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{1} f(x)\,dx$$

è convergente in $\mathbf{C}$ *per* $\delta \to 0$*;*

in tal caso

$$\int_{-\infty} -1 + \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-1}^{-\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{1} f(x)\,dx\right) + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$$

si chiama valore principale dell'integrale improprio di f *su* $\mathbf{R}$ *in* 0 *e si indica*

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

La definizione si generalizza al caso di una funzione definita su un intervallo, privato di un numero finito di punti.

25.11.6 Valore principale dell'integrale di una funzione razionale per $e^{i\alpha x}$ in un polo semplice

Teorema 25.11.6.1 *Siano $A(z)$, $B(z)$ polinomi complessi; sia $(\forall x \in \mathbf{R}^*)$ $B(x) \neq 0$; sia $B(0) = 0$; sia $\mathrm{gr}(B(z)) \geq \mathrm{gr}(A(z)) + 1$; sia*

$$R : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \ ;$$

supponiamo che R abbia un polo semplice in 0; sia $S = \{z \in \mathbf{C};\ B(z) = 0\}$; indichiamo ancora con R la funzione razionale complessa

$$\mathbf{C} - D \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{A(z)}{B(z)} \ ;$$

sia $\alpha \in \mathbf{R}^*_+$; allora l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\,dx$ ammette valore principale e si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \left(\sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0) \right) .$$

Dimostrazione. Per ogni $x_1, x_2, y > 0 > 0$ e tali che $-x_1 < -\delta$ e $\delta < x_2$ sia

$$D_{x_1,x_2,y,\delta} = \{z \in \mathbf{C};\ -x_1 < \Re z < x_2,\ 0 \leq \Im z \leq y\} \cup \{z \in \mathbf{C}; |z| < \delta,\ \Im z < 0\} .$$

$D_{x_1,x_2,y,\delta}$ è un dominio lipschitziano e $\partial D_{x_1,x_2,y,\delta}$ si scompone nei segmenti orientati $\Gamma_1 = [\delta, x_2]$, $\Gamma_2 = [x_2, x_2 + iy]$, $\Gamma_3 = [x_2 + iy, -x_1 + iy]$, $\Gamma_4 = [-x_1 + iy, -x_1]$, $\Gamma_5 = [-x_1, -\delta]$ e nella semicirconferenza $\Gamma_6 = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = \delta,\ \Im z \leq 0\}$ di punto iniziale $-\delta$ e punto finale δ.
Scegliamo x_1, x_2 abbastanza grandi e y abbastanza piccolo in modo che sia $\{a \in S; \Im a > 0\} \subset D_{x_1,x_2,y}$.
Si ha allora

$$\int_{\partial D_{x_1,x_2,y,\delta}} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2\pi i \left(\sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \mathrm{Res}(R(z)e^{iz}; 0) \right) .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz +$$

$$\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_6} R(z)e^{i\alpha z}\,dz =$$

$$2\pi i \left(\sum_{a \in S, \Im a > 0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0) \right) .$$

Esiste g analitica in un intorno di 0 tale che

$$R(z)e^{i\alpha z} = \frac{\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)}{z} + g(z) \; .$$

Per δ abbastanza piccolo si ha quindi

$$\int_{\Gamma_6} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{\Gamma_6}\left(\frac{\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)}{z} + g(z)\right)dz =$$

$$\int_{\Gamma_6}\frac{\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)}{z}\,dz + \int_{\Gamma_6} g(z)\,dz = \pi i\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0) + \int_{\Gamma_6} g(z))\,dz \; .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz +$$

$$\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \pi i\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0) + \int_{\Gamma_6} g(z))\,dz =$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a) + \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right) \; .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz +$$

$$\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_6} g(z))\,dz =$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right) \; .$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz -$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right) =$$

$$-\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - \int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - \int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz - \int_{\Gamma_6} g(z)\,dz \; .$$

Quindi

$$\left|\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz -\right.$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)+\frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right)\Bigg| \leq$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right|+\left|\int_{\Gamma_3} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right|+\left|\int_{\Gamma_4} R(z)e^{i\alpha z}\,dz\right|+\left|\int_{\Gamma_6} g(z)\,dz\right| .$$

Procedendo come nella dimostrazione del teorema sopra si trova

$$\Bigg|\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz+\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz-$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)+\frac{1}{2}\mathrm{Res}(R;0)\right)\Bigg| \leq$$

$$\frac{M}{\alpha x_1}+\frac{M}{\alpha x_2}+\frac{M(x_1+x_2)}{y}e^{-\alpha y}+\left|\int_{\Gamma_6} g(z)\,dz\right| .$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\int_{\Gamma_6} g(z)\,dz\right| = 0\;;.$$

Quindi, passando al limite per $y\to\infty$ e per $\delta\to 0$ si ha

$$\Bigg|\int_{\Gamma_5} R(z)e^{i\alpha z}\,dz+\int_{\Gamma_1} R(z)e^{i\alpha z}\,dz-$$

$$2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a>0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)+\frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right)\Bigg| \leq$$

$$\frac{M}{\alpha x_1}+\frac{M}{\alpha x_2} .$$

Poi si procede come nel teorema sopra.

Osservazione 25.11.6.1 *Sia $\alpha<0$; procedendo nello stesso modo e sotto l'asse reale, si vede che si ha*

$$\mathrm{pr.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = -2\pi i\left(\sum_{a\in S,\Im a<0}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};a)+\frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z};0)\right) .$$

Osservazione 25.11.6.2 Supponiamo che $A(z)$ e $B(z)$ siano polinomi a coefficienti reali.
Sia $\alpha\in\mathbf{R}^*$.
Passando alle parti reali e alle parti immaginarie si vede che gli integrali impropri su un intervallo aperto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx$$

ammettono parte principale.
Per $\alpha > 0$ si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\, dx =$$

$$\Re\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0)\right)$$

e

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\, dx =$$

$$\Im\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0)\right) .$$

Per $\alpha < 0$ si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\, dx =$$

$$-\Re\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im <>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0)\right)$$

e

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\, dx =$$

$$-\Im\left(2\pi i \sum_{a\in S, \Im a<0} \mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; a) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(R(z)e^{i\alpha z}; 0)\right) .$$

Il teorema si generalizza al caso di funzioni razionali aventi un numero finito di poli sull'asse x tutti semplici.

Teorema 25.11.6.2 *L'integrale improprio* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$ *ammette valore principale e si ha*

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i .$$

Dimostrazione. Infatti la funzione $\frac{1}{z}$ ha un polo semplice in 0 e si ha $\mathrm{Res}(\frac{e^{iz}}{z}, 0) = 1$.

Teorema 25.11.6.3 *L'integrale improprio* $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *è convergente e si ha*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Dimostrazione. Per il teorema sopra $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$ ammette valore principale uguale a $i\pi$.
Quindi la parte immaginaria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ammette valore principale uguale a π.
Quindi gli integrali impropri $\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\, dx$ e $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ sono convergente e si ha

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi \ .$$

Per simmetria si ha

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \ .$$

Da sopra si ricava dunque

$$2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi \ .$$

Da ciò la tesi.

Esercizio. Siano $a, r > 0$; dire se

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 - r^2}\, dx$$

ammette valore principale e in caso affermativo determinarlo.
Risoluzione. Sia

$$f : \mathbf{C} - \{r, -r\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{ze^{iaz}}{z^2 - r^2} \ .$$

Sia $R(z)$ la funzione razionale complessa

$$R(z) = \frac{z}{z^2 - r^2} \ .$$

Si ha $\mathrm{gr}(z^2 - r^2) = 2$ e $\mathrm{gr}(z) = 1$; quindi $\mathrm{gr}(z^2 - r^2) = \mathrm{gr}(z) + 1$.
Si ha

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{z^2 - r^2}{z} = \frac{z - r)(z + r)}{z} \ ;$$

quindi $\frac{1}{R(z)}$ ha in $\pm r$ uno zero di ordine 1; quindi $R(z)$ ha in $\pm r$ un polo di ordine 1.
Quindi per il teorema sopra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 - a^2}\, dx$$

ammette valore principale e si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 - a^2}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\mathrm{Res}(f; r) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(f; -r) \right) \ .$$

Si ha

$$\mathrm{Res}(f; r) = \lim_{z \to r} (z - r) f(z) = \lim_{z \to r} (z - r) \frac{ze^{iaz}}{(z - r)(z + r)} = \lim_{z \to r} \frac{ze^{iaz}}{z + r} = \frac{re^{iar}}{2r} = \frac{1}{2} e^{iar} =$$

$$\frac{1}{2}(\cos(ar) + i \sin(ar))$$

e

$$\mathrm{Res}(f; -r) = \lim_{z \to -r} (z + r) f(z) = \lim_{z \to -r} (z + r) \frac{ze^{iaz}}{(z - r)(z + r)} = \lim_{z \to -r} \frac{ze^{iaz}}{z - r} = \frac{-re^{-iar}}{-2r} = \frac{1}{2} e^{-iar} =$$

$$\frac{1}{2}(\cos(ar) - i\sin(ar)) \ .$$

Si ha quindi

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 - a^2}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4}(\cos(ar) + i\sin(ar)) + \frac{1}{4}(\cos(ar) - i\sin(ar)) \right) = \pi\cos(ar)i \ .$$

Passando alla parte immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(iax)}{x^2 - a^2}\, dx$$

ammette valore principale e si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx = \cos(ar)i \ .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin(iax)}{x^2 - a^2}\, dx \ \text{e} \ \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(iax)}{x^2 - a^2}\, dx$$

ammettono parti principali; per simmetria si ha

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx = \text{pr.v.} \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx \ .$$

Quindi

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx = 2 \cdot \text{pr.v.} \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx \ .$$

Quindi

$$\text{pr.v.} \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2 - a^2}\, dx \right) = \frac{\pi}{2}\cos(ar) \ .$$

25.11.7 Lemma di Jordan

Teorema 25.11.7.1 *Sia $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; allora si ha*

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi} \ .$$

Dimostrazione. Infatti la restrizione del seno a $[0, \frac{\pi}{2}]$ è convessa; quindi per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $\sin(t\frac{\pi}{2}) get$; posto $x = t\frac{\pi}{2}$, si ha $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.

Nel teorema che segue si utilizza il fatto che una funzione continua a tratti su un intervallo compatto è limitata e che una funzione continua strettamente positiva su un intervallo compatto ammette minimo, strettamente positivo.

Teorema 25.11.7.2 Lemma di Jordan. *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; sia $R \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\rho : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia ρ di classe C^1 a tratti; sia $(\forall t \in [0, \pi])\ \rho(t) > 0$; sia*

$$\varphi_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it} \ ;$$

sia $\varphi_R([0, \pi]) \subset A$; sia

$$D = \{t \in [0, 2\pi];\ \rho \ \textit{derivabile in}\ t\} \ ;$$

sia $M' \in \mathbf{R}_+^*$*; sia*

$$(\forall t \in D) \ \left|\frac{d}{dt}\rho(t)e^{it}\right| \leq M';$$

sia

$$m = \min_{t\in[0,\pi]} \rho(t);$$

allora si ha

$$\left|\int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz\right| \leq \frac{\pi M'}{\alpha m} \sup_{z\in\varphi([0,\pi])} |f(z)| \ .$$

Dimostrazione. Sia

$$M_R = \sup_{z\in\varphi([0,\pi])} |f(z)| \ .$$

Tenendo conto del teorema sopra,si ha

$$\left|\int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{i\alpha R\rho(t)e^{it}} f(R\rho e^{it}) R\frac{d}{dt}\rho(t)e^{it}\, dz\right| \leq$$

$$\int_0^\pi \left|e^{i\alpha R\rho(t)(\cos t + i\sin t)} f(R\rho e^{it}) R\frac{d}{dt}\rho(t)e^{it}\right| \, dz \leq$$

$$\int_0^\pi \left|e^{i\alpha R\rho(t)\cos t}\right| \cdot \left|e^{-\alpha R\rho(t)\sin t}\right| \cdot \left|f(R\rho e^{it})\right| \cdot |R \cdot \left|\frac{d}{dt}\rho(t)e^{it}\right| \, dz \leq$$

$$M_R M' R \int_0^\pi e^{-\alpha R\rho(t)\sin t}\, dz \leq M_R M' R \int_0^\pi e^{-\alpha Rm\sin t}\, dz =$$

$$M_R M' R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha Rm\sin t}\, dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\alpha Rm\sin t}\, dz\right) =$$

$$2M_R M' R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha Rm\sin t}\, dz \leq [2M_R M' R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha Rm\frac{2}{\pi}t}\, dz =$$

$$2M_R M' R \left[-\frac{\pi}{2\alpha Rm} e^{-\alpha Rm\frac{2}{\pi}t}\right]_0^{\frac{pi}{2}} = 2M_R M' R \frac{\pi}{2\alpha Rm}(1 - e^{\alpha Rm}) \leq$$

$$2M_R M' R \frac{\pi}{2\alpha Rm} = \frac{\pi M'}{\alpha m} M_R \ .$$

Teorema 25.11.7.3 *Sia* $A \subset \mathbf{C}$*; sia* $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* f *continua; sia* $R \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* $\rho : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$*; sia* ρ *di classe* C^1 *a tratti; sia* $(\forall t \in [0,\pi])\ \rho(t) > 0$*; per ogni* $R \in \mathbf{R}^*$ *sia*

$$\varphi_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it} \ ;$$

per ogni $R \in \mathbf{R}^*$ *sia* $\varphi_R([0,\pi]) \subset A$*; sia* f *convergente per* $z \to \infty$ *e sia* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$*; allora la funzione*

$$\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}, R \longrightarrow \int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz$$

è convergente per $z \to \infty$ e si ha

$$\lim_{z\to\infty} \int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0 \;.$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\lim_{R\to\infty} \sup_{z\in\varphi_R([0,\pi])} |f(z)| = 0$.

Osservazione 25.11.7.1 Il teorema sopra si estende al caso in cui esista $B \subset \mathbf{R}_+^*$ non limitato superiormente tale che per ogni $R \in B$ sia $\varphi([0,\pi]) \subset A$;

Teorema 25.11.7.4 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; sia $R \in \mathbf{R}_+^*$; sia $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$; $\rho : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia ρ di classe C^1 a tratti; sia $(\forall t \in [0,\pi])\ \rho(t) > 0$; per ogni $R \in \mathbf{R}^*$ sia*

$$\varphi_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it} \;;$$

per ogni $R \in \mathbf{R}^*$ sia $\varphi_R([0,\pi]) \subset A$; sia f convergente per $z \to 0$ e sia $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$; allora la funzione

$$\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}, R \longrightarrow \int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz$$

è convergente per $z \to 0$ e si ha

$$\lim_{z\to\infty} \int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0 \;.$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\lim_{R\to 0} \sup_{z\in\varphi_R([0,\pi])} |f(z)| = 0$.

Osservazione 25.11.7.2 Il teorema sopra si estende al caso in cui esista $B \subset \mathbf{R}_+^*$ tale che $0 \in \overline{B}$ e tale che per ogni $R \in B$ sia $\varphi([0,\pi]) \subset A$;

Osservazione 25.11.7.3 Sia $\alpha < 0$. Quanto visto sopra vale anche per la traiettoria

$$\varphi_R : [-\pi, 0] \longrightarrow R, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it}$$

per l'integrale

$$\int_{\varphi_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz \;.$$

Osservazione 25.11.7.4 Sia $\alpha > 0$. Quanto visto sopra vale anche per la traiettoria

$$\varphi_R : [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \longrightarrow R, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it}$$

per l'integrale

$$\int_{\varphi_R} e^{\alpha z} f(z)\, dz \;.$$

Osservazione 25.11.7.5 Sia $\alpha < 0$. Quanto visto sopra vale anche per la traiettoria

$$\varphi_R : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \longrightarrow R, t \longrightarrow R\rho(t)e^{it}$$

per l'integrale

$$\int_{\varphi_R} e^{\alpha z} f(z)\, dz \;.$$

25.11.8 Limite dell'integrale su un arco in un polo semplice

Teorema 25.11.8.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{C}$; sia $a \in A$; sia $f : A - \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f abbia in a un polo semplice; sia $R \in \mathbf{R}^*$; sia $\mathrm{B}(a, R) \subset A$; siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia $\alpha < \beta$; per ogni $r \in]0, R[$ sia*

$$\varphi_r : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow a + re^{it} \;;$$

allora la funzione

$$]0, R[\longrightarrow \mathbf{C}, r \longrightarrow \int_{\varphi_r} f(z)\, dz$$

è convergente per $r \to 0$ e si ha

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = (\beta - \alpha) i \mathrm{Res}(f, a) \;.$$

Dimostrazione. Esiste $g : \mathrm{B}(0, R) \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica tale che per ogni $z \in \mathrm{B}(a; R)$

$$f(z) = \frac{\mathrm{Res}(f; a)}{z - a} + g(z) \;.$$

Per ogni $r \in]0, R[$ si ha quindi

$$\int_{\varphi'' r} f(z)\, dz = \int_{\varphi_r} \left(\frac{\mathrm{Res}(f; a)}{z - a} + g(z) \right) dz =$$

$$\int_{\varphi_r} \frac{\mathrm{Res}(f; a)}{z - a}\, dz + \int_{\varphi_r} g(z)\, dz = \mathrm{Res}(f; a) \int_\alpha^\beta \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\, dt + \int_{\varphi_r} g(z))\, dz = \;.$$

$$\mathrm{Res}(f; a) i(\beta - \alpha) + \int_{\varphi_r} g(z))\, dz \;.$$

La funzione g è limita su $\mathrm{B}'(a, R)$; esiste $M \in \mathbf{R}_+^*$ tale che per ogni $z \in \mathrm{B}'(a, R)$ si ha $|g(z)| \leq M$.
Si ha

$$\left| \int_{\varphi_r} g(z)\, dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta g(a + re^{it}) ri\, dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |g(a + re^{it})| r\, dt \leq$$

$$\int_\alpha^\beta Mr\, dt = Mr(\beta - \alpha) \longrightarrow_{r \to 0} 0 \;.$$

Si ha quindi

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\varphi_r} g(z)\, dz = 0 \;;.$$

Si ha quindi

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = (\beta - \alpha) i \mathrm{Res}(f, a) \;.$$

25.11.9 L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$

Teorema 25.11.9.1 *La funzione*

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \textit{per } x > 0 \\ 1 & \textit{per } x = 0 \end{cases}$$

è assolutamente integrabile su $[0, +\infty[$ *e si ha*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Dimostrazione. La funzione f è continua e per ogni $x > 0$ si ha

$$|\frac{\sin^2 x}{x^2}| = \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \ .$$

Quindi f è assolutamente integrabile.
Analogamente si vede che la funzione

$$f_1 :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è assolutamente integrabile su $]-\infty, 0][$.
Per simmetria si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\, dx \ .$$

Quindi la funzione

$$f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è assolutamente integrabile su $\mathbf{R}$ e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 f_1(x)\, dx + \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \ .$$

Quindi si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx \ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ si ha

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1 - e^{2ix}}{x^2} \right) \ .$$

Sia

$$g : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} \ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ si ha
$$f_2(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\Re(g(x)) \; .$$
Proviamo che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ ammette valore principale in 0.
Sia $r \in \mathbf{R}_+^*$.
Si ha per $|x| > r$
$$|g(x)| = |\frac{1-e^{2ix}}{x^2}| \leq \frac{1+|-e^{2ix}|}{x^2} = \frac{2}{x^2} \; ; .$$
Quindi gli integrali impropri $\int_{-\infty}^{-r} g(x)\,dx$ e $\int_r^{+\infty} g(x)\,dx$ sono assolutamente convergenti e quindi convergenti.
Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ ammette valore principale se e solo se la funzione
$$]0,r[\longrightarrow \mathbf{R}, \varepsilon \longrightarrow \int_{-r}^{-\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{r} g(x)\,dx$$
è convergente per $\varepsilon \to 0$ e in tal caso si ha
$$\text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-r} g(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-r}^{-\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{r} g(x)\,dx\right) + \int_{r}^{+\infty} g(x)\,dx \; .$$
Per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $\varepsilon < r$, sia
$$D_{r,\varepsilon} = \{z \in \mathbf{C};\ \varepsilon \leq |z| \leq r, \Im z \geq 0\} \; .$$
$D_{r,\varepsilon}$ è un dominio con bordo di classe lipschitziana e $\partial D_{x_1,x_2,y,\delta}$ si scompone nel segmento orientato $\Gamma_1 = [\varepsilon, r]$, nella semicirconferenza orientata $\Gamma_2 = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = r,\ \Im z \leq 0\}$ di origine r e punto finale $-r$, nel segmento orientato $\Gamma_3 = [-r, -\varepsilon]$, nella semicirconferenza orientata $\Gamma_4 = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = \varepsilon,\ \Im z \leq 0\}$ di punto iniziale $-\varepsilon$ e punto finale ε.
Indichiamo ancora con g la funzione
$$\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1-e^{2iz}}{z^2} \; .$$
Si ha $D_{r,\varepsilon} \subset \mathbf{C}^*$.
Si ha quindi
$$\int_{\partial D_{r,\varepsilon}} g(z)\,dz = 0 \; .$$
Si ha quindi
$$\int_{\Gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} g(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} g(z)\,dz = 0 \; .$$
Si ha
$$\int_{\Gamma_1} g(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{r} g(x)\,dx\,dx \; ,$$

$$\int_{\Gamma_3} g(z)\,dz = \int_{-r}^{\varepsilon} g(x)\,dx\ ,$$

$$\int_{\Gamma_4} g(z)\,dz = -\int_{-\Gamma_4} g(x)\,dx\ ,$$

Si ha quindi

$$\int_{\varepsilon}^{r} g(x)\,dx\,dx + \int_{-r}^{\varepsilon} g(x)\,dx = \int_{-\Gamma_4} g(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz\ .$$

Si ha

$$\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{2iz}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{-2iz}{z} = -2i\ .$$

Quindi g ha in 0 un polo di ordine 1 con residuo $-2i$.
Una parametrizzazione di $-\Gamma_4$ è

$$\varphi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \varepsilon e^{it}\ .$$

Per il teorema sopra si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\Gamma_4} g(z)\,dz = \pi i(-2i) = 2\pi\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{r} g(x)\,dx\,dx + \int_{-r}^{\varepsilon} g(x)\,dx \right) = 2\pi - \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz\ .$$

Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ ammette valore principale in 0 e si ha

$$\text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-r} g(x)\,dx + 2\pi - \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz + \int_{r}^{+\infty} g(x)\,dx\ .$$

Essendo $\int_{-1}^{+\infty} g(x)\,dx$ convergente, si ha

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-\infty}^{-r} g(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \left(\int_{-\infty}^{-1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{-r} g(x)\,dx \right) =$$

$$\int_{-\infty}^{-1} g(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-1} g(x)\,dx = 0\ .$$

Analogamente si ha

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{r}^{+\infty} g(x)\,dx = 0\ .$$

Si ha

$$\int_{\Gamma_2} g(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz - \int_{\Gamma_2} \frac{e^{2iz}}{z^2}\,dz\ .$$

Una parametrizzazione di Γ_2 è la funzione

$$\psi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow re^{it} \ .$$

Si ha quindi

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2}\, dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1}{r^2 e^{2it}} rie^{it}\, dt\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{1}{r^2 e^{it}} ri\right| \, dt = frac\pi r \longrightarrow_{r\to+\infty} 0 \ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2}\, dz = 0 \ .$$

Si ha $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0$; quindi per il lemma di Jordan si ha

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{2iz}}{z^2}\, dz = 0 \ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_2} g(z)\, dz = 0.$$

Da sopra passando al limite per $r \to +\infty$, si trova

$$\text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 2\pi \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \Re g(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\Re\left(\text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx\right) = \frac{1}{2} 2\pi = \pi.$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Esercizio. Sia $a \in \mathbf{R}_+^*$; calcolare

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x}\, dx \ ,$$

dove, per $a = 1$ la funzione da integrare è il prolungamento continuo di $\frac{x \sin x}{2 - \cos x}$, con $x \in]0, \pi]$, in 0.

Risoluzione. Per ogni $z \in \mathbf{C}$, si ha

$$a - e^{-iz} = 0$$

se e solo se

$$e^{-iz} = a \ ;$$

quindi se e solo se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$-iz = \log a + 2k\pi i \; .$$

cioè se e solo se esiste $k' \in \mathbf{Z}$ tale che

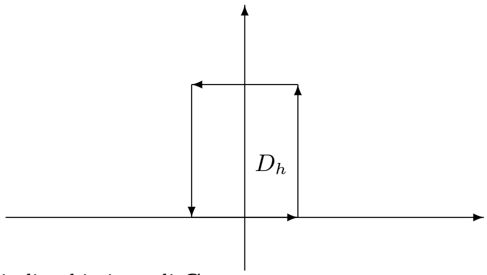
$$z = i \log a + 2k'\pi \; .$$

Sia

$$f : \mathbf{C} - \{2kz + i \log a;\; k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z}{a - e^{-iz}} \; .$$

Per ogni $h \in \mathbf{R}$, $h > \log a$ sia

$$D_h = [-\pi, \pi] \times [0, h] \; .$$



L'insieme D_h è un dominio lipschitziano di $\mathbf{C}$,
Sia Γ_1 il segmento $[-\pi, \pi]$, orientato da $-\pi$ a π; sia Γ_2 il segmento $[\pi, \pi + ih]$, orientato da π a $\pi + ih$; sia Γ_3 il segmento $[\pi + ih, -\pi + ih]$, orientato da $\pi + ih$ a $-\pi + ih$; sia Γ_4 il segmento $[-\pi + ih, -\pi]$, orientato da $-\pi + ih$ a $-\pi$.
Si ha

$$\partial D_h = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{\partial D_h} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz \; .$$

Una parametrizzazione di Γ_1 è

$$z = x \; x \in [-\pi, pi] \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x}\, dx \; .$$

Una parametrizzazione di Γ_2 è

$$z = \pi + iy \; y \in [0, h] \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^h \frac{\pi + iy}{a - e^{-i(\pi + iy)}} i\, dy = i \int_0^h \frac{\pi + iy}{a - e^{-i\pi + y}}\, dy = i \int_0^h \frac{\pi + iy}{a - e^y(\cos \pi - i \sin \pi)}\, dy =$$

$$i \int_0^h \frac{\pi + iy}{a + e^y}\, dy = i\pi \int_0^h \frac{1}{a + e^y}\, dy - \int_0^h \frac{y}{a + e^y}\, dy \; .$$

Una parametrizzazione di $-\Gamma_3$ è

$$z = x + ih \; x \in [-\pi, pi] \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\, dz = -\int_{-\Gamma_3} f(z)\, dz = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x + ih}{a - e^{-i(x+ih)}}\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x + ih}{a - e^{-ix+h)}}\, dx =$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+ih}{a-e^h(\cos x + i\sin x)}\, dx\ .$$

Una parametrizzazione di $-\Gamma_4$ è

$$z = -\pi + iy\ y \in [0,h]\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_4} f(z)\, dz = -\int_{-\Gamma_4} f(z)\, dz = -\int_0^h \frac{-\pi+iy}{a-e^{-i(-\pi+iy)}} i\, dy = -i\int_0^h \frac{-\pi+iy}{a-e^{i\pi+y}}\, dy =$$

$$-i\int_0^h \frac{-\pi+iy}{a-e^y(\cos\pi + i\sin\pi)}\, dy = -i\int_0^h \frac{-\pi+iy}{a+e^y}\, dy = i\pi\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy + \int_0^h \frac{y}{a+e^y}\, dy\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{\partial D_h} f(z)\, dz =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a-\cos x + i\sin x}\, dx + i\pi\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy - \int_0^h \frac{y}{a+e^y}\, dy +$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+ih}{a-e^h(\cos x + i\sin x)}\, dx + i\pi\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy + \int_0^h \frac{y}{a+e^y}\, dy = \ .$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a-\cos x + i\sin x}\, dx + 2i\pi\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+ih}{a-e^h(\cos x + i\sin x)}\, dx\ .$$

Nell'integrale $\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy$ poniamo $e^y = t$; si ha $y = \log t$; quindi $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$; per y=0, si ha $t = 1$; per $y = h$, si ha $t = e^h$. Si ha quindi

$$\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy = \int_1^{e^h} \frac{1}{t+a}\frac{1}{t}\, dt\ .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{t+a}\frac{1}{t} = \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t}\ .$$

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$1 = At + B(t+a)\ .$$

Per $t = 0$ si ha $1 = Ba$; quindi $B = \frac{1}{a}$; per $t = -a$ si ha $1 == Aa$; quindi $A = -\frac{1}{a}$;
Si ha quindi

$$\frac{1}{a+t}\frac{1}{t} = \frac{1}{a}\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\frac{1}{t+a}\ .$$

Si ha quindi

$$\int_1^{e^h} \frac{1}{t+a}\frac{1}{t}\, dt = \int_1^{e^h} \left(\frac{1}{a}\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\frac{i}{t+a}\right) dt = \frac{1}{a}\left[\log t - \log(t+a)\right]_1^{e^h} = \frac{1}{a}\left[\log\frac{t}{t+a}\right]_1^{e^h} =$$

$$\frac{1}{a}\left(\log\frac{e^h}{e^h+a} - \log\frac{1}{1+a}\right)\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{h\to+\infty}\int_0^h \frac{1}{a+e^y}\, dy = \lim_{h\to+\infty}\frac{1}{a}\left(\log\frac{e^h}{e^h+a} - \log\frac{1}{1+a}\right) = -\frac{1}{a}\log\frac{1}{1+a} = \frac{\log(1+a}{a}\ .$$

Calcoliamo

$$\lim_{h\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+ih}{a-e^h(\cos x - i\sin x)}\, dx\ .$$

Per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e per ogni $h > \log a$, si ha

$$\left| \frac{x + ih}{a - e^h(\cos x - i \sin x)} \right| \leq \frac{|x| + |ih|}{|\, |e^h(\cos x - i \sin x)| - |a| \,|} \leq \frac{\pi + h}{|e^h - a|} = \frac{\pi + h}{e^h - a} \; .$$

Si ha $\lim_{h \to +\infty} \frac{\pi+h}{e^h - a} = 0$; quindi esiste $h_0 \in]\log a, +\infty[$ tale che per ogni $h \in \mathbf{R}$, $h \geq h_0$ si ha $\frac{\pi+h}{e^h-a} \leq 1$.

Per ogni $x \in [-\pi, pi]$ si ha $x \lll_{h \to +\infty} ih$, si ha $a \lll_{h \to +\infty} e^h(\cos x - i \sim x)$; si ha $h \lll_{h \to +\infty} e^h$; per il teorema della convergenza dominata, si ha quindi

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x + ih}{a - e^h(\cos x - i \sin x)} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{h \to +\infty} \frac{x + ih}{a - e^h(\cos x - i \sin x)} \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{h \to +\infty} \frac{ih}{e^h(\cos x - i \sin x)} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{h \to +\infty} \frac{h}{e^h} \frac{i}{\cos x - i \sin x} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 \, dx = 0 \; .$$

Si ha quindi

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\partial D_h} f(z) \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x} \, dx + 2\pi i \frac{\log(1 + a}{a} \; .$$

Supponiamo $0 < a < 1$.

Si ha $\log a < 0$; quindi $i \log a \notin D_h$; da ciò segue subito che $D_h \subset \mathrm{dom}(f)$. Per il teorema di Cauchy per ogni $h \in]0, +\infty[$ si ha quindi

$$\int_{\partial D_h} f(z) \, dz = 0 \; .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x} \, dx + 2\pi i \frac{\log(1 + a}{a} = 0 \; .$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x} \, dx = -2\pi i \frac{\log(1 + a}{a} \; .$$

Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x - i \sin x)}{(a - \cos x + i \sin x)(a - \cos x - i \sin x} \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x) - ix \sin x)}{(a - \cos x)^2 + \sin^2 x} \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x(a - \cos x)}{a^2 + \cos^2 x - 2a \cos x + \sin^2 x} - i \frac{x \sin x}{a^2 + \cos^2 x - 2a \cos x + \sin^2 x} \right) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x)}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx \; .$$

Quindi da sopra, uguagliando le parti immaginarie, si ha

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx = -2\pi \frac{\log(1 + a)}{a} \; .$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx = 2\pi \frac{\log(1 + a)}{a} \; .$$

La funzione da integrare è pari; si ha quindi

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} \, dx = \pi \frac{\log(1 + a)}{a} \; .$$

Supponiamo $a > 1$.
Si ha $\log a > 0$; quindi $i \log a \in D_h$; da ciò segue subito che $D_h - \{i \log a\} \subset \mathrm{dom}(f)$.
Determiniamo $\mathrm{Res}(f; i \log a)$.
Per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}} = \frac{z}{a - e^{-i(z - i\log a + i \log a)}} = \frac{z}{a - e^{-i(z - i \log a) + \log a}} = \frac{z}{a - a e^{-i(z - i \log a)}} =$$

$$-\frac{1}{a} \frac{z}{e^{-i(z - i\log a) - 1}} \sim_{z \to i \log a} -\frac{1}{a} \frac{i \log a}{-i(z - i\log a)} = \frac{1}{a} \frac{\log a}{(z - i \log a)} \, .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(f; i \log a) = \frac{\log a}{a} \, .$$

Per il teorema dei residui per ogni $h \in]0, +\infty[$ si ha quindi

$$\int_{\partial D_h} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{\log a}{a} \, .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x}\, dx + 2\pi i \frac{\log(1+a}{a} = 2\pi i \frac{\log a}{a} \, .$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - \cos x + i \sin x}\, dx = -2\pi i \frac{1}{a} \log \frac{1+a}{a} \, .$$

Quindi, uguagliando come sopra le parti immaginarie, si ha

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\, dx = -2\pi \frac{1}{a} \log \frac{1+a}{a} \, .$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\, dx = -2\pi \frac{1}{a} \log \frac{1+a}{a} \, .$$

La funzione da integrare è pari; si ha quindi

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\, dx = \frac{\pi}{a} \log \frac{1+a}{a} \, .$$

Supponiamo $a = 1$.
Per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} = \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} == \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \, .$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \, .$$

Posto

$$g : [-\pi, \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \, ,$$

occorre calcolare $\int_0^\pi g(x)\, dx$, indicato con $\int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}\, dx$.
Calcoliamo $\int_{-\pi}^\pi g(x)\, dx$, indicato con $\int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}\, dx$.
Per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$, si ha $f(z) = \frac{z}{1 - e^{-iz}}$.
Si ha $0 \notin \mathrm{dom}(f)$ e

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} -\frac{z}{e^{-iz} - 1} = \lim_{z \to 0} -\frac{z}{-iz} = \frac{1}{i} = -i \, .$$

Quindi f ha in 0 una singolarità rimovibile; sostituendo f con il suo prolungamento analitico in 0, si procede come nel caso $0 < a < 1$.
Si trova

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}\, dx = 2\pi \log 2\ .$$

La funzione da integrare è pari; si ha quindi

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}\, dx = \pi \log 2\ .$$

Capitolo 26

Trasformata di Fourier

26.1 Spazi topologici

26.1.1 Spazi topologici

Diamo una definizione astratta di spazio topologico; particolari spazi topologici saranno poi $\mathbf{R}^N$, $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(+)}$.
Sistema di intorni. Sia X un insieme; sia

$$\mathcal{U} : X \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(X\right)\right) \; ;$$

si dice che $\mathcal{U}$ è un sistema di intorni in X se si ha

1. $(\forall x \in X)(x \in \mathcal{U}_x)$;
2. $(\forall x \in X)(U \in \mathcal{U}_x, U \subset V \subset X) \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x)$;
3. $(\forall x \in X)(U, V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x)$;
4. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{U}_x)(\exists V \in \mathcal{U}_x)(\forall y \in V)(U \in \mathcal{U}_y)$.

Spazio topologico La coppia $(X,\mathcal{U})$ si chiama spazio topologico di sostegno X e di sistema di intorni $\mathcal{U}$.
Per abuso scriveremo spazio topologico X al posto di spazio topologico $(X,\mathcal{U})$.
Le coppie $(\mathbf{R}^N,\mathcal{U}_{R^N})$, $(\overline{\mathbf{R}},\mathcal{U}_{\overline{\mathbf{R}}})$, $(\mathbf{S}_N,\mathcal{U}_{S_N})$, $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{(+)})$, $(\mathbf{R},\mathcal{U}_{(-)})$ sono spazi topologici.
Sistema fondamentale di intorni. Sia X uno spazio topologico; sia $x \in X$; sia $\mathcal{U}_x$ l'insieme degli intorni di x; sia $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$; si dice che $\mathcal{V}_x$ è un sistema fondamentale di intorni di x se

$$(\forall U \in \mathcal{U}_x)(\exists V \in \mathcal{V}_x)\ V \subset U \ .$$

L'assegnazione per ogni $x \in X$ di un sistema fondamentale di intorni di x determina univocamente il sistema di intorni.
Insiemi aperti, insiemi chiusi, interno, chiusura frontiera, punti isolati, funzioni continue, omeomorfismi. Come in $\mathbf{R}^N$ per ogni spazi topologico di danno le nozioni di insieme aperto, di insieme chiuso, di interno, chiusura, frontiera di un insieme, di punti isolati di un insieme, di funzione continua, di omeomorfismo.
Si dice che due spazi topologici X e Y sono omeomorfi se esiste un omeomorfismo $f''X \longrightarrow Y$.
$\mathbf{S}_N$ è omeomorfo a $\{x \in \mathbf{R}^{N+1}; \|x\| = 1\}$; per questo motivo $\mathbf{S}_N$ si chiama sfera N-dimensionale.
Topologia. La topologia di uno spazio topologico è l'insieme degli aperti dello spazio. La topologia determina univocamente il sistema di intorni.
Insiemi densi. Sia X uno spazio topologico; sia $A \subset X$; si dice che A è denso se $\overline{A} = X$.
Ad esempio $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$.

Spazio topologico indotto. Sia X uno spazio topologico; sia $Y \subset X$; sia $b \in Y$; scegliendo come intorni di b in Y gli intorni di b in X intersecati con Y, resta definito un sistema di intorni in Y; il corrispondente spazio topologico si dice spazio topologico indotto su Y dallo spazio topologico X. Considereremo Y canonicamente dotato di tale sistema di intorni.
Spazio topologico prodotto. Siano X e Y due spazi topologici; sia $(a, b) \in X \times Y$; scegliendo come intorni di (a, b) in $X \times Y$ gli insiemi contenenti $U_a \times V_b$, con U_a intorno di a in X e V_b intorno di b in Y resta definito un sistema di intorni in $X \times Y$; il corrispondente spazio topologico si dice spazio topologico prodotto dello spazio topologico X e dello spazio topologico Y.
Spazio topologico di Hausdorff. Si dice che uno spazio topologico X è uno spazio topologico di Hausdorff se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste U in torno di x, esiste V intorno di y tali che $U \cap V = \emptyset$.
Convergenza e limiti. Siano X, Y due spazi topologici; sia $A \subset X$; sia $a \in \overline{A}$; sia $l \in Y$ la nozione di convergenza $f \longrightarrow_a l$ vista dà anche nel caso generale. Se Y è uno spazio di Hausdorff e se f è convergente in a, allora esiste uno ed un solo l tale che $f \longrightarrow_a l$; dunque quando Y è uno spazio di Hausdorff si dà la nozione di limite.
Convergenza per una successione. Sia X uno spazio topologico, $(a_n)_{n\in N}$ e $l \in X$; si dà in particolare la nozione di $a_n \longrightarrow_{n\to\infty} l$ e per X spazio di Hausdorff di $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Confronto asintotico Sia X uno spazio topologico; sia $A \subset X$; sia $a \in \overline{A}$; analogamente a quanto visto, si danno le nozioni di confronto asintotico per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ per $x \to a$.
Topologia della convergenza semplice Sia X uno spazio topologico e sia A un insieme; Per ogni $f \in X^A$ e per ogni $F \subset A$, F finito e per ogni $(U_a)_{a\in F}$ famiglia di sottoinsiemi di X tale che per ogni $a \in F$, U_a sia un intorno di $f(a)$, poniamo

$$U(f, F, (U_a)_{a\in F}) = \{g \in X^A;\ (\forall a \in F)\, g(a) \in U_a\}\ ;$$

come intorni di f scegliamo i sottoinsiemi di X^A contenti almeno un insieme del tipo $U(f, F, (U_a)_{a\in F})$. Resta così definito un sistema di intorni in X^A; la corrispondente topologia si chiama topologia della convergenza semplice (o puntuale).
Sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di X^A; sia $f \in X^A$, allora $f_n \to f$ rispetto alla topologia della convergenza semplice se e solo

$$(\forall x \in A)\ f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} f(x)\ .$$

In tal caso si dice che $f_n \to_{n\to\infty} f$ semplicemente o puntualmente.

26.1.2 Spazi metrici

Per $x, y \in \mathbf{R}^N$, si è posto $d(x, y) = \|x - y\|$. Si può così definire un'applicazione

$$d : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, (x, y) \longrightarrow d(x, y)\ .$$

Le proprietà di questa applicazione suggeriscono la seguente definizione.
Pseudometrica. Sia X un insieme; sia $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è una pseudo metrica se si ha

1. $(\forall x \in X)\, \rho(x, x) = 0$;
2. $(\forall x, y \in X)\, \rho(x, y) \geq 0$;
3. $(\forall x, y \in X)\, \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetria);
4. $(\forall x, y, z \in X)\, \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Metrica. Sia X un insieme; sia $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$; sia ρ una pseudometrica finita; si dice che ρ è una metrica (o una distanza) se

$$(\forall x, y \in X)\ \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y\ .$$

Spazio pseudometrico e spazio metrico. Sia X un insieme; sia $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una pseudometrica; allora (X, ρ) si chiama spazio pseudometrico di sostegno X e di pseudometrica ρ. Se ρ è una metrica, si dice che (X, ρ) è uno spazio metrico.
Per abuso di notazione, spesso lo spazio pseudometrico (X, ρ) è indicato con X. Gli elementi dell'insieme di uno spazio metrico sono anche detti punti.

Metrica euclidea di $\mathbf{R}^N$. Ricordiamo che per $x, y \in \mathbf{R}^n$ si è posto

$$d(x,y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}\ .$$

Sia

$$d : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

allora d è una metrica Lo spazio metrico corrispondente si chiama spazio metrico $\mathbf{R}^n$.
Palle. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; sia $a \in X$, sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; si pone

$$\mathrm{B}(a,r) = \{x \in X;\ d(x,a) < r\}\ .$$

$\mathrm{B}(a,r)$ si chiama palla di centro a e raggio r.
Spazio topologico generato da uno spazio metrico. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; sia $a \in X$; analogamente a quanto fatto in $\mathbf{R}^N$, un intorno di a è un insieme contenente una palla di centro a. Resta definito un sistema di intorni su X e quindi uno spazio topologico, che si chiama generato dalla pseudometrica d. Lo spazio topologico generato da una pseudometrica d è uno spazio di Hausdorff se e solo se d è una metrica.
Pseudometrica indotta. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; sia $Y \subset X$; allora $d|(Y \times Y)$ è una pseudometrica su Y; tale pseudometrica si dice indotta su Y da d; Y con tale pseudometrica si chiama spazio pseudometrico indotto.
Spazio metrico associato ad uno spazio pseudometrico Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; sia

$$R = \{(x,y) \in X \times X;\ d(x,y) = 0\}\ ;$$

allora R è un'equivalenza su X.
Posto per ogni $[x],[y] \in X/R$,

$$d_1([x],[y]) = \inf(\{d(x',y')\ x' \in [x],\ y' \in [y]\})$$

resta definita una metrica d_1 su X/R; lo spazio metrico $(X/R, d_1)$ si chiama spazio metrico associato allo spazio pseudometrico (X,d)
Successione di Cauchy. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; sia $(a_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di X; si dice che $(a_n)_{n\in N}$ è una successione di Cauchy se

$$(\forall\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)(\exists p \in \mathbf{N})(\forall n,m \in \mathbf{N}, n,m \geq p)\ d(a_n,a_m) < \varepsilon\ .$$

Se $(a_n)_{n\in N}$ una successione è una successione convergente, allora $(a_n)_{n\in N}$ è una successione di Cauchy. In generale non vale il viceversa.
Spazi pseudometrici completi. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico; Si dice che $(x_n)_{n\in N}$ è uno spazio pseudometrico completo se ogni successione di Cauchy di (X,d) è convergente.
Lo spazio metrico $\mathbf{R}^N$ è completo.
Topologia della convergenza uniforme Sia (X,d) uno spazio metrico e sia A un insieme; Per ogni $f \in X^A$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ poniamo

$$U(f,\varepsilon) = \{g \in X^A;\ (\forall x \in X)\, d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}\ ;$$

come intorni di f scegliamo i sottoinsiemi di X^A contenti almeno un insieme del tipo $U(f,\varepsilon)$. Resta così definito un sistema di intorni in X^A; la corrispondente topologia si chiama topologia della convergenza uniforme.
Sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di X^A; sia $f \in X^A$, allora $f_n \to f$ rispetto alla topologia della convergenza uniforme se e solo

$$(\forall\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)(\exists\bar{n} \in \mathbf{N})(\forall x \in X)\, d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon\ .$$

In tal caso si dice che $f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente.
Se $f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente, allora $f_n \to_{n\to\infty} f$ semplicemente.
L'importanza della convergenza uniforme rispetto alla convergenza semplice sta nel fatto che la convergenza uniforme conserva la continuità e permette l'inversione dei passaggi al limite.

Conservazione della continuità. Sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di X^A, con A spazio topologico; sia $f \in X^A$; sia $f_n \to f$ uniformemente; sia $a \in A$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n continua in a; allora f è continua in a.
Inversione dei passaggi al limite. Sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di X^A, con $A \subset Y$ e Y spazio topologico; sia $f \in X^A$; sia $f_n \to f$ uniformemente; sia $a \in \overline{A}$; lo spazio metrico X sia completo; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n convergente per $x \to a$; allora f è convergente per $x \to a$, la successione dei limiti $(\lim_{x\to a} f_n(x))_{n\in N}$ è convergente e si ha

$$lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right) .$$

Inversione fra limite e derivata. L'inversione fra limite e derivata è permessa dalla convergenza uniforme della successione delle *derivate*. Per la successione $(f_n)_{n\in N}$ è sufficiente supporre la convergenza in un punto.
Sia I un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di $(\mathbf{R}^N)^I$; sia $a \in I$; sia $(f_n(a))_{n\in N}$ convergente rispetto a $\mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n derivabile; la successione $(f'_n)_{n\in N}$ sia uniformemente convergente; allora si ha

1. la successione $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformemente;
2. la funzione $\lim_{n\to\infty} f_n$ è derivabile;
3. $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$.

Inversione fra limite e integrale. Da sopra segue subito un risultato di inversione fra limite e integrale.
Sia I un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $(f_n)_{n\in N}$ una successione di $\mathbf{R}^I$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n continua; siano $x, y \in I$; la successione $(f_n)_{n\in N}$ sia uniformemente convergente; allora la successione $\left(\int_x^y f_n\right)_{n\in N}$ è convergente e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^y f_n = \int_x^y \lim_{n\to\infty} f_n .$$

26.1.3 Spazi vettoriali topologici

Sia K il campo reale o complesso; sia $(E, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su K; sia $\mathcal{U}$ un sistema di intorni di E; si dice che E, dotato della struttura vettoriale e del sistema di intorni $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale topologico se le funzioni

$$+ : E \times E \longrightarrow E, (x, y) \longrightarrow x + y$$

e

$$\cdot : K \times E \longrightarrow E, (a, x) \longrightarrow ax$$

sono continue.
Siano E e F spazi vettoriali topologici; sia $f : E \longrightarrow F$; si dice che f è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici se f è un isomorfismo di spazi vettoriali e un omeomorfismo di spazi topologici.
Si chiama duale topologico di uno spazio vettoriale topologico E l'insieme E' delle forme lineari continue $T : E \longrightarrow K$.
Se $T \in E'$ e se $x \in E$, $T(x)$ spesso si indica $\langle T, x\rangle$.
E' è un sottospazio vettoriale di K^E; quindi E' è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Si chiama topologia debole di E' la topologia indotta su E' dalla topologia della convergenza semplice di E^K. Rispetto a tale sistema di intorni E' risulta uno spazio vettoriale topologico.
Sia $(T_n)_{n\in N}$ una successione di E'; sia $T \in E'$, allora $T_n \to T$ rispetto alla topologia debole di E' se e solo

$$(\forall x \in E)\ T_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} T(x) .$$

Serie in uno spazio vettoriale topologico. Sia E uno spazio vettoriale topologico su K di Hausdorff; sia $(a_n)_{n\in N}$ una successione di E; come si è visto in $\mathbf{R}^N$ si definisce la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$; si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se la successione $(s_n)_{n\in N}$ è convergente in E; in tal caso la somma della serie è $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Analogamente a quanto visto in $\mathbf{R}^N$ si definiscono le serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, la convergenza per una serie di Laurent e la somma di una serie di Laurent.
Serie di funzioni. Sia E uno spazio vettoriale topologico su K di Hausdorff; sia A un insieme; consideriamo lo spazio vettoriale su K, E^A; consideriamo E^A dotato di un sistema di intorni in modo che E^A sia uno spazio vettoriale topologico (ad esempio la topologia della convergenza semplice); le serie dello spazio vettoriale topologico E^A si chiama serie di funzioni da A ad E.

26.1.4 Spazi normati

Se $x \in \mathbf{R}^N$ si ha $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.
Si può quindi definire la funzione

$$\| \cdot \| : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \|x\| \; .$$

Le proprietà di questa funzione suggeriscono la seguente definizione.
Seminorma. Sia K il campo reale o complesso; sia $(E, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su K; sia $p : E \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che p è una seminorma se si ha

1. $(\forall x \in E)\, p(x) \geq 0$,
2. $(\forall a \in K)(\forall x \in E)\, p(ax) = |a|p(x)$,
3. $(\forall x, y \in E)\, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Da ciò segue $p(0) - 0$.
Norma. Sia K il campo reale o complesso; sia $(E, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su K; sia $p : E \longrightarrow \mathbf{R}$; sia p una seminorma; si dice che p è una norma se si ha

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \; .$$

Se p è una norma su E e se $x \in E$, $p(x)$ si indica con $\|x\|$; la norma p si indica con $\| \cdot \|$.
Spazio seminormato e spazio normato. Sia K il campo reale o complesso; sia $(E, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su K; sia $p : E \longrightarrow \mathbf{R}$; sia p una seminorma; allora la quadrupla $(E, +, \cdot, p)$ si chiama spazio seminormato di spazio vettoriale $(E, +, \cdot)$ e di norma p. Se p è una norma $(E, +, \cdot, p)$ si chiama spazio normato.
Per abuso di notazione, spesso lo spazio normato $(E, +, \cdot, p)$ è indicato con E.
Lo spazio normato $\mathbf{R}^N$. Sia $\| \cdot \| : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow \|x|$; allora lo spazio normato $(\mathbf{R}^N, +, \cdot, \| \cdot \|)$ si chiama spazio normato $\mathbf{R}^N$.
Una seminorma su E genera una pseudometrica su E
Pseudometrica di uno spazio seminormato. Sia E uno spazio seminormato; sia p la seminorma di E; sia

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow p(x - y)\| \; ;$$

allora d è una pseudometrica. Si dice che d è pseudometrica generata dalla seminorma p. Considereremo E canonicamente dotato di dale pseudometrica.
d genera un sistema di intorni su E; E dotato di tale sistema di intorni e della struttura di spazio vettoriale risulta uno spazio vettoriale topologico.
Metrica di uno spazio normato. Sia E uno spazio normato; la pseudometrica d associata alla norma di E è allora una metrica; lo spazio topologico associato a d è allora uno spazio di Hausdorff.
Spazio normato associato ad uno spazio seminormato. Sia K il campo reale o complesso; sia $(E, +, \cdot, p)$ uno spazio seminormato; sia

$$R = \{(x, y) \in X \times X;\; p(x - y) = 0\} \; ;$$

allora R è l'equivalenza su E generata dalla pseudometrica d generata da p.
Posto per ogni $[x], [y] \in E/R$, e $a \in K$

$$[x] + [y] = [x + y]$$

e

$$a[x] = [ax]$$

restano definite definite un'operazione interna $+$ e un'operazione esterna con scalari in K, su E/R; dotato di tali operazione E/R è uno spazio vettoriale su K.
Posto per ogni $[x] \in E/R$,

$$p_1([x])) = \inf(\{p(x')) \; x' \in [x]\})$$

resta definita una norma p_1 su E/R; lo spazio normato $(E/R, +, \cdot, p_1)$ si chiama spazio normato associato allo spazio seminormato $(E, +, \cdot, p)$
Spazio di Banach. Uno spazio normato E completo si chiama spazio di Banach.
Funzioni lineari continue fra spazi normati. Siano E e F due spazi seminormati; indichiamo con $\|\cdot\|$ le seminorme di entrambi gli spazi; sia $f : E \longrightarrow F$; allora f è continua se e solo se esiste $M \in \mathbf{R}_+^*$ tale che per ogni

$$(\forall x \in E) \; \|f(x)\| \leq M\|x\| \; .$$

Serie di funzioni uniformemente convergenti. Sia E uno spazio normato su K; sia A un insieme; su E^A possiamo considerare la topologia della convergenza semplice e la topologia della convergenza uniforme. Per le serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ possiamo quindi considerare la convergenza semplice e la convergenza uniforme. La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge semplicemente ad una funzione f se la successione delle somme parziali converge semplicemente a f; la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente ad una funzione f se la successione delle somme parziali converge uniformemente a f.
Conservazione della continuità. Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di E^A, con A spazio topologico; sia $f \in E^A$; sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ uniformemente; sia $a \in A$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n continua in a; allora f è continua in a.
Passaggio al limite sotto il segno di serie. Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di E^A, con $A \subset X$ e X spazio topologico; sia $f \in E^A$; sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ uniformemente; sia $a \in \overline{A}$; E sia uno spazio di Banach; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n convergente per $x \to a$; allora f è convergente per $x \to a$, la serie dei limiti $\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$ è convergente e si ha

$$lim_{x \to a} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) \; .$$

Inversione fra serie e derivata. Sia I un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di $(\mathbf{R}^N)^I$; sia $a \in I$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sia convergente; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n derivabile; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ sia uniformemente convergente; allora si ha

1. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente;
2. la funzione $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è derivabile;
3. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

Inversione fra serie e integrale. Sia I un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di $\mathbf{R}^I$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia f_n continua; siano $x, y \in I$; la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sia uniformemente convergente; allora la serie $\sum_{n-0}^{\infty} \int_x^y f_n$ è convergente e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_x^y f_n = \int_x^y \sum_{n=0}^{\infty} f_n \; .$$

Serie di Laurent di funzioni. Si considerano analogamente le serie di Laurent di funzioni in uno spazio normato.

26.1.5 Serie in uno spazio di Banach

Condizione di Cauchy. Sia E uno spazio di Banach; sia $(a_n)_{n \in N}$ una successione di E; applicando la definizione di successione di Cauchy alla successione delle somme parziali, si trova che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)(\exists \overline{n} \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n \geq \bar{n})(\forall p \in \mathbf{N}) \; \|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\| < \varepsilon \; .$$

Serie assolutamente convergenti. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ è convergente.
Si vede subito che se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ soddisfa la condizione di Cauchy, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soddisfa la condizione di Cauchy. Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ assolutamente convergente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \text{ convergente} .$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$;
Analogamente si procede per le serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.
Sia I in insieme numerabile; sia $(a_i))_{i \in I}$ una famiglia di elementi di I; analogamente a quanto fatto in $\mathbf{R}^N$, considerando una funzione biettiva $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow I$, si dà la nozione di famiglia $(a_i)_{i \in I}$ sommabile e, in tal caso, di somma $\sum_{i \in I} a_i$ della famiglia $(a_i)_{i \in I}$.
Si osservi che la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente se e solo se la famiglia $(a_n)_{n \in Z}$ è sommabile e che, in tal caso, si ha $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n \in Z} a_n$.
Condizione di Cauchy per le serie di funzioni uniformemente convergenti. Sia A un insieme qualunque; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : A \longrightarrow E$; allora la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è uniformemente convergente se e solo se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)(\exists \overline{n} \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n \geq \bar{n})(\forall p \in \mathbf{N})(\forall x \in A) \ \| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x) \| < \varepsilon .$$

Serie di funzioni totalmente convergenti. Sia A un insieme qualunque; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : A \longrightarrow E$; si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è totalmente convergente se esiste $(c_n)_{n \in N}$ successione di $\mathbf{R}_+$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sia convergente e per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in A$ sia $\|f_n(x)\| \leq c_n$.
Serie di potenze Sia $(a_n)_{n \in N}$; sia B il cerchio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; sia K compatto; sia $K \subset B$; allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge totalmente su K.
Se una serie di funzioni è totalmente convergente allora per ogni $x \in A$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente; inoltre la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è uniformemente convergente.
Analogamente si procede per le **serie di Laurent** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ di funzioni.
Sia $(a_n)_{n \in Z}$; sia $a \in \mathbf{C}$; siano $r_1, r_2 \in [0, +\infty]$; sia $r_1 < r_2$; sia

$$B = \{z \in \mathbf{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\}$$

supponiamo che ogni $z \in B$ la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ e convergente; sia K compatto; sia $K \subset B$; allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente su K.

26.1.6 Gli spazi di Banach $L^p(A; \mathbf{C})$

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; sia $p \in \overline{\mathbf{R}};\ p \geq 1$.
Per $p \in \mathbf{R}$ si pone

$$\mathcal{L}^p(A; \mathbf{R}) = \{f : A \longrightarrow \mathbf{R};\ f \text{ misurabile } |f|^p \text{ integrabile}\} .$$

Per $p = +\infty$ si pone

$$\mathcal{L}^\infty(A; \mathbf{R}) = \{f : A \longrightarrow \mathbf{R};\ f \text{ misurabile } (\exists M \in \mathbf{R}_+^*)\, |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x \in A\} .$$

$\mathcal{L}^p(A; \mathbf{R})$ risulta un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^A$; quindi $\mathcal{L}^p(A; \mathbf{R})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Sia $f \in \mathcal{L}^p(A; \mathbf{R})$; per $p \in [1, +\infty[$ si pone

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Per $p = +\infty$ si pone

$$\|f\|_\infty = \inf(\{M \in M \in \mathbf{R}_+^*;\ |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x \in A\})\ .$$

Resta così definita nello spazio vettoriale $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{R})$ una seminorma; lo spazio vettoriale $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{R})$ con tale seminorma uno spazio seminormato.
Siano $f, g \in \mathcal{L}^p(A;\mathbf{R})$; si ha $\|f - g\|_p = 0$ se e solo se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni $x \in A$. In altri termini l'equivalenza in $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{R})$ definita dalla seminorma $\|\cdot\|_p$ è l'equivalenza data dall'uguaglianza quasi dappertutto. Sia R tale equivalenza. Si pone

$$\mathrm{L}^p(A;\mathbf{R}) = \mathcal{L}^p(A;\mathbf{R})/R\ .$$

Indichiamo con $[f]_p$ o, semplicemente con $[f]$ le classi di equivalenza di $L^p(A;\mathbf{C})$.
Se $[f] \in \mathrm{L}^p(A;\mathbf{R})$ la norma di $[f]$ in $\mathrm{L}^p(A;\mathbf{R})$ è uguale a

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p\ .$$

Lo spazio vettoriale $\mathrm{L}^p(A;\mathbf{R})$ con tale norma risulta uno spazio di Banach.
Sostituendo $\mathbf{R}$ con $\mathbf{C}$ si considerano analogamente gli spazi seminormati $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$ e gli spazi di Banach $\mathrm{L}^p(A;\mathbf{C})$
Sia $p \in [1,+\infty]$; sia $f \in \mathcal{L}^\infty(A;\mathbf{C})$, sia $g \in \mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$; allora si ha $f \cdot g \in \mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$ e $\|fg\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_p$.
Possiamo quindi definire

$$\cdot : L^\infty(A;\mathbf{C}) \times L^p(A;\mathbf{C}) \longrightarrow L^p(A;\mathbf{C}), ([f]_\infty, [g]_p) \longrightarrow [fg]_p\ ,$$

cioè porre

$$[f]_\infty \cdot [g]_p = [fg]_p\ .$$

Disuguaglianza di Hölder. Siano $p, q \in [1,+\infty]$; sia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (dove $\frac{1}{+\infty}$ è posto uguale a 0); sia $f \in \mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$, sia $g \in \mathcal{L}^q(A;\mathbf{C})$; allora si ha $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(A;\mathbf{C})$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.
Possiamo quindi definire

$$\cdot : L^p(A;\mathbf{C}) \times L^q(A;\mathbf{C}) \longrightarrow L^1(A;\mathbf{C}), ([f]_p, [g]_q) \longrightarrow [fg]_1\ ,$$

cioè porre

$$[f]_p \cdot [g]_q = [fg]_1\ .$$

Sia A di misura finita; siano $p, q \in [1,+\infty[$; allora si ha

$$p \leq q \Rightarrow \mathcal{L}^q(A;\mathbf{C}) \subset \mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})\ .$$

26.1.7 Gli spazi di Banach $l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$

Sia $p \in [1,+\infty]$; se $p \neq +\infty$ poniamo

$$l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C}) = \{c \in \mathbf{C}^Z;\ \text{ la serie di Laurent } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^p \text{ convergente}\}\ ;$$

se $p = +\infty$ poniamo

$$l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C}) = \{c \in \mathbf{C}^Z;\ c \text{ limitata}\}\ ;$$

$l_{+\infty}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ si scrive $l_\infty(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.
$l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^Z$. $l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ è quindi canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Per ogni $c \in l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$, se $p \neq +\infty$ poniamo

$$\|c\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ,$$

se $p = +\infty$ poniamo

$$\|c\|_p = \sup_{n \in Z} |c_n|\ ;$$

Resta definita una norma su $l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.
$\|c\|_{+\infty}$ si scrive $\|c\|_\infty$.
Dotato di tale norma $l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ risulta uno spazio di Banach.
Sia $p \in [1,+\infty]$; sia $(a_n)_{n\in Z} \in l_\infty(\mathbf{Z};\mathbf{C})$, sia $(b_n)_{n\in Z} \in l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$; allora si ha $(a_n b_n)_{n\in Z} \in \mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$ e $\|(a_n b_n)_{n\in Z}\|_p \leq \|(a_n)_{n\in Z}\|_\infty \cdot \|(b_n)_{n\in Z}\|_p$.
Disuguaglianza di Hölder. Siano $p,q \in [1,+\infty]$; sia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (dove $\frac{1}{+\infty}$ è posto uguale a 0); sia $(a_n)_{n\in Z} \in l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$, sia $(b_n)_{n\in Z} \in l_q(\mathbf{Z};\mathbf{C})$; allora si ha $(a_n b_n)_{n\in Z} \in \mathcal{L}^1(A;\mathbf{C})$ e $\|(a_n b_n)_{n\in Z}\|_1 \leq \|(a_n)_{n\in Z}\|_p \cdot \|(b_n)_{n\in Z}\|_q$.
Siano $p,q \in [1,+\infty]$; sia $p \leq q$; allora si ha

$$l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C}) \subset l_q(\mathbf{Z};\mathbf{C})$$

e per ogni $c \in l_p(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ si ha

$$\|c\|_q \leq \|c\|_p \ .$$

26.1.8 Spazio vettoriale topologico localmente convesso

Sia K il campo reale o il campo complesso; sia E uno spazio vettoriale su K; sia $(p_i)_{i\in I}$ una famiglia di seminorme su E; per ogni $F \subset I$, F finito e per ogni $r \in \mathbf{R}_+^*$ poniamo

$$U(F,r) = \{x \in E;\ (\forall i \in F)\ p_i(x) < r\} \ .$$

Come intorni di 0 prendiamo gli insiemi che contengono almeno un insieme del tipo $U(F;r)$.
Come intorni di un $x \in E$ qualunque prendiamo i traslati $x+U$ degli intorni di 0.
Resta così definito un sistema di intorni in E; E dotato di tale sistema di intorni e della struttura di spazio vettoriale risulta uno spazio vettoriale topologico.
Consideriamo E canonicamente dotato di tale sistema di intorni.
Si dice che tale spazio vettoriale topologico è definito dalla famiglia di seminorme $(p_i)_{i\in I}$.
Si dice che uno spazio vettoriale topologico è **localmente convesso** se può essere definito da una famiglia di seminorme.
Gli spazi seminormati sono particolari spazi vettoriali topologici localmente convessi.
Funzioni lineari continue fra spazi localmente convessi. Siano E e F due spazi vettoriali; sia $(p_i)_{i\in I}$ una famiglia di seminorme di E; sia $(q_i)_{i\in J}$ una famiglia di seminorme di F; sia $f: E \longrightarrow F$; allora f è continua se e solo per ogni $j \in F$ esiste $F \subset I$, F finito, esiste $M \in \mathbf{R}_+^*$ tale che per ogni

$$(\forall x \in E)\ q_j(f(x)) \leq M \sup_{i\in F} p_i(x) \ .$$

Il duale di uno spazio vettoriale topologico, con la topologia debole è uno spazio localmente convesso.

26.1.9 Spazio di Fréchet

Sia K il campo reale o il campo complesso; sia E uno spazio vettoriale topologico su K; si dice che E è uno spazio di Fréchet se

1. esiste $(p_n)_{n\in I}$ famiglia al più numerabile di seminorme su E tale che E il sistema di intorni di E è definito da $(p_n)_{n\in I}$;
2. esiste d metrica su E invariante per traslazioni (cioè tale per ogni $x,y,a \in E$ e per ogni sia $d(x,y) = d(a+x,a+y)$) tale che E il sistema di intorni di E è definito da d e tale che E sia completo rispetto alla metrica d.

Si osservi che se vale (1) esiste sempre d pseudometrica su E invariante per traslazioni tale che E il sistema di intorni di E è definito da d; in più si richiede che d sia una metrica e che sia completo rispetto a d.
Essendo d una metrica uno spazio di Fréchet è uno spazio di Hausdorff.
Uno spazio di Banach è in particolare uno spazio di Fréchet.
Funzioni lineari e continue su un sottospazio denso. Sia K il campo reale o il campo complesso; siano E, F spazi vettoriale topologici su K; sia F uno spazio di Fréchet; sia $V \subset E$; sia V un sottospazio vettoriale; sia V denso in X; sia $T: V \longrightarrow F$ lineare e continua; allora esiste una ed una sola $S: E \longrightarrow F$ lineare e continua tale che $S|V = T$.

26.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

26.2.1 Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.2.1.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; sia*

$$v : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x) ;$$

allora si ha $v \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha infatti

$$|v(x)| = |e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)| = |u(x)| .$$

Definizione 26.2.1.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; poniamo*

$$\hat{u}(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx .$$

Si indica anche $\mathcal{F}u(\xi)$.

Osservazione 26.2.1.1 Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; se si pone

$$\mathcal{F}_1 u(\xi) = \int_{R^N} e^{-i(\xi|x)}u(x)\,dx ,$$

allora si ha

1. $\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}_1(u)(2\pi\xi)$;
2. $\mathcal{F}_1(u)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\frac{1}{2\pi}\xi)$;

Osservazione 26.2.1.2 Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; se si pone

$$\mathcal{F}_2 u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{R^N} e^{-i(\xi|x)}u(x)\,dx ,$$

allora si ha

1. $\mathcal{F}(u)(\xi) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\mathcal{F}_2(u)(2\pi\xi)$;
2. $\mathcal{F}_2(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\mathcal{F}(u)(\frac{1}{2\pi}\xi)$;

Definizione 26.2.1.2 *Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; la funzione*

$$\hat{u} : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \hat{u}(\xi)$$

si chiama trasformata di Fourier di u.

Si indica anche $\mathcal{F}u$.

Definizione 26.2.1.3 *La funzione*

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}^{R^N}, f \longrightarrow \mathcal{F}(u)$$

si chiama trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

26.2.2 Trasformata di Fourier di una funzione reale

Teorema 26.2.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha*

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\xi x)u(x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\xi x)u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Segue dalle formule di Eulero.

26.2.3 Trasformata di Fourier di una funzione reale pari

Teorema 26.2.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia u una funzione pari; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha*

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\xi x)u(x)\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\xi x)u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

26.2.4 Trasformata di Fourier di una funzione reale dispari

Teorema 26.2.4.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia u una funzione dispari; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha*

$$\hat{u}(\xi) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\xi x)u(x)\,dx = -2i\int_{0}^{+\infty} \sin(2\pi\xi x)u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

26.2.5 Alcune trasformate di Fourier

Teorema 26.2.5.1 *Sia*

$$\varphi_{[-1,1]} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & per\ x \in [-1,1] \\ 0 & per\ x \notin [-1,1] \end{cases} \quad ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora risulta

$$\mathcal{F}(\varphi_{[-1,1]})(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi} & per\ \xi \neq 0 \\ 2 & per\ \xi = 0 \end{cases} \ .$$

Dimostrazione. $\varphi_{[-1,1]}$ è una funzione reale pari; si ha quindi

$$\mathcal{F}(\varphi_{-1,1]})(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \varphi_{[-1,1]}(x)\cos(2\pi\xi x)\,dx = 2\int_0^1 \cos(2\pi\xi x)\,dx\ .$$

Per $\xi = 0$ si ha $\mathcal{F}(\varphi_{-1,1]})(\xi) = 2\int_0^2\,dx = 2$.

Per $\xi \neq 0$ si ha

$$\mathcal{F}(\varphi_{-1,1]})(\xi) = 2\left[\frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi\xi}\sin(2\pi\xi)\ .$$

Teorema 26.2.5.2 *Indichiamo con* $\frac{1}{1+x^2}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}\ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}$*; allora risulta*

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}\ .$$

Dimostrazione. $\frac{1}{x^2+1}$ è una funzione reale pari; si ha quindi

$$\mathcal{F}(\frac{1}{x^2+1})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\cos(2\pi\xi x)\,dx\ .$$

Sia $\xi \geq 0$; per i teoremi sugli integrali calcolati con il metodo dei residui, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{2\pi i\xi x}\,dx = 2\pi \mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}e^{2\pi i\xi z}; i)\ .$$

Si ha

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}e^{2\pi i\xi z}; i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}e^{2\pi i\xi z} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}e^{2\pi i\xi z} = \frac{1}{2i}e^{-2\pi\xi}\ .$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{2\pi i\xi x}\,dx = \pi e^{-2\pi\xi}\ .$$

Quindi, passando alla parte reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\cos(2\pi i\xi x)\,dx = \pi e^{-2\pi\xi}\ .$$

Analogamente si vede che per $\xi < 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\cos(2\pi i\xi x)\,dx = \pi e^{2\pi\xi}\ .$$

Da ciò la tesi.

Teorema 26.2.5.3 *Si ha*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti
$$\int_{R\times R} e^{-(x^2+y^2}\,dxdy = \int_{R\times R} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy =$$
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\,dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2\ .$$
D'altra parte, passando a coordinate polari, si ha
$$\int_{R\times R} e^{-(x^2+y^2}\,dxdy = \int_{[0,+\infty\times[0,2\pi]} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho d\theta = \left(\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) =$$
$$2\pi \lim t\to+\infty \int_0^t \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = 2\pi\lim t\to+\infty\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^t =$$
$$\pi\lim t\to+\infty\left(1-e^{-t}\right) = \pi\ .$$
Si ha quindi
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi\ .$$
Da ciò segue subito l'affermazione.

Teorema 26.2.5.4 *Indichiamo con* e^{-x^2} *la funzione*
$$\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}, x\longrightarrow e^{-x^2}\ ;$$
sia $\xi\in\mathbf{R}$*; allora risulta*
$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}\ .$$

Dimostrazione. Si ha
$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ix\xi}e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2\pi ix\xi+x^2)}\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi^2\xi^2-\pi^2\xi^2+2\pi ix\xi+x^2)}\,dx = e^{-\xi^2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\pi\xi)^2}\,dx =$$
$$e^{-\xi^2\pi^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(x+i\pi\xi)^2}\,dx = e^{-\xi^2\pi^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R+i\pi\xi}^{R+i\pi\xi} e^{-y^2}\,dy\ .$$
Sia Γ il segmento orientato di punto iniziale $-R+i\pi\xi$ e punto finale $R+i\pi\xi$; sia Γ_1 il segmento orientato di punto iniziale $-R+i\pi\xi$ e punto finale $-R$; sia Γ_2 il segmento

orientato di punto iniziale $-R$ e punto finale R; sia Γ_3 il segmento orientato di punto iniziale R e punto finale $R+i\pi$.
Supponiamo $\xi \geq 0$; essendo la funzione e^{-z^2} analitica su $\mathbf{C}$, per il teorema di Cauchy si ha

$$e^{-\xi^2\pi^2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R+i\pi\xi}^{R+i\pi\xi} e^{-y^2}\, dy = \int_\Gamma e^{-z^2}\, dz =$$

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2}\, dz =$$

$$-\int_0^\xi e^{-(-R+it)^2}\, dt + \int_{-R}^R e^{-t^2}\, dt + \int_0^\xi e^{-(R+it)^2}\, dz =$$

Si ha

$$| -\int_0^\xi e^{-(-R+it)^2}\, dt| \leq \sup_{t\in[0,\xi]} |e^{-(R+it)^2}|\xi \leq \sup_{t\in[0,\xi]} e^{-R^2+t^2}\xi = e^{-R^2+\xi^2}\xi \longrightarrow_{R\to+\infty} 0\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{R\to+\infty} -\int_0^\xi e^{-(-R+it)^2}\, dt = 0\ .$$

Analogamente si vede che si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^\xi e^{-(R+it)^2}\, dt = 0\ .$$

Si ha quindi

$$e^{-\xi^2\pi^2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R+i\pi\xi}^{R+i\pi\xi} e^{-y)^2}\, dy = e^{-\xi^2\pi^2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R e^{-t^2}\, dt = e^{-\xi^2\pi^2}\sqrt{\pi}\ .$$

Analogamente si procede per $\xi < 0$.

Teorema 26.2.5.5 *Indichiamo con $e^{-\|x\|^2}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{-\|x\|^2}\ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora risulta

$$\mathcal{F}\left(e^{-\|x\|^2}\right)(\xi) = \pi^{\frac{N}{2}} e^{-\pi^2\|\xi\|^2}\ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\mathcal{F}\left(e^{-\|x\|^2}\right)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(x|\xi)} e^{-\|x\|^2}\, dx = \int_{R^N} e^{-2\pi i \sum_{i=1}^N x_i\xi_i} e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2}\, dx =$$

$$\int_{R^N} \prod_{i=1}^N e^{-2\pi i x_i\xi_i} \prod_{i=1}^N e^{-x_i^2}\, dx = \int_{R^N} \prod_{i=1}^N e^{-2\pi i x_i\xi_i} e^{-x_i^2}\, dx =$$

$$\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x_i\xi_i} e^{-x_i^2}\, dx = \prod_{i=1}^N \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\xi_i^2} = \pi^{\frac{N}{2}} e^{-\pi^2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2} = \pi^{\frac{N}{2}} e^{-\pi^2\|\xi\|^2}\ .$$

26.2.6 Linearità della trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.2.6.1 *La trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$,*

$$\mathcal{F}:\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})\longrightarrow \mathbf{C}^{R^N},\, f\longrightarrow \mathcal{F}(u)$$

è una funzione lineare (rispetto alla struttura di spazio vettoriale di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ e di $\mathbf{C}^{R^N}$).

Dimostrazione. Immediata.

26.2.7 Estensione del teorema della convergenza dominata

Sia X uno spazio topologico; sia $B\subset X$; sia $b\in\overline{B}$; sia $A\subset\mathbf{R}^N$; sia A misurabile; sia $f:B\times A\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$ supponiamo che per ogni $x\in B$ la funzione $f(x,\cdot):A\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$, $y\longrightarrow f(x,y)$ sia integrabile; supponiamo che esista $g:A\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$, g integrabile, tale che per ogni $x\in B$ e per ogni $y\in A$ sia $|f(x,y)|\leq g(y)$; supponiamo che esista $\mathcal{V}$ insieme numerabile di intorni di a tale che ogni intorno di a contenga almeno un intorno di $\mathcal{V}$; sia $h:A\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$; supponiamo che per quasi ogni $y\in A$ sia $f(x,y)\longrightarrow_{x\to a} h(x)$; allora h è integrabile, la funzione $B\longrightarrow\int_A f(x,y)\,dy$ è convergente per $x\to a$ e si ha

$$\lim_{x\to a}\int_A f(x,y)\,dy=\int_A h(y)\,dy\,.$$

Analogamente si procede per $f:B\times A\longrightarrow\mathbf{C}$ e per $h:A\longrightarrow\mathbf{C}$.

26.2.8 Continuità della trasformata di Fourier di u

Teorema 26.2.8.1 *Sia $u\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora $\hat{u}$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $\xi_0\in\mathbf{R}^N$.
Per ogni $\xi,x\in\mathbf{R}^N$, si ha $\left|e^{-2\pi(\xi|x)}u(x)\right|=|u(x)|$.
Per il teorema della convergenza dominata, si ha

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\hat{u}(\xi)=\lim_{\xi\to\xi_0}\int_{R^N}e^{-2\pi(\xi|x)}u(x)\,dx=\int_{R^N}\lim_{\xi\to\xi_0}e^{-2\pi(\xi|x)}u(x)\,dx=$$

$$\int_{R^N}e^{-2\pi(\xi_0|x)}u(x)\,dx=\hat{u}(\xi_0)\,.$$

Si ha dunque

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}))\subset C(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})\,.$$

26.2.9 Limite 0 per $\xi\to\infty$ della trasformata di Fourier di u

Teorema 26.2.9.1 *Sia $u\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$\hat{u}(\xi)\to_{\xi\to\infty}0\,.$$

Enunciato
In particolare si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}))\subset\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})\,.$$

26.2.10 Continuità della trasformazione di Fourier da $\mathcal{L}^1$ a $\mathcal{L}^\infty$

Teorema 26.2.10.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; allora si ha*

$$\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1 \ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{R^N} e^{-2\pi(\xi|x)} u(x)\, dx \right| \leq \int_{R^N} \left| e^{-2\pi(\xi|x)} u(x) \right| \, dx = \int_{R^N} |u(x)|\, dx = \|u\|_1 \ .$$

Da ciò segue subito la tesi.

In particolare la funzione

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}), u \longrightarrow \mathcal{F}(u)$$

è lineare e continua.

26.2.11 Trasformata di Fourier e traslazioni

Teorema 26.2.11.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; sia $a \in \mathbf{R}^N$; indichiamo con $u(x-a)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(x-a) \ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha

$$\mathcal{F}\left(u(x-a)\right)(\xi) = e^{-2\pi i(\xi|a)} \mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$\mathcal{F}\left(u(x-a)\right)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)} u(x-a)\, dx \ .$$

Sia

$$\varphi : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, x' \longrightarrow x' + a \ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha $|\det \varphi'(x)| = 1$. Si ha quindi

$$\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)} u(x-a)\, dx = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x'+a)} u(x')\, dx' =$$

$$\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x')} e^{-2\pi(\xi|a)} u(x')\, dx' = e^{-2\pi(\xi|a)} \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x')} u(x')\, dx' =$$

$$e^{-2\pi i(\xi|a)} \mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Teorema 26.2.11.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; sia $a \in \mathbf{R}^N$; indichiamo con $e^{2\pi i(x|a)} u(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{2\pi i(x|a)} u(x) \ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha

$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i(x|a)} u(x)\right)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi - a) \ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i(x|a)}u(x)\right)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)}e^{2\pi i(x|a)}u(x)\,dx =$$

$$\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)}e^{2\pi i(a|x)}u(x)\,dx = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi-a,x)}u(x)\,dx = \mathcal{F}(u)(\xi-a)\ .$$

26.2.12 Trasformata di Fourier e coniugato

Teorema 26.2.12.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; indichiamo con $\overline{u(x)}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \overline{u(x)}\ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha

$$\mathcal{F}\left(\overline{u(x)}\right)(\xi) = \overline{\mathcal{F}(u)(-\xi)}\ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$\mathcal{F}\left(\overline{u(x)}\right)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)}\overline{u(x)}\,dx = \int_{R^N} \overline{e^{2\pi i(\xi,x)}u(x)}\,dx =$$

$$\overline{\int_{R^N} e^{-2\pi i(-\xi,x)}u(x)\,dx} = \overline{\mathcal{F}(u)(-\xi)}\ .$$

26.2.13 Trasformata di Fourier di funzioni pari e di funzioni dispari

Teorema 26.2.13.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

1. *u pari $\Rightarrow \hat{u}$ pari;*
2. *u dispari $\Rightarrow \hat{u}$ dispari;*
3. *u reale pari $\Rightarrow \hat{u}$ reale pari;*
4. *u reale dispari $\Rightarrow \hat{u}$ immaginaria dispari.*

Dimostrazione. Proviamo (1).
Sia $\xi \in \mathbf{R}^N$. Si ha

$$\mathcal{F}u(-\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi(-\xi|x)}u(x)\,dx = \int_{R^N} e^{2\pi(\xi|x)}u(x)\,dx\ .$$

Sia

$$\varphi : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, x' \longrightarrow -x'\ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha $|\det\varphi'(x)| = 1$. Si ha quindi

$$\int_{R^N} e^{2\pi(\xi|x)}u(x)\,dx = \int_{R^N} e^{2\pi(\xi|-x')}u(-x')\,dx = \int_{R^N} e^{-2\pi(\xi|x')}u(x')\,dx = \mathcal{F}u(\xi)\ .$$

La (2) si prova analogamente.

La (3) e la (4) seguono dalle espressioni trovate sopra.

26.2.14 Trasformata di Fourier e matrici invertibili

Teorema 26.2.14.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $A \in \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$*; sia* A *invertibile; indichiamo con* $u(A^{-1}x)$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(Ax)\ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$*; allora si ha*

$$\mathcal{F}\left(u(Ax)\right)(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(u)({}^tA^{-1}\xi)\ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$\mathcal{F}\left(u(Ax)\right)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi,x)}u(Ax)\,dx\ .$$

Sia

$$\varphi : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, x' \longrightarrow A^{-1}x'\ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha $|\det \varphi'(x)| = |\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det A|}$. Si ha quindi

$$\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(Ax)\,dx = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|A^{-1}x')}u(x')\frac{1}{|\det A|}\,dx' =$$

$$\frac{1}{|\det A|}\int_{R^N} e^{-2\pi i({}^tA^{-1}\xi|x')}u(x')\,dx' = \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(u)({}^tA^{-1}\xi)\ .$$

26.2.15 Trasformata di Fourier e omotetie

Teorema 26.2.15.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $\lambda \in \mathbf{R}$*; sia* $\lambda \neq 0$*; indichiamo con* $u(\lambda x)$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(\lambda x)\ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$*; allora si ha*

$$\mathcal{F}(u(\lambda x)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^N}\mathcal{F}(u)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\ .$$

Dimostrazione. Sia $A = \lambda\mathcal{I}$; si ha A invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{I}$; essendo $\lambda > 0$ si ha $|\det A| = |\lambda^N| = |\lambda|^N$; si ha ${}^tA = A$. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha quindi

$$\mathcal{F}(u(\lambda x)(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(u)({}^tA^{-1}\xi) = \frac{1}{|\lambda|^N}\mathcal{F}(u)(A^{-1}\xi) = \frac{1}{|\lambda|^N}\mathcal{F}(u)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\ .$$

26.2.16 Trasformata di Fourier e matrici ortogonali

Teorema 26.2.16.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $A \in \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$; sia A ortogonale; indichiamo con $u(Ax)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(Ax) \ ;$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha

$$\mathcal{F}\left(u(Ax)\right)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Essendo A ortogonale si ha $|\det A| = 1$ e ${}^tA^{-1} = A$.

26.2.17 Trasformata di Fourier di funzioni radiali

Definizione 26.2.17.1 *Sia $f : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$; si dice che f è radiale se*

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}^N, \ \|x\| = \|y\|) \Rightarrow f(x) = f(y) \ .$$

Teorema 26.2.17.1 *Sia $f : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$; allora f è radiale se e solo se per ogni $A \in \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$, A ortogonale e per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha $u(Ax) = u(x)$.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 26.2.17.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$u \text{ radiale } \Rightarrow \hat{u} \text{ radiale } \ .$$

Dimostrazione. Sia u radiale. Sia $A \in \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$, A ortogonale; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$. Si ha

$$\mathcal{F}u(A\xi) = \mathcal{F}(u(Ax)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

26.2.18 Formula del prodotto

Teorema 26.2.18.1 *Siano $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$\int_{R^N} (\mathcal{F}u)v \, dx = \int_{R^N} u(\mathcal{F}v) \, dx \ .$$

Enunciato

26.2.19 Trasformata di Fourier su $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.2.19.1 *Sia $[f] \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; si pone*

$$\mathcal{F}([f]) = (\mathcal{F}f) \ .$$

Possiamo quindi considerare la trasformata di Fourier definita su $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

26.3 Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathrm{R}^N;\mathrm{C})$ e derivata

26.3.1 Trasformata di Fourier della derivata

Teorema 26.3.1.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $k = 1, 2, \ldots, N$*; sia* $D_k u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $u(x) \to_{x\to\infty} 0$*; sia* $\xi \in \mathbf{R}^N$*; allora si ha*

$$\mathcal{F}\left(D_k u\right)(\xi) = 2\pi i \xi_k \mathcal{F}(u)(\xi)\ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\mathcal{F}((D_k u)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)} D_k u(x)\, dx\ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo $q(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_N)$.
Consideriamo le formule di riduzione rispetto agli indici $(1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N)$ e (k). Si ha

$$\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)} D_k u(x)\, dx =$$

$$\int_{R^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)} D_k u(x)\, dx_k \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_N\ .$$

Per ogni $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^{N-1}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)} D_k u(x)\, dx_k = \lim_{y\to+\infty, y>0} \int_{-y}^{y} e^{-2\pi i(\xi|x)} D_k u(x)\, dx_k\ .$$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_k} e^{-2\pi i(\xi|x)} = -2\pi \xi_k e^{-2\pi i(\xi|x)}\ .$$

Per ogni $y \in \mathbf{R}_+^*$ si ha quindi

$$\int_{-y}^{y} e^{-2\pi i(\xi|x} D_k u(x)\, dx_k =$$

$$\left[e^{-2\pi(\xi|x)} u(x) \right]_{x_k=-y}^{x_k=y} - \int_{-y}^{y} -2\pi i \xi_k e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\, dx_k =$$

$$e^{-2\pi i(\xi|(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots x_N)} u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_N) -$$

$$e^{2\pi i(\xi|(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, -y, x_{k+1}, \ldots x_N)} u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, -y, x_{k+1}, \ldots, x_N) +$$

$$2\pi i \xi_k \int_{-y}^{y} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\, dx_k\ .$$

Essendo $u(x) \to_{x\to\infty} 0$, si ha $u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_N) \longrightarrow_{y\to+\infty} 0$.
Si ha quindi

$$|e^{-2\pi i(\xi|(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots x_N)} u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_N)| =$$

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_N)| \longrightarrow_{y\to+\infty} 0 \ .$$

Quindi si ha

$$e^{-2\pi i(\xi|(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots x_N)}u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_N) \longrightarrow_{y\to+\infty} 0 \ .$$

Analogamente si ha

$$e^{-2\pi i(\xi|(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},-y,x_{k+1},\ldots x_N)}u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, -y, x_{k+1}, \ldots, x_N) \longrightarrow_{y\to+\infty} 0 \ .$$

Essendo $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ la funzione

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x_k \longrightarrow e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)$$

è integrabile; si ha quindi

$$\int_{-y}^{y} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx_k \longrightarrow_{y\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx_k \ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{-y}^{y} e^{-2\pi i(\xi|x)}D_k u(x)\,dx_k = -2\pi i\xi_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx_k \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)}D_k u(x)\,dx_k = 2\pi\xi_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x}u(x)\,dx_k \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{R^{N-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)}D_k u(x)\,dx_k\right)dx_1dx_2\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_N =$$

$$\int_{R^{N-1}} 2\pi i\xi_k\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx_k\right)dx_1dx_2\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_N =$$

$$2\pi i\xi_k\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx = 2\pi\xi_k\mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Teorema 26.3.1.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $D_e u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $u(x) \to_{x\to\infty} 0$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha*

$$\mathcal{F}\left(D_e u\right)(\xi) = 2\pi i(\xi|e)\mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Identifichiamo le matrici con le corrispondenti trasformazioni lineari.
Sia A una matrice ortogonale tale $Ae = \mathbf{e}_1$.
Sia $v = u \circ A^{-1}$. Si ha $v \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.
Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$D_e u(x) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x+te) - u(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(A^{-1}(Ax) + tA^{-1}(A(e))) - u(A^{-1}(Ax))}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(A^{-1}(Ax) + tA^{-1}\mathbf{e}_1)) - u(A^{-1}(Ax))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(A^{-1}(Ax + t\mathbf{e}_1) - u(A^{-1}(Ax))}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{v(Ax + t\mathbf{e}_1) - v(x)}{t} = D_1 v(Ax) = (D_1 v \circ A)(x) \ .$$

Si ha quindi $D_1 v \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.
Sia $\xi \in \mathbf{R}^N$. Per il teorema sopra si ha

$$\mathcal{F}(D_e u)(\xi) = \mathcal{F}((D_1 v) \circ A)(\xi) = \mathcal{F}((D_1 v)(A\xi) = 2\pi i (A\xi)_1 \mathcal{F}(v)(A\xi) =$$

$$2\pi i (A\xi)_1 \mathcal{F}(u \circ A^{-1})(A\xi) = 2\pi i (A\xi)_1 \mathcal{F}(u)(A^{-1}(A\xi)) = 2\pi i (A\xi)_1 \mathcal{F}(u)(\xi)) \ .$$

Si ha poi

$$(A\xi)_1 = (A\xi | \mathbf{e}_1) = (\xi | A^{-1}\mathbf{e}_1) = (\xi | e) \ .$$

Da ciò la tesi.

Teorema 26.3.1.3 *Sia* $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $u' \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; sia* $u(x) \longrightarrow_{x \to \infty} 0$*; sia* $\xi \in \mathbf{R}$*; allora si ha*

$$\mathcal{F}\left(u'\right)(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

26.3.2 Derivata sotto il segno di integrale

Sia B un intervallo non degenere di $\mathbf{R}$; sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; sia $f : B \times A \longrightarrow \mathbf{R}$ supponiamo che per ogni $x \in B$ la funzione $f(x, \cdot) : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $y \longrightarrow f(x, y)$ sia integrabile; supponiamo che per ogni $y \in A$ la funzione $f(\cdot, y) : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow f(x, y)$ sia derivabile su I; supponiamo che esista $g : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$, g integrabile, tale che per ogni $x \in B$ e per ogni $y \in A$ sia $|D_1 f(x, y)| \leq g(y)$; allora per ogni $x \in B$ la funzione $D_1 f(x, \cdot) : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $y \longrightarrow D_1 f(x, y)$ è integrabile, per ogni $x \in B$ la funzione $B \longrightarrow \int_A f(x, y)\, dy$ è derivabile in x e si ha

$$\frac{d}{dc} \int_A f(x, y)\, dy = \int_A D_1 f(x, y)\, dy \ .$$

Analogamente si procede per $B \subset \mathbf{R}^M$, B aperto, con le derivate parziali.

26.3.3 Derivata della trasformata di Fourier

Teorema 26.3.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; indichiamo con $x_k u(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow x_k u(x) \ ;$$

sia $x_k u(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora $\mathcal{F}u$ è derivabile parzialmente rispetto all'indice k, $D_k\mathcal{F}u$ è continua e si ha

$$D_k(\mathcal{F}u)(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}(x_k u(x))(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$\mathcal{F}(x_k u)(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)} x_k u(x)\, dx = \int_{R^N} \frac{\partial}{\xi_k}\left(-\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\right) dx \ .$$

Si ha

$$|e^{-2\pi i(\xi|x)} x_k u(x)| = |x_k u(x)|$$

con $x_k u(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; si ha quindi

$$\int_{R^N} \frac{\partial}{\xi_k}\left(-\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\right) dx = \frac{\partial}{\xi_k}\int_{R^N} -\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\, dx =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\xi_k}\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\, dx = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\xi_k}\mathcal{F}(u)(\xi) \ .$$

Si ha quindi

$$D_k(\mathcal{F}u)(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}(x_k u(x))(\xi) \ .$$

Essendo $D_k(\mathcal{F}u$, $-2\pi i$ moltiplicato per una trasformata di Fourier, $D_k(\mathcal{F}u$ è continua.

Teorema 26.3.3.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; indichiamo con $(x|e)u(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow (x|e)u(x) \ ;$$

sia $(x|e)u(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora $\mathcal{F}u$ è di classe derivabile secondo la direzione e, $D_e\mathcal{F}u$ è continua e si ha

$$D_e(\mathcal{F}u)(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}\left((x|e)u(x)\right)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra utilizzando le trasformazioni ortogonali.

Teorema 26.3.3.3 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; indichiamo con $xu(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow xu(x) \ ;$$

sia $xu(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; allora $\mathcal{F}u$ è di classe C^1 e per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ si ha

$$(\mathcal{F}u)'(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}\left(xu(x)\right)(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

26.4 Regolarità e comportamento all'infinito per la trasformata di Fourier

26.4.1 Regolarità di u e trascurabiltà all'infinito della trasformata di Fourier

Teorema 26.4.1.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $u' \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $u(x) \longrightarrow_{x\to\infty} 0$; allora si ha*

$$\mathcal{F}u(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{|\xi|} .$$

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{F}\left(u'\right)(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(u)(\xi)$ si ha $\xi\mathcal{F}(u)(\xi) \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0$; quindi $\xi\frac{\mathcal{F}(u)(\xi)}{\frac{1}{\xi}} \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0$; quindi $\mathcal{F}u(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{|\xi|}$.

Più in generale:

Teorema 26.4.1.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \cap C^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia $D_k u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $u(x) \longrightarrow_{x\to\infty} 0$; allora si ha*

$$\mathcal{F}u(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{\|\xi\|} .$$

Dimostrazione. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ si ha $\mathcal{F}\left(D_k u\right)(\xi) = 2\pi i \xi_k \mathcal{F}(u)(\xi)$; si ha quindi $\xi_k\mathcal{F}(u)(\xi) \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0$; essendo $\|\xi\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k|$ si ha anche si ha quindi $\|\xi\|\mathcal{F}(u)(\xi) \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0$; quindi $\frac{\mathcal{F}(u)(\xi)}{\frac{1}{\|\xi\|}} \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0$; quindi $\mathcal{F}u(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{\|\xi\|}$.

Teorema 26.4.1.3 *Sia $n \in \mathbf{N}$; sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \cap C^n(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; per ogni $\nu \in \mathbf{N}^N$, $|\nu| \leq n$ sia sia $D^\nu u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $\nu \in \mathbf{N}^N$, $|\nu| < n$ sia $D^\nu u(x) \longrightarrow_{x\to\infty} 0$; allora si ha*

$$\mathcal{F}u(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{\|\xi\|^n} .$$

Dimostrazione. Segue da sopra procedendo per induzione.

26.4.2 Comportamento all'infinito di u e regolarità della trasformata di Fourier

Teorema 26.4.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow |x|u(x)$$

sia integrabile; allora $\mathcal{F}u$ è di classe C^1.

Dimostrazione. Segue da sopra.

Più in generale:

Teorema 26.4.2.2 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \|x\|u(x)$$

sia integrabile; allora $\mathcal{F}u$ è di classe C^1.

Dimostrazione. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ si ha $\|x_k u(x)| \leq \|x\| \cdot |u(x)|$; quindi $D_k u$ è di classe C^1,

Teorema 26.4.2.3 *Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \|x\|^n u(x)$$

sia integrabile; allora $\mathcal{F}u$ è di classe C^n.

Dimostrazione. Segue da sopra procedendo per induzione.

26.5 Antitrasformata di Fourier

26.5.1 Antitrasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.5.1.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $x \in \mathbf{R}^N$; poniamo*

$$\overline{\mathcal{F}}(u)(x) = \int_{R^N} e^{2\pi i(\xi|x)} u(\xi)\, d\xi \ .$$

Osservazione 26.5.1.1 Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$;
Se si pone per $\xi \in \mathbf{R}^N$,

$$\mathcal{F}_1 u(\xi) = \int_{R^N} e^{-i(\xi|x)} u(x)\, dx \ ,$$

allora per $x \in \mathbf{R}^N$ si pone

$$\overline{\mathcal{F}}_1(u)(x) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} e^{i(\xi|x)} u(\xi)\, d\xi \ .$$

Osservazione 26.5.1.2 Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$;
Se si pone per $\xi \in \mathbf{R}^N$,

$$\mathcal{F}_2 u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{R^N} e^{-i(\xi|x)} u(x)\, dx \ ,$$

allora per $x \in \mathbf{R}^N$ si pone

$$\overline{\mathcal{F}}_2(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{R^N} e^{i(\xi|x)} u(\xi)\, d\xi \ .$$

Definizione 26.5.1.2 *Sia $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; la funzione*

$$\overline{\mathcal{F}}(u) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}u(\xi)$$

si chiama antitrasformata (o cotrasformata) di Fourier di u.

Definizione 26.5.1.3 *La funzione*

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}^{R^N}, f \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}(u)$$

si chiama antitrasformata (o cotrasformata) di Fourier in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

26.5.2 Antitrasformata della trasformata

Teorema 26.5.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia u continua; sia u limitata; sia $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u) = u\ .$$

Enunciato
Per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ si ha quindi

$$u(x) = \int_{R^N} e^{2\pi(\xi|x)}\mathcal{F}(\xi)\,d\xi = \int_{R^N} e^{2\pi(\xi|x)}\left(\int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|t)}u(t)\,dt\right)d\xi\ .$$

Tale formula si chiama formula di inversione, con trasformata integrabile

26.6 Distribuzioni

26.6.1 Lo spazio vettoriale topologico $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$

Supporto di una funzione. Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; poniamo

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in A;\ f(x) \neq 0\}} \cap A\ .$$

$\mathrm{Supp}(f)$ si chiama supporto di f in A.
Si dice che f è a supporto compatto se $\mathrm{Supp}(f)$ è un compatto.
Poniamo

$$\mathcal{D}(A;\mathbf{C}) = \{f \in C^\infty(A;\mathbf{C});\ f \text{ a supporto compatto}\}\ .$$

Scriviamo anche $\mathcal{D}(A)$ al posto di $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$.
Esempio. Sia

$$v : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \end{cases}\ .$$

Si verifica facilmente che v è di classe C^∞. Sia

$$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow v(1-x^2)\ .$$

Si ha allora $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R};\mathbf{C})$.
$\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ è un sottospazio di $\mathbf{C}^A$; quindi $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale complesso.
Sia $K \subset A$; sia K compatto; poniamo

$$\mathcal{D}(A,K;\mathbf{C}) = \left\{f \in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C});\ f \text{ a supporto compatto}, \mathrm{Supp}(f) \subset K\right\}\ .$$

$\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$ è un sottospazio di $\mathbf{C}^A$; quindi $\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale complesso.
Per ogni $\nu \in \mathbf{N}^N$ e per per ogni $f \in \mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$ sia

$$p_\nu(f) = \sup_{x \in A} |D^\nu f(x)| \ .$$

Resta definita una famiglia di seminorme $(p_\nu)_{\nu \in N^N}$. Considerando il sistema di intorni definito da tale famiglia di seminorme resta definito lo spazio vettoriale topologico localmente convesso $\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$.
Esiste uno ed un solo sistema di intorni su $\mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ che definiscono uno spazio vettoriale topologico complesso localmente convesso $\mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ tale che per ogni spazio vettoriale topologico complesso E localmente convesso e per ogni $f : \mathcal{D}(A; \mathbf{C}) \longrightarrow E$ lineare, f è continua se e e solo se per ogni $K \subset A$, K compatto $f|\mathcal{D}(A; K; \mathbf{C})$ è continua.
Considereremo $\mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ canonicamente dotato di tale sistema di intorni.

26.6.2 Distribuzioni

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; si chiama distribuzione su A una funzione $T : \mathcal{D}(A; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua.
Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $T : \mathcal{D}(A; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. T è una distribuzione;
2. per ogni $K \subset A$ $T|\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$ continua;
3. per ogni $K \subset A$ per ogni $(\varphi_n)_{n \in N}$ successione di $\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$ tale che $\varphi_n \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(A, K; \mathbf{C})$, si ha $T(\varphi_n) \longrightarrow 0$ in $\mathbf{C}$;
4. $$(\forall K \subset A,\ K \text{ compatto})(\exists M \in \mathbf{R}_+^*)(\exists n \in \mathbf{N})(\forall f \in \mathcal{D}(A, K; \mathbf{C}))$$
$$|T(f)| \leq M \sup_{\nu \in N^N,\, |\nu| \leq n} \left(\sup_{x \in A} |D^\nu f(x)| \right) .$$

Poniamo
$$\mathcal{D}'(A; \mathbf{C}) = \{T \in \mathbf{C}^{\mathcal{D}}(A; \mathbf{C});\ T \text{ distribuzione}\} .$$
$\mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$ è quindi il duale topologico di $\mathcal{D}(A; \mathbf{C})$, con $\mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ dotato della topologia limite induttivo.
$\mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$ è quindi canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Considereremo $\mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$ canonicamente dotato della topologia debole. Se $(T_n)_{n \in N}$ è una successione di distribuzioni e se T è una distribuzione, allora si ha $T_n \longrightarrow_{n \to \infty} T$ in $\mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$ se e solo se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ si ha $T_n(\varphi) \longrightarrow_{n \to \infty} T(\varphi)$ in $\mathbf{C}$.
Sia $(T_n)_{n \in N}$ una successione di $\mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$; per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ la successione $(T_n(\varphi))_{n \in N}$ sia convergente in $\mathbf{C}$; sia
$$T : \mathcal{D}(A; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \lim_{n \to \infty} T_n(\varphi) ;$$
allora si ha $T \in \mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$.

26.6.3 Funzioni localmente integrabili

Funzioni localmente integrabili. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$, A misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; si dice che f è localmente integrabile se si ha

1. f misurabile;
2. $(\forall K \subset A, K \text{ compatto })\ f|K \in \mathcal{L}(A; \overline{\mathbf{R}})$.

Indichiamo con $\mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\overline{\mathbf{R}})$ o anche con $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(A;\overline{\mathbf{R}})$ l'insieme delle funzioni localmente integrabili da A a $\overline{\mathbf{R}}$.
Analogamente si definiscono le funzioni localmente integrabili a valori in $\mathbf{R}$ e a valori in $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$. I loro insiemi si indicano rispettivamente con $\mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{R})$ e $\mathcal{L}(A;\mathbf{C})$.
Poniamo

$$\mathcal{K}(A;\mathbf{C}) = \{f \in \mathbf{C}^A;\ f \text{ continua, } f \text{ a supporto compatto}\} .$$

La misura di Radon-Lebesgue è la funzione

$$\lambda : \mathcal{K}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \int_A \varphi \, d\lambda .$$

Sia $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{C})$; la misura di Radon associata ad f è la funzione

$$f \cdot \lambda : \mathcal{K}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \int_A f\varphi \, d\lambda .$$

Supposto A aperto, restringendo $f \cdot \lambda$ a $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ si ottiene una distribuzione, indicata ancora con $f \cdot \lambda$.
La distribuzione $f \cdot \lambda$ Sia ora A un aperto di $\mathbf{R}$; sia $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{C})$; poniamo

$$f \cdot \lambda : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \int_A f\varphi \, d\lambda .$$

$f \cdot \lambda$ è una distribuzione che si dice associata ad f.
Passando alle distribuzioni associate, le funzioni localmente integrabili sono viste come particolari distribuzioni.
Si ha $C(A;\mathbf{C}) \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{C})$; quindi la definizione sopra si applica alle funzioni continue. In particolare per $f = 1$, λ è una distribuzione.
Per ogni $p \in [1,+\infty$ si ha $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{C}) \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{C})$; quindi la definizione sopra si applica alle funzioni di $\mathcal{L}^p(A;\mathbf{C})$.
Sia $p \in [1,+\infty$; sia $[f] \in \mathrm{L}^p(A;\mathbf{C})$; allora la distribuzione associata ad f si dice associata a $[f]$.
Se $f, g : A \longrightarrow \mathbf{C}$ sono continue, si ha $f \cdot \lambda = g \cdot \lambda$ se e solo se $f = g$; possiamo quindi identificare una funzione continua f con la distribuzione $f \cdot \lambda$.

26.6.4 La distribuzione δ_a

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; sia

$$\delta_a : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \varphi(a) ;$$

allora δ_a è una distribuzione.

26.6.5 Prodotto di una funzione di classe C^∞ e di una distribuzione

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $f \in C^\infty(A;\mathbf{C})$; sia $T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; allora

$$f \cdot T : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow T(f\varphi) ;$$

è una distribuzione.
Indichiamo con $f \cdot T$ tale distribuzione.

26.6.6 Distribuzione indotta

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $B \subset A$; sia B aperto; sia $\varphi \in \mathcal{D}(B;\mathbf{C})$; poniamo

$$\varphi^0 : A \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } x \in B \\ 0 & \text{per } x \in A - B \end{cases} .$$

Si ha $\varphi^0 \in \mathcal{D}(A;\mathbf{C})$.
Sia $T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; sia

$$T_B : \mathcal{D}(B;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow T(\varphi^0) ;$$

allora $T_B \in \mathcal{D}'(B;\mathbf{C})$. T_B si chiama distribuzione indotta su B da T.

26.6.7 Supporto di una distribuzione

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; sia

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ aperto}, I_A = 0\} ;$$

allora $(\mathcal{A}, \subset)$ ammette massimo.
Sia $\Omega = \max(\mathcal{A})$; allora $\mathrm{C}_X(\Omega)$ si chiama supporto di T.
Il supporto di I si indica $\mathrm{Supp}(T)$.

26.6.8 Distribuzioni a supporto compatto

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; si dice che T è una distribuzione a supporto compatto se $\mathrm{Supp}(T)$ è compatto.
Poniamo

$$\mathcal{E}(A;\mathbf{C}) = C^\infty(A;\mathbf{C}) .$$

$\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^A$; quindi $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale co,plesso.
Per ogni $\nu\mathbf{N}^N$, per ogni $K \subset A$, K compatto, per ogni $f \in \mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ sia

$$p_{K,\nu}(f) = \sup_{x \in K} |D^\nu f(x)| ;$$

restano in tal modo definite su $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ una famiglia di seminorme; consideriamo $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ del sistema di intorni associato a tale famiglia di seminorme; si ottiene in tal modo lo spazio vettoriale topologico $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$.
$\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ risulta uno spazio di Fréechet. Si ha $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ denso in $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$; in generale non è vero che una distribuzione sia continua rispetto alla topologia indotta su $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ dalla topologia di $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$; le distribuzioni a supporto compatto sono le distribuzioni continue rispetto alla topologia indotta su $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ dalla topologia di $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$.
Quindi una distribuzione a supporto compatto F si prolunga in modo unico in una funzione lineare continua S su $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$; viceversa una funzione lineare e continua S su $\mathcal{E}(A;\mathbf{C})$ ha per per restrizione a $\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ una distribuzione a supporto compatto; Si identifica S con $S|\mathcal{D}(A;\mathbf{C})$. in altri termini una distribuzione a supporto compatto T può essere vista come una funzione $T : \mathcal{E}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua. Per questo motivo l'insieme dele distribuzioni a supporto compatto si indica con $\mathcal{E}'(A;\mathbf{C})$.

26.6.9 Derivata di una distribuzione

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; poniamo

$$D_k T : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow -T(D_i\varphi) .$$

Si ha $D_k T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$.

La definizione è giustificata dal fatto che se $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(A;\mathbf{C})$ è continua, derivabile rispetto a k, con derivata $D_k f$ continua, allora si ha

$$D_k(f \cdot \lambda) = D_k f \cdot lambda \, .$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(A;\mathbf{C})$ si ha infatti

$$D_k(f \cdot \lambda) = -(f \cdot \lambda)(D_k\varphi) = -\int_A f D_k \varphi \, d\lambda \, .$$

Applicale formule di riduzione, posto per ogni $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in p_k(A)$, $A_k = \{x_k \in \mathbf{R}; (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in A$ si viene a considerare $\int_{A_k} f D_l \varphi \, dx_k$; applicando a tale integrale delle integrazioni per parti e tenendo conto che φ è a supporto compatto (quindi nulla negli 'estremi') si ha $\int_{A_k} f D_l \varphi \, dx = -\int_{A_k} D_k f \varphi \, dx_k$; applicando di nuovo le formule di riduzione si ottiene il risultato.
Sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; poniamo

$$D_e T : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow -T(D_e\varphi) \, .$$

Si ha $D_e T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f continua; sia f derivabile su A lungo la direzione e; sia $D_e f$ continua; allora si ha

$$D_e(f \cdot \lambda_A) = D_e f \lambda_A \, .$$

Sia $\nu \in \mathbf{N}^N$; poniamo

$$D^\nu T : \mathcal{D}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow (-1)^{|\nu|} T(D^\nu \varphi) \, .$$

Si ha $D^\nu T \in \mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia f di classe C^m; sia $\nu \in \mathbf{N}^N$; sia $|\nu| \leq m$; allora si ha

$$D^\nu(f \cdot \lambda_A) = D^\nu f \lambda_A \, .$$

Siano $\nu, \mu \in \mathbf{N}^N$; si ha

$$D^\mu(D^\nu T) = D^{\mu+\nu} T \, .$$

Sia $f \in C^\infty(A;\mathbf{C})$; allora si ha

$$D(f \cdot T) = f' \cdot T + f \cdot DT \, .$$

Sia $(T_n)_{n \in N}$ una successione di $\mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; sia $T \in \mathcal{D}(A;\mathbf{C})$; sia $T_n \longrightarrow_{n\to\infty} T$ in $\mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$; sia $\nu \in \mathbf{N}^N$; allora si ha sia $D^\nu T_n \longrightarrow_{n\to\infty} D^\nu T$ in $\mathcal{D}'(A;\mathbf{C})$.

26.6.10 Alcune derivate distribuzionali

Sia I un intervallo aperto non degenere di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $x_0 \in I$; sia f continua; sia $f|(I \cap]-\infty, x_0])$ di classe C^1; sia $f|(I \cap [x_0, +\infty[)$ di classe C^1; sia

$$d = \frac{\lim_{x \to x_0+,\, x > x_0} f'(x) + \lim_{x \to x_0-,\, x < x_0} f'(x)}{2} \, .$$

sia

$$g : I \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} f'(x) & \text{per } x \in I, x < x_0 \\ d & \text{per } x = x_0 \\ f'(x) & \text{per } x \in I, x > x_0 \end{cases} \; ;$$

g è localmente integrabile. e si ha

$$D(f \cdot \lambda) = g \cdot \lambda \, .$$

Il risultato, non dipende dal particolare valore assegnato a g in x_0.
Ad esempio $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $x \longrightarrow |x|$ e se $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $x \longrightarrow \operatorname{sgn} x$, si ha $D(f \cdot \lambda) = g \cdot \lambda$.
Sia I un intervallo aperto non degenere di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $x_0 \in I$; sia $f|(I \cap]-\infty, x_0[)$ convergente per $x \to x_0-$; sia $f|(I \cap]x_0, +\infty[)$ convergente per $x \to x_0+$; sia

$$f_1 : I \cap]-\infty, x_0] \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in I, x < x_0 \\ \lim_{x \to x_0-,\, x < x_0} f(x) & \text{per } x = x_0 \end{cases} \; ;$$

sia

$$f_2 : I\cap]-\infty, x_0] \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in I, x > x_0 \\ \lim_{x\to x_0+,\, x>x_0} f(x) & \text{per } x = x_0 \end{cases} ;$$

sia f_1 di classe C^1 su $I\cap]-\infty, x_0]$; sia f_2 di classe C^1 su $I \cap [x_0, +\infty[$; sia

$$d = \frac{\lim_{x\to x_0+,\, x>x_0} f'(x) + \lim_{x\to x_0-,\, x<x_0} f'(x)}{2} .$$

sia

$$g : I \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} f'(x) & \text{per } x \in I, x < x_0 \\ d & \text{per } x = x_0 \\ f'(x) & \text{per } x \in I, x > x_0 \end{cases} ;$$

allora si ha

$$D(f \cdot \lambda) = \left(\lim_{x\to x_0+,\, x>x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0-,\, x<x_0} f(x) \right) \delta_{x_0} + g \cdot \lambda .$$

Il risultato, non dipende dal particolare valore assegnato a g in x_0.
Ad esempio $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $x \longrightarrow \operatorname{sgn} x$ si ha $D(f \cdot \lambda) = 2\delta_0$.
Il teorema si generalizza sostituendo x_0 con un numero finito di punti di I.

26.6.11 Equazioni differenziali lineari distribuzionali

Definizione 26.6.11.1 *Sia $n \in \mathbf{N}$; sia $(a_i)_{i=1,2,\dots,n}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia I un intervallo aperto di $\mathbf{R}$ non degenere; sia $T \in \mathcal{D}'(I; \mathbf{C})$; sia $U \in \mathcal{D}'(I; \mathbf{C})$; si dice che U è soluzione distribuzionale di*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = T$$

se

$$D^n U + a_1 D^{n-1} U + \ldots + a_n U = T .$$

Osservazione 26.6.11.1 Se $(a_i)_{i=1,2,\dots,n}$ è una successione di $\mathbf{R}$; sia $f \in \mathcal{L}(I; \mathbf{R})$ allora si considerano soluzioni reali di

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f .$$

26.6.12 Valore principale di un integrale come distribuzione

Sia $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f localmente integrabile; supponiamo che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(A; \mathbf{C})$ $f \cdot \varphi$ ammetta valore principale; sia

$$T : \mathcal{D}(A; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi \, d\lambda ;$$

allora si ha $T \in \mathcal{D}'(A; \mathbf{C})$.
La distribuzione T si chiama ancora valore principale in 0 di $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ e, per abuso, si indica $f \cdot \lambda$.

Analogamente si procede con altri tipi di valore principale.

26.6.13 Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C})$

Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C})$. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $m \in \mathbf{N}$; poniamo

$$\mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C}) = \{ f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C});\ (\forall \alpha \in \mathbf{N}^N, |\alpha| \le m)(\exists g_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C}))\ D^\alpha (f \cdot \lambda) = g_\alpha \cdot \lambda \} .$$

$\mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A; \mathbf{C})$ si chiama spazio di Sobolev delle funzioni localmente integrabili con derivate distribuzionali fino all'ordine m funzioni localmente integrabili.
Se $D^\alpha(f \cdot \lambda) = g_\alpha \cdot \lambda$ si dice che g_α è una derivata distribuzionale di f.
Ad esempio se $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $x \longrightarrow |x|$ e se se $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $x \longrightarrow \operatorname{sgn} x$ allora si ha $f \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ e una derivata distribuzionale di f è g.

Due derivate distribuzionali di f sono uguali quasi dappertutto.
Evidentemente se $f \in \mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A;\mathbf{C})$ e se $h : A \longrightarrow \mathbf{C}$ è uguale quasi dappertutto a f, allora $h \in \mathcal{W}^m_{\mathrm{loc}}(A;\mathbf{C})$ e f e h hanno le stesse derivate distribuzionali g_α, per $|\alpha| \leq m$.
Identificando una funzione continua f con la distribuzione $f \cdot \lambda$ si ha canonicamente

$$C^m(A;\mathbf{C}) \subset W^m_{\mathrm{loc}}(A;\mathbf{C}) .$$

Per $u \in C^m(A;\mathbf{C})$ la derivata ordinaria di u coincide canonicamente con una derivata distribuzionale di u.
Sia $a \in \mathbf{R}$; allora di ha

$$D\delta_a : \mathcal{D}(\mathbf{R};\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow -\varphi'(a) .$$

26.6.14 Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$

Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ Sia I un intervallo aperto non degenere di $\mathbf{R}$; se $f \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ allora esiste una ed una sola $g \in C(I;\mathbf{C})$ g continua tale che $g = f$ quasi dappertutto. Quando scriviamo $f \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ supporremo f continua. Si ha quindi canonicamente

$$\mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C}) \subset C(I;\mathbf{C}) .$$

Integrale della derivata. Sia $f \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$; siano $x, y \in I$; sia f' una derivata distribuzionale di f; allora si ha

$$\int_x^y f' \, d\lambda = f(y) - f(x) .$$

Prodotto di due funzioni di $\mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$. Siano $f, g \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$; sia f' una derivata distribuzionale di f; sia g' una derivata distribuzionale di g; allora si ha $fg \in W^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ e una derivata distribuzionale di fg è $f'g + fg'$.
Integrazione per parti. Siano $f, g \in \mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$; sia f' una derivata distribuzionale di f; sia g' una derivata distribuzionale di g; siano $x, y \in I$; allora si ha

$$\int_x^y f'g = [fg]_x^y - \int_x^y fg' .$$

26.6.15 Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^1_{\mathrm{loc}}(A;\mathbf{C})$

Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ Analogamente se $f \in \mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ allora esiste una ed una sola $g \in C^{n-1}(I;\mathbf{C})$ tale che g è uguale a quasi dappertutto.
Quando scriviamo $f \in \mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$ supporremo $f \in C^{n-1}(I;\mathbf{C})$.

Si ha quindi canonicamente

$$\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C}) \subset C^{n-1}(I;\mathbf{C}) .$$

26.6.16 Equazioni differenziali lineari in $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$

Equazioni differenziali lineari in $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$. Sia $n \in \mathbf{N}$; sia $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia I un intervallo aperto di $\mathbf{R}$ non degenere; sia $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$; sia $u \in \mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$; sia $u^{(n)}$ una deriva parziale distribuzionale n-esima di u; allora $u \cdot \lambda$ è soluzione distribuzionale di

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f$$

se e solo se di

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f$$

quasi dappertutto.
Problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare in $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(I;\mathbf{C})$.

Definizione 26.6.16.1 *Sia $n \in \mathbf{N}$; sia I un intervallo aperto di $\mathbf{R}$ non degenere; sia $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia $(b_i)_{i=0,1,\ldots,n-1}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(I;\mathbf{C})$; sia $x_0 \in I$; sia $u \in \mathbf{C}^I$; si dice che u è soluzione in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}(I;\mathbf{C})$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f \\ y(x_0) = b_0,\, y'(x_0) = b_1\, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

se

1. *u soluzione dell'equazione differenziale su*
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f\ ;$$
2. *per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ $u^{(k)}(x_0) = b_k$.*

Il problema di Cauchy in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}(I;\mathbf{C})$

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f \\ y(x_0) = b_0,\, y'(x_0) = b_1\, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione.
Se i coefficienti dell'equazione differenziale e le condizioni sono reali, si considerano problemi di Cauchy reali.

26.6.17 Equazioni differenziali lineari in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$

Equazione differenziale lineare in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$ Sia $n \in \mathbf{N}$; sia $a \in \mathbf{R}$; sia $b \in \overline{\mathbf{R}}$; sia $a < b$; sia $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$; sia $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$; si dice che u è soluzione in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$ dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f$$

se

1. $u|]a,b[\in \mathcal{W}^n_{\text{loc}}(]a,b[;\mathbf{C})$
2. u continua in 0;
3. per ogni $k = 1, 2\ldots, n-1$ $u|]a,b[^{(k)}(t)$ convergente per $t \to a$ (quindi per ogni $k = 1, 2\ldots, n-1$ u è derivabile k volte in a e $u^{(k)}(a) = \lim_{t\to a+, t\in]a,b[} u^{(k)}(t)$; dunque per ogni $k = 0, 1\ldots, n-1$ si ha $u \in C^k([a,b[,\mathbf{C}))$'
4. $u|]a,b[\cdot\lambda$ soluzione dell'equazione differenziale su $]a,b[$
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f|]a,b[\ ;$$

Analogamente si considera una equazione differenziale in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}(]a,b];\mathbf{C})$
Problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$ Sia $n \in \mathbf{N}$; sia $a \in \mathbf{R}$; sia $b \in \overline{\mathbf{R}}$; sia $a < b$; sia $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia $(b_i)_{i=0,1,\ldots,n-1}$ una successione di $\mathbf{C}$; sia $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$; sia $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{R})$; si dice che u è soluzione in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f \\ y(a) = b_0,\, y'(a) = b_1\, \ldots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases}$$

se

1. u è soluzione in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$ dell'equazione differenziale
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f\ ;$$
per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ $u^{(k)}(a) = b_k$.

Il problema di Cauchy in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}([a,b[;\mathbf{C})$

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f \\ y(a_0) = b_0,\, y'(a) = b_1\, \ldots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione.
Analogamente si considera un problema di Cauchy in $\mathcal{W}^n_{\text{loc}}(]a,b];\mathbf{C})$
Se i coefficienti dell'equazione differenziale e le condizioni sono reali, si considerano problemi di Cauchy reali.

26.7 Distribuzioni temperate

26.7.1 Lo spazio di Fréchet $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$

Poniamo

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C});\ (\forall m \in \mathbf{N})(\forall \nu \in \mathbf{N}^N)\ D^\nu f(x) \lll_{x\to\infty} \frac{1}{\|x\|^m} \right\} .$$

Gli elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ si chiamano funzioni declinanti.
$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^{R^N}$; quindi $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Sia $m \in \mathbf{N}$; sia $\nu \in \mathbf{N}^N$; sia $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; poniamo

$$q_{\nu,m}(f) = \sup_{x \in R^N} (1 + \|x\|)^m |D^\nu f(x)| .$$

Resta così definita su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ una famiglia numerabile di seminorme. Consideriamo $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ canonicamente dotato del sistema di intorni generato da tale famiglia di seminorme. Si ottiene lo spazio vettoriale topologico $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$;
$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è uno spazio di Fréchet,
Si ha

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$$

e la funzione

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), f \longrightarrow f$$

è continua.
Da ciò segue che una $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua, ristretta a $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ dà una distribuzione.
L'insieme $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è denso nello spazio vettoriale topologico $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ (rispetto alla topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$).
Ciò non implica che sia possibile estendere una distribuzione $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ in una funzione $S : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua, in quanto non è detto che T sia continua rispetto alla topologia indotta su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ dalla topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

26.7.2 Lo spazio vettoriale topologico delle distribuzioni temperate

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; si dice che T è una distribuzione temperata se T è continua rispetto alla topologia indotta su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ dalla topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.
Dunque una distribuzione temperata è una $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C})$ lineare tale che

$$(\exists m, n \in \mathbf{N})(\exists c \in \mathbf{R}_+^*)(\forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})\ |T(f)| \le c \sup_{|\nu|\le n} \sup_{x\in R^N} \|x\|^m |D^\nu f(x)| .$$

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora T è una distribuzione temperata se e solo se esiste una ed una sola $S : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C}$ continua tale che $T = S|\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Infatti $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Identifichiamo T con S; l'insieme delle distribuzioni temperata si identifica allora con il duale $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Indichiamo con $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ anche l'insieme delle distribuzioni temperate. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, possiamo considerare dunque $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua o $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare e continua.
Considereremo $\mathcal{S}'(A;\mathbf{C})$ canonicamente dotato della topologia debole considerato come spazio di funzioni da $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Se $(T_n)_{n\in N}$ è una successione di distribuzioni temperate e se T è una distribuzione temperata, allora si ha $T_n \longrightarrow_{n\to\infty} T$ in $\mathcal{S}'(A;\mathbf{C})$ se e solo se per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(A;\mathbf{C})$ si ha $T_n(\varphi) \longrightarrow_{n\to\infty} T(\varphi)$ in $\mathbf{C}$.

Sia $(T_n)_{n\in N}$ una successione di $\mathcal{S}'(A;\mathbf{C})$; per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(A;\mathbf{C})$ la successione $(T_n(\varphi))_{n\in N}$ sia convergente in $\mathbf{C}$; sia

$$T : \mathcal{S}(A;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, \varphi \longrightarrow \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) \; ;$$

allora si ha $T \in \mathcal{S}'(A;\mathbf{C})$.
Si ha

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$$

e la funzione

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), T \longrightarrow T$$

è continua.

26.7.3 Distribuzioni a supporto compatto come distribuzioni temperate

Distribuzioni a supporto compatto come distribuzioni temperate Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; sia T a supporto compatto; allora T è una distribuzione temperata.

Si ha dunque

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \subset \mathcal{S}'(E;\mathbf{C}) \; .$$

Misure δ_a come distribuzioni temperate Sia $a \in \mathbf{R}^N$; allora

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C}, f \longrightarrow f(a)$$

è una distribuzione temperata.
Infatti δ_a è una distribuzione a supporto compatto.

26.7.4 Distribuzioni $f \cdot \lambda$ che sono distribuzioni temperate

In generale non è detto che se $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ allora $f \cdot \lambda$ sia una distribuzione temperata; in linea di massima $f \cdot \lambda$ è una distribuzione temperata se $f(x)$ non cresce molto per $x \to \infty$.
Sia $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; supponiamo che esista ogni $m \in \mathbf{N}$ tale che la funzione

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|^m}$$

sia integrabile; allora $f \cdot \lambda$ è una distribuzione temperata.
Funzioni a crescenza lenta. Sia $f : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$; si dice che f è una funzione a crescenza lenta se

$$(\exists m \in \mathbf{N}) \; f(x) \preceq_{x\to\infty} \|x\|^m \; .$$

Funzioni a crescenza lenta come distribuzioni temperate. Sia $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; sia f a crescenza lenta; allora $f \cdot \lambda$ è una distribuzione temperata.
In particolare λ è una distribuzione temperata.
Funzioni di $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ come distribuzioni temperate Sia $p \in [1,+\infty]$; sia $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; allora $f \cdot \lambda$ è una distribuzione temperata.

26.7.5 Derivata di una distribuzione temperata

sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; sia $\nu \in \mathbf{N}^N$; allora si ha $D^\nu T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.

26.7.6 Prodotto di una funzione temperata e di una distribuzione tempera-ta

Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; si dice che f è una funzione temperata se

$$(\forall \nu \in \mathbf{N}^N) \; D^\nu f \text{ funzione a crescenza lenta} \; .$$

Sia $g \in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia g una funzione temperata; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; allora si ha $g \cdot T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.

26.8 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

26.8.1 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.8.1.1 *L'insieme $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ è un sottospazio di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.*

Dimostrazione. Immediata.

Possiamo quindi applicare $\mathcal{F}$ a $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Teorema 26.8.1.2 *Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ e $\overline{\mathcal{F}}u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.*

Dimostrazione. Segue dai teoremi sul rapporto fra regorarità e comportamento all'infinito di u e della trasformata di Fourier di u visti.

Teorema 26.8.1.3 *La funzione*

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), u \longrightarrow \mathcal{F}u$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici;
l'isomorfismo inverso è

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), u \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}u \ .$$

Enunciato
Indichiamo ancora con $\mathcal{F}$ la funzione

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), u \longrightarrow \mathcal{F}u \ .$$

Indichiamo ancora con $\overline{\mathcal{F}}$ la funzione

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), u \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}u \ .$$

26.8.2 Trasformata di Fourier della derivata in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.8.2.1 *Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha*

$$\mathcal{F}(D_e u)(\xi) = 2\pi i(\xi|e)\mathcal{F}u(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema visto sulla trasformata di Fourier della derivata.

26.8.3 Derivata della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.8.3.1 *Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; indichiamo con $(x|e)u(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow (x|e)u(x) \ .$$

sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; allora si ha

$$D_e(\mathcal{F}u)(\xi) = -2\pi i\mathcal{F}((x|e)u(x))(\xi) \ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema visto sulla derivata della trasformata di Fourier.

26.8.4 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.8.4.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; poniamo*

$$\mathcal{F}T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, u \longrightarrow T(\mathcal{F}u) \ .$$

Teorema 26.8.4.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.*

Enunciato

Definizione 26.8.4.2 *La funzione*

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, T \longrightarrow \mathcal{F}T$$

si chiama trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Indichiamo ancora con $\mathcal{F}$ la funzione

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, T \longrightarrow \mathcal{F}T$$

Si ha dunque

$$(\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})(\forall u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \ \langle \mathcal{F}T, u\rangle = \langle T, \mathcal{F}u\rangle \ .$$

26.8.5 Cotrasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.8.5.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; poniamo*

$$\overline{\mathcal{F}}T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, u \longrightarrow T(\overline{\mathcal{F}}u) \ .$$

Teorema 26.8.5.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $\overline{\mathcal{F}}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.*

Enunciato

Definizione 26.8.5.2 *La funzione*

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, T \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}T$$

si chiama cotrasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Indichiamo ancora con $\overline{\mathcal{F}}$ la funzione

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, T \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}T$$

26.8.6 Trasformata e cotrasformata di una distribuzione temperata

Definizione 26.8.6.1 *Sia* $f : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$*; poniamo*

$$\check{f} : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow f(-x) \ .$$

La funzione $\check{f}$ si chiama immagine opposta di f.

Teorema 26.8.6.1 *Sia* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; allora si ha* $\check{f} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Definizione 26.8.6.2 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; poniamo*

$$\check{T} : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, f \longrightarrow T(\check{f}) \ .$$

La distribuzione $\check{T}$ si chiama immagine opposta di T.

Teorema 26.8.6.2 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; allora si ha* $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 26.8.6.3 *Sia* $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; allora si ha* $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 26.8.6.4 *Sia* $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; allora si ha*

1. $\overline{\mathcal{F}}T = \mathcal{F}\check{T} = (\mathcal{F}T)\check{}$;
2. $\overline{\mathcal{F}}T = \overline{\mathcal{F}\overline{T}}$.

Dimostrazione. *

26.8.7 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ come isomorfismo

Teorema 26.8.7.1 *La funzione*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N), T \longrightarrow \mathcal{F}T$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici;
l'isomorfismo inverso è

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N), T \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}T \ .$$

Dimostrazione. *

26.8.8 Trasformata di Fourier e traslazione

Definizione 26.8.8.1 *Sia* $f:\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; poniamo*

$$\gamma(a)f:\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x\longrightarrow f(a+x)\ .$$

La funzione $\gamma(a)f$ si chiama traslata di f di a.

Teorema 26.8.8.1 *Sia* $f\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; allora si ha* $\gamma(a)f\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Definizione 26.8.8.2 *Sia* $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; poniamo*

$$\gamma(a)T:\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}),\longrightarrow \mathbf{C}, f\longrightarrow T(\gamma(a)f\ .$$

La distribuzione $\gamma(a)T$ si chiama traslata di T.

Teorema 26.8.8.2 *Sia* $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; allora si ha* $\gamma(a)T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 26.8.8.3 *Sia* $f\in\mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; allora si ha*

$$\gamma(a)(f\cdot\lambda)=(\gamma(-a)f)\cdot\lambda\ .$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ si ha

$$\gamma(a)(f\cdot\lambda)(\varphi)=(f\cdot\lambda)(\gamma(a)\varphi)=\int_{R^N} f(x)\varphi(a+x)\,dx=$$

$$\int_{R^N} f(x-a)\varphi(x)\,dx=((\gamma(-a)f)\cdot\lambda)(\varphi)\ .$$

Teorema 26.8.8.4 *Sia* $T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; allora si ha* $\gamma(a)T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 26.8.8.5 *Sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; sia* $T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; indichiamo con* $e^{-2\pi i(a|\xi)}$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^N\longrightarrow\mathbf{C},\xi\longrightarrow e^{-2\pi i(a|\xi)}\ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(\gamma(a)T)=e^{-2\pi i(a|\xi)}\mathcal{F}T\ .$$

Enunciato

Teorema 26.8.8.6 *Sia* $a\in\mathbf{R}^N$*; sia* $T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; indichiamo con* $e^{2\pi i(a|x)}$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^N\longrightarrow\mathbf{C},\xi\longrightarrow e^{2\pi i(a|x)}\ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i(a|x)}T)=\gamma(a)\mathcal{F}T\ .$$

Enunciato

26.8.9 Trasformata di Fourier e derivazione

Teorema 26.8.9.1 *Sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; indichiamo con $(\xi|e)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow (\xi|e) ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(D_e T) = 2\pi i(\xi|e)\mathcal{F}T .$$

Enunciato

Teorema 26.8.9.2 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; indichiamo con ξ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \xi ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(T') = 2\pi i\xi\mathcal{F}T .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 26.8.9.3 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; sia $n \in \mathbf{N}$; indichiamo con ξ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \xi ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(T^{(n)}) = (2\pi i\xi)^n\mathcal{F}T .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 26.8.9.4 *Sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; indichiamo con $(\xi|e)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow (\xi|e) ;$$

allora si ha

$$\overline{\mathcal{F}}(D_e T) = -2\pi i(\xi|e)\overline{\mathcal{F}}T .$$

Enunciato

Teorema 26.8.9.5 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; indichiamo con ξ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \xi ;$$

allora si ha

$$\overline{\mathcal{F}}(T') = -2\pi i\xi\mathcal{F}T .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 26.8.9.6 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; sia $n \in \mathbf{N}$; indichiamo con ξ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \xi ;$$

allora si ha

$$\overline{\mathcal{F}}(T^{(n)}) = (-2\pi i\xi)^n\mathcal{F}T .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 26.8.9.7 *Sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; indichiamo con $(x|e)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow (x|e) ;$$

allora si ha

$$D_e(\mathcal{F}T) = -2\pi i \mathcal{F}((x|e)T) .$$

Enunciato

Teorema 26.8.9.8 *Sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; indichiamo con $(x|e)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow (x|e) ;$$

allora si ha

$$D_e(\overline{\mathcal{F}}T) = 2\pi i \overline{\mathcal{F}}((x|e)T) .$$

Enunciato

26.8.10 Trasformata di Fourier di $u(T)$

Definizione 26.8.10.1 *Sia $u : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N$ isomorfismo lineare; sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; poniamo*

$$u(T) : \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \longrightarrow \mathbf{C}, f \longrightarrow f \circ u .$$

Teorema 26.8.10.1 *Sia $u : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N$ isomorfismo lineare; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $u(T) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$.*

Enunciato

Teorema 26.8.10.2 *Sia $u : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N$ isomorfismo lineare; sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$\mathcal{F}(u(T)) = |\det u|^{-1}(u^*)^{-1}\mathcal{F}T .$$

Enunciato

26.8.11 Trasformata di Fourier di $u_t(T)$

Teorema 26.8.11.1 *Sia $t \in \mathbf{R}^*$; sia*

$$u : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, x \longrightarrow tx ;$$

sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha

$$\mathcal{F}(u_t(T)) = \frac{1}{|t|^N}(u_{\frac{1}{t}}\mathcal{F}T .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

26.8.12 La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$

Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; sia $\xi \in \mathbf{R}^N$; se si pone

$$\mathcal{F}_1 u(\xi) = \int_{R^N} e^{-i(\xi|x)} u(x)\, dx \ ,$$

e se si procede come sopra, si ottiene la trasformata di Fourier $\mathcal{F}_1$ su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ sia

$$u_t : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow tx \ .$$

Per ogni $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ si ha allora

1. $\mathcal{F}T = \frac{1}{(2\pi)^N} u_{\frac{1}{2\pi}} \mathcal{F}_1 T)$;

2. $\mathcal{F}_1 T = (2\pi)^N u_{2\pi} \mathcal{F} T$.

Infatti per ogni $t \in \mathbf{R}$ sia

$$u_t : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N, t \longrightarrow tx \ .$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ si ha

$$\mathcal{F}(T)(\varphi) = T(\mathcal{F}(\varphi)) = T(\mathcal{F}_1(\varphi)(2\pi\xi)) = u_{2\pi}(T)(\mathcal{F}_1(\varphi)) =$$

$$(\mathcal{F}_1 u_{2\pi}(T))(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^N} u_{\frac{1}{2\pi}} \mathcal{F}_1 T) \ .$$

Per la dimostrazione di (2) si procede analogamente.

26.9 Trasformata di Fourier di una distribuzione di $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$

26.9.1 Restrizione della trasformazione di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ a $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$

Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ allora $\mathcal{F}f$ è una funzione continua, dunque localmente integrabile; possiamo quindi considerare $(\mathcal{F}f) \cdot \lambda$.

Teorema 26.9.1.1 *Sia* $[f] \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; allora si ha*

$$\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = (\mathcal{F}f) \cdot \lambda \ ,$$

dove $\mathcal{F}(f \cdot \lambda)$ *è la trasformata di Fourier della distribuzione temperata* $f \cdot \lambda$*,* $\mathcal{F}f$ *è trasformata di Fourier della funzione integrabile* f*.*

Dimostrazione. *

Essendo $\mathcal{F}f$ continua, $(\mathcal{F}f)\cdot\lambda$ si identifica canonicamente con $\mathcal{F}f$, dunque con la funzione

$$\mathcal{F}f : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \int_{R^N} e^{2\pi i(\xi|x)} f(x)\,dx\ .$$

Possiamo quindi dire con il senso del teorema sopra, che la trasformata di Fourier di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ ristretta a $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ (identificando $[f]$ con $f\cdot\lambda$) è la trasformata di Fourier di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Si ha un analogo risultato per la cotrasformata di Fourier.

Esercizio. Sia

$$H : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

(funzione di Heaviside);

1. risolvere in $\mathcal{S}(\mathbf{R};\mathbf{C})$ l'equazione differenziale di incognita y,
$$y'' + 4y' + 4y = (H(x)e^{-x}x)\cdot\lambda\ ;$$
2. risolvere in $\mathcal{C}^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ l'equazione differenziale di incognita y,
$$y'' + 4y' + 4y = H(x)e^{-x}x\ .$$

Risoluzione.

1. Si ha
$$H(x)e^{-x}x = \begin{cases} e^{-x}x & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}\ .$$
Quindi la funzione $H(x)e^{-x}x$ è integrabile; quindi $(H(x)e^{-x}x)\cdot\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.
Sia $y \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.
Si ha
$$y'' + 4y' + 4y = (H(x)e^{-x}x)\cdot\lambda$$
se e solo se
$$\mathcal{F}(y'' + 4y' + 4y) = \mathcal{F}(H(x)e^{-x}x)\cdot\lambda)\ ;$$
Si ha
$$\mathcal{F}(y'' + 4y' + 4y) = (2\pi i\xi)^2(\mathcal{F}y) + 4(2\pi\xi)(\mathcal{F}y) + 4(\mathcal{F}y) =$$
$$(-2\pi i\xi)^2 + 4(2\pi\xi) + 4)\cdot(\mathcal{F}y) = (2\pi i\xi + 2)^2\cdot(\mathcal{F}y)\ .$$
Essendo $H(x)e^{-x}x$ integrabile, $\mathcal{F}((H(x)e^{-x}x)\cdot\lambda)$ coincide canonicamente con la funzione
$$\mathcal{F}(H(x)e^{-x}x)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x} H(x)e^{-x}x\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-2\pi\xi x - x}\,dx =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y xe^{-(2\pi\xi x+1)x}\,dx =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2\pi i\xi+1}e^{-(2\pi i\xi+1)x}x\right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2\pi i\xi+1}e^{-(2\pi i\xi+1)x}\,dx\right) =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2\pi i\xi+1}e^{-(2\pi i\xi+1)x}x\right]_0^y + \frac{1}{2\pi i\xi+1}\int_0^y e^{-(2\pi i\xi+1)x}\,dx\right) =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i\xi+1}e^{-(2\pi i\xi+1)x}x - \frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}e^{-(2\pi i\xi+1)x}\right]_0^y =$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{y}{2\pi i\xi+1}-\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\right)e^{-(2\pi i\xi+1)y}+\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\ .$$

Si ha

$$ye^{(-2\pi i\xi+1)y}=ye^{-2\pi i\xi}e^{-y}\simeq_{y\to+\infty}ye^{-y}\longrightarrow_{y\to+\infty}=0$$

e

$$e^{(-2\pi i\xi+1)y}=ye^{-2\pi i\xi}e^{-y}\simeq_{y\to+\infty}e^{-y}\longrightarrow_{y\to+\infty}=0\ .$$

Si ha quindi

$$\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{y}{2\pi i\xi+1}-\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\right)e^{-(2\pi i\xi+1)y}+\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}=\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\ .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{F}(H(x)e^{-x}x)(\xi)=\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\ .$$

y è quindi soluzione dell'equazione differenziale se e solo se

$$(2\pi i\xi+2)^2\cdot(\mathcal{F}y)=\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2}\right)\cdot\lambda\ .$$

La funzione $\frac{1}{(2\pi i\xi+2)^2}$ è definita su $\mathbf{R}$, è di classe C^∞ ed è temperata; l'uguaglianza sopra equivale all'uguaglianza in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$,

$$\mathcal{F}y=\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}\right)\cdot\lambda\ .$$

Quindi a

$$y=\overline{\mathcal{F}}\left(\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}\right)\cdot\lambda\right)\ .$$

La funzione $\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}$ è integrabile su $\mathbf{R}$.
Si ha quindi

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}\right)\cdot\lambda\right)=\overline{\mathcal{F}}(\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}\right)\cdot\lambda\ .$$

Si ha

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}\right)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}e^{2\pi x\xi}\,d\xi\ .$$

Sia

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\ .$$

$f(z)$ ha punti singolari $-\frac{1}{2\pi i}=\frac{1}{2\pi}i$ e $-\frac{2}{2\pi i}=\frac{1}{\pi}i$; $\frac{1}{2\pi}i$ e $\frac{1}{\pi}i$ sono zeri del secondo ordine di $\frac{1}{f(z)}$; quindi poli del secondo ordine di $f(z)$.
Il residuo di $f(z)$ in $\frac{1}{2\pi}i$ è

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z-\frac{1}{2\pi}i\right)^2f(z)\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z-\frac{1}{2\pi}i\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\right)=$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z+\frac{1}{2\pi i}\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\right)=$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(\frac{2\pi iz+1}{2\pi i}i\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dz}\frac{e^{2\pi xz}}{(2\pi iz+2)^2}=$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}2\pi ix(2\pi iz+2)^2-2(2\pi iz+2)2\pi ie^{2\pi ixz}}{(2\pi xz+2)^4} =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}(2\pi ix(2\pi iz+2)-4\pi i)}{(2\pi xz+2)^3} = \lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}(-4\pi^2xz+4\pi ix-4\pi i)}{(2\pi xz+2)^3} =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}i} -\frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi ixz}(-\pi xz+ix-i)}{(2\pi xz+2)^3} = -\frac{1}{\pi}\frac{e^{-x}(-\frac{1}{2}xi+ix-i)}{(-1+2)^3} =$$

$$-\frac{1}{\pi}e^{-x}(\frac{1}{2}x-1)i = -\frac{1}{2\pi}e^{-x}(x-2)i\ .$$

Il residuo di $f(z)$ in $\frac{1}{\pi}i$ è

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z-\frac{1}{\pi}i\right)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to\frac{1}{\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z-\frac{1}{\pi}i\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\right) =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(z+\frac{1}{\pi i}\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2(2\pi iz+2)^2}e^{2\pi xz}\right) =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i}\frac{d}{dz}\left(\left(\frac{\pi iz+1}{\pi i}i\right)^2\frac{1}{(2\pi iz+1)^2 4(\pi iz+1)^2}e^{2\pi xz}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dz}\frac{e^{2\pi xz}}{(2\pi iz+1)^2} =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}2\pi ix(2\pi iz+2)^2-2(2\pi iz+1)2\pi ie^{2\pi ixz}}{(2\pi xz+1)^4} =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}(2\pi ix(2\pi iz+1)-4\pi i)}{(2\pi xz+1)^3} = \lim_{z\to\frac{1}{\pi}i} -\frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{2\pi ixz}(-4\pi^2xz+2\pi ix-4\pi i)}{(2\pi xz+1)^3} =$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi}i} -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{2\pi ixz}(-2\pi xz+ix-2i)}{(2\pi xz+1)^3} = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2x}(-2xi+ix-2i)}{(-2+1)^3} = -\frac{1}{2\pi}e^{-2x}(-x-2)i\ .$$

Sia $x\geq 0$; si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}e^{2\pi x\xi}\,d\xi = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi}e^{-x}(x-2)i+-\frac{1}{2\pi}e^{-2x}(-x-2)i\right) =$$

$$2\pi i\frac{-e^{-x}(x-2)-e^{-2x}(x+2)}{2\pi}i = e^{-x}(x-2)+e^{-2x}(x+2)\ .$$

Sia $x<0$; si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi i\xi+1)^2(2\pi i\xi+2)^2}e^{2\pi x\xi}\,d\xi = 0\ .$$

Sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-2)+e^{-2x}(x+2) & \text{per } x\geq 0\\ 0 & \text{per } x<0\end{cases}\ .$$

Si ha quindi

$$y = \varphi(x)\cdot\lambda\ .$$

y si identifica quindi con $\varphi(x)$.

Quindi esiste una ed una sola $y\in\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ verificante l'equazione differenziale; tale y si identifica con la funzione φ.

2. Essendo φ antitrasformata di Fourier di una funzione integrabile φ è continua.

   Per $x>0$ si ha
   $\varphi(x) = xe^{-x}-2e^{-x}+xe^{-2x}+2e^{-2x}$,
   $\varphi'(x) = 3e^{-x}-xe^{-x}-3e^{-2x}-2xe^{-2x}$,
   $\varphi''(x) = -4e^{-x}+xe^{-x}+4e^{-2x}+4xe^{-2x}$.

Si ha quindi $\lim_{x\to 0+}\varphi'(x) = 3-3=0$ e $\lim_{x\to 0+}\varphi'(x) = -4-4=0$.
Quindi φ è derivabile 2 volte in 0, si ha $\varphi'(0)=0$ e $\varphi''(0)=0$; inoltre φ è di classe C^2.
Quindi φ è soluzione ordinaria dell'equazione differenziale.
L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2+4\lambda+4=0\ ,$$

cioè

$$(\lambda+2)^2=0\ .$$

L'equazione ha un'unica soluzione, data da -2, doppia
Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale so quindi date da

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\varphi(x),\quad c_1,c_2\in\mathbf{R}\ .$$

26.9.2 Trasformata di Fourier di una funzione localmente integrabile come limite

Teorema 26.9.2.1 *Sia $u\in\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; supponiamo che esista $v\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, che esista $g\in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, g temperata tali che $u=vg$; per ogni $r>0$ sia*

$$f_r:\mathbf{R}^N\longrightarrow\mathbf{C},\xi\longrightarrow\int_{\mathrm{B}'(0,r)}e^{-2\pi i(\xi|x)}u(x)\,dx\ ;$$

allora si ha

1. $u\cdot\lambda\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$;
2. *la funzione*
$$]0,+\infty[\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}),r\longrightarrow f_r\cdot\lambda$$
è convergente per $r\to+\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$;
3. $$\mathcal{F}(u\cdot\lambda)=\lim_{r\to+\infty}(f_r\cdot\lambda)\ .$$

Dimostrazione. Essendo v integrabile, la distribuzione $v\cdot\lambda$ è temperata; per un teorema sopra lo è anche $g\cdot(v\cdot\lambda)=u\cdot\lambda$.

Per ogni $r>0$, sia

$$\varphi_r:\mathbf{R}^N\longrightarrow\mathbf{C},x\longrightarrow\begin{cases}1 & \text{per } \|x\|\le r\\ 0 & \text{per } \|x\|>r\end{cases}$$

la funzione caratteristica di $\mathrm{B}'(0,r)$.

Proviamo che in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ si ha $u\varphi_r\cdot\lambda\longrightarrow u\cdot\lambda$.

Sia $p\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; la funzione pg è limitata; esiste quindi $M>0$ tale che $|p(x)g(x)|\le M$ per ogni $x\in\mathbf{R}^N$; si ha quindi $u(x)\varphi_r(x)p(x)=v(x)g(x)\varphi_r(x)p(x)|\le M|v(x)|$.

Per ogni $x\in\mathbf{R}^N$ si ha $u(x)\varphi_r(x)\longrightarrow_{r\to+\infty}u(x)$.

Per il teorema della convergenza dominata si ha quindi

$$\int_{R^N} u\varphi_r p\,dx \longrightarrow \int_{R^N} up\,dx\ .$$

Quindi $u\varphi_r \cdot \lambda \longrightarrow u \cdot \lambda$.

Essendo $\mathcal{F}$ continua in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ la funzione

$$]0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}), r \longrightarrow \mathcal{F}(\varphi_r u \cdot \lambda)$$

è convergente per $r \to +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ e ha per limite $\mathcal{F}(u\cdot\lambda)$.

Per ogni $r > 0$ $u\varphi_r$ è integrabile.

Per ogni $r > 0$ e per ogni $\xi \in \mathbf{R}^N$ si ha

$$f_r(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\varphi_r(x)u(x)\ .$$

si ha quindi $\mathcal{F}(\varphi_r u) = f_r \cdot \lambda$.

Da ciò segue la tesi.

Teorema 26.9.2.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia u a crescenza lenta; per ogni $r > 0$ sia*

$$f_r : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \int_{\mathrm{B}'(0,r)} e^{-2\pi i(\xi|x)} u(x)\,dx\ ;$$

allora si ha

1. *la funzione*

$$]0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), r \longrightarrow f_r\cdot\lambda$$

è convergente per $r \to +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$;

2.

$$\mathcal{F}(u\cdot\lambda) = \lim_{r\to+\infty}(f_r\cdot\lambda)\ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra in quanto possiamo scrivere $u(x) = P(x)v(x)$ con $P(x)$ funzione polinomiale e $v \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Osservazione 26.9.2.1 Si hanno analoghi risultati per la cotrasformata di Fourier.

Osservazione 26.9.2.2 Supponiamo che per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ esista $\lim_{r\to\infty} f_r(x)$; ad esempio, per $N = 1$ che per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ che l'integrale improprio su un intervallo aperto $\int_{=\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x}u(x)\,dx$ sia convergente; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \lim_{r\to\infty} f_r(\xi)\ ;$$

il teorema sopra non implica che $f\cdot\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ e che, anche se $f\cdot\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ sia $\lim_{r\to\infty}(f_r(\xi)\cdot\lambda) = f\cdot\lambda$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

In ciò che segue un caso in cui ciò avviene, per la cotrasformata di Fourier.

26.9.3 Valore principale dell'integrale di una funzione su $]-\infty,+\infty[$

Definizione 26.9.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia*

$$s :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, r \longrightarrow \int_{-r}^{r} u(x)\,dx\ ;$$

si dice che l'integrale su $]-\infty,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ ammette valore principale se la funzione $s(r)$ è convergente per $r \to +\infty$; in tal caso si pone

$$\mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} u(x)\,dx\ ;$$

$\mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ si chiama valore principale dell'integrale su $]-\infty,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$.

26.9.4 Formula di inversione come valore principale

Teorema 26.9.4.1 *Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia f continua; supponiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$ esista $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ tale che la funzione*

$$p_x : [-\delta,\delta]-\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow \frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$

sia integrabile; allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi$ ammette valore principale e si ha

$$f(x) = \mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ix\xi}\mathcal{F}(\xi)\,d\xi\ .$$

Enunciato

Osservazione 26.9.4.1 Posto $g = \mathcal{F}f$ e posto

$$f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ix\xi}g(\xi)\,d\xi\ ,$$

si ha $\overline{\mathcal{F}}(g\cdot\lambda) = f_1\cdot\lambda$.

Osservazione 26.9.4.2 In particolare vale la tesi del teorema se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ è continua e se per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $f|[x-\delta,x]$ e $f|[x,x+\delta]$ sono di classe C^1.
Più in particolare se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ è di classe C^1.

Teorema 26.9.4.2 *Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $x_0 \in \mathbf{R}$; siano $f]x_0,+\infty[$ e $f|]-\infty,x_0[$ continue; sia $f]x_0,+\infty[$ convergente per $x \to x_0+$; sia $f|]-\infty,x_0[$ convergente per*

$x \to x_0+$; sia $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+, x\neq x_0} f(x)$; sia $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-, x\neq x_0} f(x)$; supponiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq x_0$ esista $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ tale che la funzione

$$p_x : [-\delta,\delta]-\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow \frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$

sia integrabile; supponiamo che esista $\delta_1 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che la funzione

$$p_1 :]0,\delta_1] \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow \frac{f(x_0+y)-f(x_0+)}{y}$$

sia integrabile; supponiamo che esista $\delta_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che la funzione

$$p_2 :]0,\delta_2] \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow \frac{f(x-y)-f(x_0-)}{y}$$

sia integrabile; allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi$ ammette valore principale e si ha

$$\mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} f(x) & \textit{per } x \neq x_0 \\ \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} & \textit{per } x = x_0 \end{cases} .$$

si ha

$$\overline{\mathcal{F}}(g\cdot\lambda) = f_1\cdot\lambda .$$

Enunciato

Osservazione 26.9.4.3 In particolare vale la tesi del teorema se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ è continua e se per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq x_0$ esiste $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ tale che $f|[x-\delta,x]$ e $f|[x,x+\delta]$ sono di classe C^1, se esiste δ_1 tale che $f|]x_0,x_0+\delta_1]$ è di classe C^1 e prolungabile su $[x_0,x_0+\delta_1]$ in una funzione di classe C^1 e se esiste δ_2 tale che $f|[x_0-\delta_2,x_0[$ è di classe C^1 e prolungabile su $[x_0-\delta_2,x_0]$ in una funzione di classe C^1.
Più in particolare se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ e $f|]-\infty,x_0[$ sono prolungabili per continuità in x_0 e i prolungamenti sono di classe C^1.

Osservazione 26.9.4.4 Il teorema si generalizza al caso di f continua su $\mathbf{R}-A$, con A finito.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases} ;$$

1. determinare la trasformata di Fourier di f;
2. dire se vale la formula di inversione per f e con quale significato;
3. esprimere $f(x)$ attraverso un integrale improprio convergente.

Risoluzione.

1. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; essendo f una funzione reale dispari di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ si ha
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\xi x)\, dx = -2i \int_0^1 \sin(2\pi\xi x)\, dx\ .$$
Supponiamo $\xi \neq 0$; si ha
$$-2i \int_0^1 \sin(2\pi\xi x)\, dx = -2i \left[-\frac{1}{2\pi\xi} \cos(2\pi\xi x) \right]_0^1 = \frac{i}{\pi\xi}(cos2\pi\xi) - 1) = \frac{i}{\pi} \frac{\cos(2\pi\xi) - 1}{\xi}\ .$$
Supponiamo $\xi = 0$; si ha
$$-2i \int_0^1 \sin(2\pi\xi x)\, dx = -2i \int_0^1 0\, dx = 0\ .$$
Si ha quindi
$$\mathcal{F}(f) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \begin{cases} \frac{i}{\pi} \frac{\cos(2\pi\xi)-1}{\xi} & \text{per } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{per } \xi = 0 \end{cases}\ .$$

2. Essendo $f|] - infty, -1[$, $f|] - 1, 0[$, $f|]0, 1[$, $f|]1, +\infty[$ prolungabili per continuità rispettivamente su $] - infty, -1]$, $f[-1, 0]$, $[0, 1]$, $f[1, +\infty[$ con prolungamenti di classe C^1 l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)\, d\xi$ ammette valore principale e si ha
$$f(x) = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \mathcal{F}(\xi)\, d\xi\ .$$

3. Per $\xi = 0$ $\frac{\cos(2\pi\xi)-1}{\xi}$ si intende uguale a $\lim_{\xi\to 0} \frac{\cos(2\pi\xi)-1}{\xi} = 0$.
Si ha
$$f(x) = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \frac{i}{\pi} \frac{\cos(2\pi\xi) - 1}{\xi}\, d\xi\ .$$
Uguagliando le parti reali, si ha
$$f(x) = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} -\sin(2\pi x\xi) \frac{1}{\pi} \frac{\cos(2\pi\xi) - 1}{\xi}\, d\xi = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)\, d\xi\ .$$
La funzione
$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \xi \longrightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)$$
è pari; quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)\, d\xi$ è convergente e si ha
$$\text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)\, d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)\, d\xi\ .$$
Si ha quindi
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\xi} \sin(2\pi x\xi)\, d\xi\ .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}\ ;$$
determinare la trasformata di Fourier di f.

Risoluzione. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; essendo f una funzione reale pari di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ si ha

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\xi x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi\xi x)\,dx\ .$$

Supponiamo $\xi \neq 0$; si ha

$$2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi\xi x)\,dx = 2\left(\left[\frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)(-1)\,dx\right) =$$

$$2\left(\left[\frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)(1-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)\,dx\right) =$$

$$2\left[\frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)(1-x) - \frac{1}{(2\pi\xi)^2}\cos(2\pi\xi x)\right]_0^1 =$$

$$2\left(-\frac{1}{4\pi^2\xi^2}\cos(2\pi\xi) + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1-\cos(2\pi\xi)}{\xi^2}\ .$$

Supponiamo $\xi = 0$; si ha

$$2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi\xi x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2(1 = \frac{1}{2}) = 1\ .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{F}(f) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1-\cos(2\pi\xi)}{\xi^2} & \text{per } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{per } \xi = 0 \end{cases}\ .$$

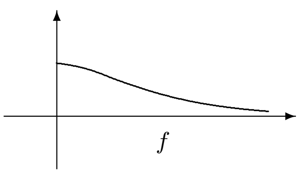
Esercizio. Sia

$$f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow (1+x)e^{-x}\ ;$$

1. studiare la funzione f determinando i limiti nei punti frontiera del dominio e la monotonia;
2. provare che esiste una ed una sola $g_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funzione pari tale che $g_1|]0,+\infty[= f$ e continua in 0; studiare la derivabilità di g_1 in 0;
3. provare che esiste una ed una sola $g_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funzione dispari tale che $g_2|]0,+\infty[= f$; studiare la contu=inuità di g_2 in 0;
4. provare che $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; a partire dalle proprietà di g_1 e di g_2, enunciare alcune proprietà riguardanti il comportamento asintotico di $\mathcal{F}(g_1)$ e $\mathcal{F}(g_2)$ per $x \to \infty$ e sulla integrabilità di $\mathcal{F}(g_2)$;
5. trovare $\mathcal{F}(g_1)$ e $\mathcal{F}(g_2)$;
6. dire se vale la formula di inversione per g_1 e per g_2 e con quale significato;
7. verificare le formule di inversione per g_1 e per g_2.

Risoluzione.

1. Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Per ogni $x \in \mathbf{R}_+^*$ si ha $f'(x) = e^{-x} + (1+x)e^{-x}(= 1) = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x}$; si ha $f'(x) < 0$; quindi f è strettamente decrescente.



2. Per ogni $x < 0$ deve essere $g_1(x) = f(-x) = (1-x)e^x$; deve essere $g_1(0) = \lim_{x\to 0+, x>0} f(x) = 1$.

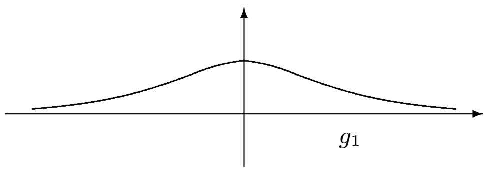
   Da ciò segue che
$$g_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \\ (1-x)e^{x} & \text{per } x < 0 \end{cases} .$$
   è l'unica funzione $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ pari tale che $g|]0,+\infty[= f$ e continua in 0.

   Per $x > 0$, g_1 é derivabile in x e si ha $g_1'(x) = -xe^{-x}$; per $x < 0$, g_1 é derivabile in x e si ha $g_1'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x$.

   Si ha $\lim_{x\to 0+, x>0} g_1'(x) = \lim_{x\to 0+, x>0} -xe^{-x} = 0$; quindi g_1 è derivabile da destra in 0 e si ha ${g_1}'_+(0) = 0$.

   Si ha $\lim_{x\to 0-, x<0} g_1'(x) = \lim_{x\to 0-, x<0} -xe^{x} = 0$; quindi g_1 è derivabile da sinistra in 0 e si ha ${g_1}'_-(0) = 0$.

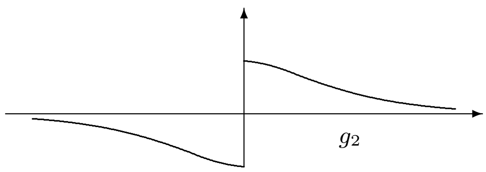
   Quindi g_1 è derivabile in 0 e si ha $g_1'(0) = 0$.



3. Per ogni $x < 0$ deve essere $g_2(x) = -f(-x) = -(1-x)e^x = (x-1)e^x$; deve essere $g_2(0) = g_2(-0) = -g_2(0)$; quindi $g_2(0) = 0$.

   Da ciò segue che
$$g_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ (x-1)e^{x} & \text{per } x < 0 \end{cases} .$$
   è l'unica funzione $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dispari tale che $g|]0,+\infty[= f$.

   Si ha $\lim_{x\to 0+, x>0} g_2(x) = \lim_{x\to 0+, x>0}(1-x)e^{-x} = 1$ e $\lim_{x\to 0-, x<0} g_2(x) = \lim_{x\to 0-, x<0}(x-1)e^{x} = -1$; quindi g_2 non è continua in 0.



4. Si ha $g_1(\xi) \sim_{\xi\to+\infty} xe^{-x}$ e $g_1(\xi) \sim_{\xi\to-\infty} -xe^{x}$; da ciò segue che $g_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

   Si ha $g_2(\xi)| \sim_{\xi\to+\infty} xe^{-x}$ e $|g_2(\xi)| \sim_{\xi\to-\infty} |x|e^{x}$; da ciò segue che $g_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

   Si ha $\lim_{x\to 0, x\neq 0} g_1'(x) = 0 = g_1'(0)$; quindi g_1' è continua in 0; quindi g_1 è di classe C^1.

   Si ha $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} g_1(x) = 0$; da ciò segue che si ha $\lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0$.

   Essendo g_1 di classe C^1 e tale che $\lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0$, si ha
$$\mathcal{F}(g_1)(\xi) \prec\!\!\prec_{x\to\infty} \frac{1}{|\xi|} .$$

Essendo $g_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$ si ha
$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) \longrightarrow_{\xi\to\infty} 0 \; .$$
Essendo g_2 non continua in 0, $\mathcal{F}(g_2)$ non è integrabile.

5. Sia $\xi \in \mathbf{R}$.
Essendo g_1 una funzione reale pari, si ha
$$\mathcal{F}(g_1)(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi\xi x) g_1(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi\xi x)(1+x)e^{-x}\,dx =$$
$$2\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{e^{2\pi i\xi x}+e^{-2\pi i\xi x}}{2}(1+x)e^{-x}\,dx =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y (1+x)\left(e^{(2\pi i\xi-1)x}+e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)dx =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left[(1+x)\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}+\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\right]_0^y \right.$$
$$\left. -\int_0^y\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}+\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)dx\right) =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left[(1+x)\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}+\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}e^{(2\pi i\xi-1}x) - \frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right]_0^y =$$
$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1+y}{2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}\right)e^{(2\pi i\xi-1)y}+\right.$$
$$\left(\frac{1+y}{-2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}\right)e^{(-2\pi i\xi-1)y}$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}\right) \; .$$
Si ha
$$\left|e^{(2\pi i\xi-1)y}\right| = \left|e^{-y}e^{2\pi i\xi}\right| = e^{-y} \longrightarrow_{y\to+\infty} 0 \; .$$
Quindi si ha $\lim_{y\to+\infty} e^{(2\pi i\xi-1)y} = 0$.
Analogamente si vede che $\lim_{y\to+\infty} e^{(-2\pi i\xi-1)y} = 0$.
Il limite sopra è quindi uguale a
$$-\frac{1}{2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2} =$$
$$\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}+\frac{2(1-4\pi\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} = \frac{4}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} \; .$$
Si ha quindi
$$\mathcal{F}(g_1)(\xi) = \frac{4}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} \; .$$
Essendo g_2 una funzione reale dispari, si ha
$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) = -2i\int_0^{+\infty}\sin(2\pi\xi x)g_1(x)\,dx = -2i\int_0^{+\infty}\sin(2\pi\xi x)(1+x)e^{-x}\,dx =$$
$$-2i\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{e^{2\pi i\xi x}-e^{-2\pi i\xi x}}{2i}(1+x)e^{-x}\,dx =$$

$$-\lim_{y\to+\infty}\int_0^y (1+x)\left(e^{(2\pi i\xi-1)x}-e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\,dx =$$

$$-\lim_{y\to+\infty}\left(\left[(1+x)\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\right]_0^y\right.$$

$$\left.-\int_0^y\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\,dx\right)=$$

$$-\lim_{y\to+\infty}\left[(1+x)\left(\frac{1}{2\pi i\xi-1}e^{(2\pi i\xi-1)x}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}e^{(2\pi i\xi-1}x)+\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}e^{(-2\pi i\xi-1)x}\right]_0^y=$$

$$-\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1+y}{2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}\right)e^{(2\pi i\xi-1)y}-\right.$$

$$\left(\frac{1+y}{-2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}\right)e^{(-2\pi i\xi-1)y}$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}+\frac{1}{-2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}\right)= \ .$$

$$\frac{1}{2\pi i\xi-1}-\frac{1}{(2\pi i\xi-1)^2}-\frac{1}{-2\pi i\xi-1}+\frac{1}{(-2\pi i\xi-1)^2}=$$

$$-\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}-\frac{8\pi i\xi)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}=-\frac{4\pi i\xi+16\pi^3 i\xi^3+8\pi i\xi}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}=$$

$$-\frac{12\pi i\xi+16\pi^3 i\xi^3}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}=-\frac{4\pi i\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\ .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{F}(g_1)(\xi)=-\frac{4\pi i\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\ .$$

6. Si ha

$$\mathcal{F}(g_1)(\xi)=\frac{4}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\sim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(4\pi^4\xi^4}\ .$$

Si ha quindi $\mathcal{F}(g_1)\in\mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $x\in\mathbf{R}$ si ha quindi

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g_1))(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}(g_1)(\xi)\,d\xi\ .$$

quindi, essendo g_1 continua

$$g_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}(g_1)(\xi)\,d\xi\ .$$

Vale dunque la formula di inversione con integrale di funzione integrabile.
Verifichiamo la formula, calcolando l'integrale.
Sia $x\in\mathbf{R}$, $x\geq 0$.
Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}(g_1)(\xi)\,d\xi==\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i x\xi}\frac{4}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi\ .$$

Per $\xi\in\mathbf{C}$, si ha $(1+4\pi^2\xi^2)^2=0$ se e solo se $1+4\pi^2\xi^2=0$, cioè se e solo se $\xi^2=-\frac{1}{4\pi^2}$, cioè se e solo se $\xi=\pm\frac{1}{2\pi}i$.

Sia

$$h : \mathbf{C} - \left\{\frac{1}{2\pi}i, -\frac{1}{2\pi}i\right\} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} .$$

Sia $\xi \in \mathrm{dom}(h)$.
Si ha

$$h(\xi) = \frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} = \frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(1-2\pi i\xi)^2(1+2\pi i\xi)^2} = \frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(2\pi i)^2(\frac{1}{2\pi i}-\xi)^2(2\pi i)^2(\frac{1}{2\pi i}+\xi)^2} =$$

$$\frac{4e^{2\pi i x\xi}}{16\pi^4(-\frac{1}{2\pi}i-\xi)^2(-\frac{1}{2\pi}i+\xi)^2} = \frac{e^{2\pi i x\xi}}{4\pi^4(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2} \sim_{\xi\to\frac{1}{2\pi}i} \frac{-\frac{e^{-x}}{4\pi^2}}{(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2} .$$

Quindi h ha in $\frac{1}{2\pi}i$ una singolarità polare di ordine 2.
Si ha

$$h(\xi)(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2 = \frac{e^{2\pi i\xi x}}{4\pi^4(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2} .$$

Si ha quindi

$$\frac{d}{d\xi}h(\xi)(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2 = \frac{1}{4\pi^4}\frac{e^{2\pi i\xi x}2\pi i x(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2 - 2(\xi+\frac{1}{2\pi}i)e^{2\pi i\xi x}}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^4} =$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\frac{e^{2\pi i\xi x}(\pi i x(\xi+\frac{1}{2\pi}i)-1}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^3} = \frac{1}{2\pi^4}e^{2\pi i\xi x}\frac{\pi x\xi i-\frac{1}{2}x-1}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^3} .$$

Si ha

$$\lim_{\xi\to\frac{1}{2\pi}i}\frac{1}{2\pi^4}e^{2\pi i\xi x}\frac{\pi x\xi i-\frac{1}{2}x-1}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^3} = \frac{1}{2\pi^4}e^{-x}\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x-1}{\frac{1}{\pi^3}(-i)} =$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{-x}\frac{-x--1}{-i} = -\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+i) .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(h,\frac{1}{2\pi}i) = -\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+i) .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4e^{2\pi i x\xi}}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi = 2\pi i\,\mathrm{Res}(h,\frac{1}{2\pi}i) = 2\pi i(-\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+1)) = e^{-x}(x+1) = g_1(x) .$$

Analogamente si procede per $x<0$.
Sia p_1 l prolungamento continuo di $g_2|]0,+\infty[$ in 0; si ha

$$p_1 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow (x+1)e^{-x}$$

quindi p_1 è di classe C^1.
Sia p_2 l prolungamento continuo di $g_2|]-\infty,0[$ in 0; si ha

$$p_2 :]-\infty,0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow (x-1)e^{x}$$

quindi p_2 è di classe C^1.
Si ha poi

$$\frac{\lim_{x\to 0+,x>0} g_2(x) + \lim_{x\to 0-,x<0} g_2(x)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = g_2(0) .$$

Quindi per ogni $x\in\mathbf{R}$ l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}(g_2)(\xi)\,d\xi$$

ammette parte principale e si ha

$$g_2(x) = \text{pr.v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \mathcal{F}(g_2)(\xi)\, d\xi \ .$$

Verifichiamo la formula, mostrando che l'integrale improprio ammette valore principale e calcolando il valore principale dell'integrale.
Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \mathcal{F}(g_2)(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \left(-\frac{4\pi i x\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} \right) d\xi \ .$$

Sia $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$.
Considerando i polinomi nella variabile ξ, si ha $\mathrm{gr}(4\pi i\xi)(3+4\pi^2\xi^2) = 3$ e $\mathrm{gr}((1+4\pi^2\xi^2)^2 = 4$ e $4 = 3+1$; quindi l'integrale improprio su un intervallo aperto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \left(-\frac{4\pi i x\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} \right) d\xi \ .$$

è convergente e quindi ammette parte principale.
Sia

$$k : \mathbf{C} - \left\{ \frac{1}{2\pi} i, -\frac{1}{2\pi} i \right\} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow -\frac{4\pi i x\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} \ .$$

Sia $\xi \in \mathrm{dom}(h)$.
Procedendo come sopra si trova

$$k(\xi) = -e^{2\pi i x\xi} \frac{4\pi i x\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} = -e^{2\pi i x\xi} \frac{\pi i x\xi(3+4\pi^2\xi^2)}{4\pi^4(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2} \sim_{\xi\to\frac{1}{2\pi}i} \frac{\frac{e^{-x}}{4\pi^2}}{(\xi-\frac{1}{2\pi}i)^2} \ .$$

Quindi K ha in $\frac{1}{2\pi}i$ una singolarità polare di ordine 2.
Si ha

$$k(\xi)(\xi - \frac{1}{2\pi}i)^2 = -e^{2\pi i\xi x} \frac{2\pi i\xi x + 4\pi^3 i\xi^3}{4\pi^4(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2} \ .$$

Si ha quindi

$$\frac{d}{d\xi} k(\xi)(\xi - \frac{1}{2\pi}i)^2 =$$

$$-\frac{1}{4\pi^4} \left(e^{2\pi i\xi x} 2\pi i x \frac{2\pi i\xi x + 4\pi^3 i\xi^3}{4\pi^4(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2} + \right.$$

$$\left. e^{2\pi i x\xi} \frac{(3\pi i + 12\pi^3 i\xi^2)(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2 - 2(\xi+\frac{1}{2\pi}i)(3\pi i\xi + 4\pi^3 i\xi^3)}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^4} \right) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^4} e^{2\pi i\xi x} \left(2\pi i x \frac{3\pi i\xi + 4\pi^3 i\xi^3}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^2} + \frac{(3\pi i + 12\pi^3 i\xi^2)(\xi+\frac{1}{2\pi}i) - 2(3\pi i\xi + 4\pi^3 i\xi^3)}{(\xi+\frac{1}{2\pi}i)^3} \right) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^4} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{(\xi+\frac{1}{2pi}i)^3} \cdot$$

$$\cdot \left(2\pi i x(3\pi i\xi + 4\pi^3 i\xi^3)(\xi + \frac{1}{2\pi}i) + 3\pi i\xi - \frac{3}{2} + 12\pi^3 i\xi^3 - 6\pi^2\xi^2 - 6\pi i\xi - 8\pi^3 i\xi^3 \right) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^4} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{(\xi+\frac{1}{2pi}i)^3} \cdot$$

$$\cdot \left(2\pi i x(3\pi i\xi^2 - \frac{3}{2}\xi + 4\pi^3 i\xi^4 - 2\pi^2\xi^3) - 3\pi i\xi - \frac{3}{2} + 4\pi^3 i\xi^3 - 6\pi^2\xi^2 - 6\pi i\xi \right) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^4}\frac{e^{2\pi i\xi x}}{(\xi+\frac{1}{2pi}i)^3}\cdot$$
$$\cdot\left(-6\pi^2 ix\xi^2-3\pi ix\xi-8\pi^4x\xi^4-4\pi^3x\xi^3-3\pi i\xi-\frac{3}{2}+4\pi^3 i\xi^3-6\pi^2\xi^2-6\pi i\xi\right) .$$

Si ha

$$\lim_{\xi\to\frac{1}{2\pi}i}-\frac{1}{4\pi^4}\frac{e^{2\pi i\xi x}}{(\xi+\frac{1}{2pi}i)^3}\cdot$$
$$\cdot\left(-6\pi^2 ix\xi^2-3\pi ix\xi-8\pi^4x\xi^4-4\pi^3x\xi^3-3\pi i\xi-\frac{3}{2}+4\pi^3 i\xi^3-6\pi^2\xi^2-6\pi i\xi\right)=$$
$$-\frac{1}{4\pi^4}\frac{e^{-x}}{-\frac{1}{\pi^3}i}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-x}}{i}(2x+2)=$$
$$-\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+1) .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{Res}(k,\frac{1}{2\pi}i)=-\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+i) .$$

Si ha quindi

$$\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4e^{2\pi ix\xi}}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi=2\pi i\,\mathrm{Res}(h,\frac{1}{2\pi}i)=2\pi i(-\frac{1}{2\pi}ie^{-x}(x+i))=e^{-x}(x+1)=g_2(x) .$$

Analogamente si procede per $x<0$.
Per $x=0$ l'integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{4\pi i(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi .$$

Essendo la funzione da integrare dispari, per ogni $r\in\mathbf{R}_+^*$ si ha

$$\int_{-r}^{r}-\frac{4\pi i(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi=0 .$$

Quindi l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{4\pi i(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi .$$

ammette valore principale e si ha

$$\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{4\pi i(3+4\pi^2\xi^2)}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\,d\xi=0=g_2(0) .$$

26.10 Trasformata di Fourier della distribuzione δ_0

26.10.1 Trasformata e cotrasformata di Fourier della distribuzione δ_0 e di λ

Teorema 26.10.1.1 *Sia δ_0 la misura di Dirac su $\mathbf{R}^N$; si ha*

$$\mathcal{F}\delta_0=\lambda_N .$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ si ha infatti

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}(\varphi\rangle = \langle \delta_0, \int_{R^N} e^{-2\pi i(\xi|x)}\varphi(x)\,dx\rangle = \int_{R^N} e^{-2\pi i(0|x)}\varphi(x)\,dx\rangle =$$

$$\int_{R^N} \varphi(x)\,dx\rangle = \langle \lambda_N, \varphi\rangle\ .$$

Teorema 26.10.1.2 *Sia δ_0 la misura di Dirac su $\mathbf{R}^N$; si ha*

$$\overline{\mathcal{F}}\delta_0 = \lambda_N\ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\overline{\mathcal{F}}\delta_0 = (\mathcal{F}(\delta_0)\check{\ } = \check{(}\lambda)\ .$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ si ha infatti

$$\check{\lambda}(\varphi) = \lambda(\check{\varphi}) = \int_{R^N} \varphi(-x)\,d\lambda(x) = \int_{R^N} \varphi(x)\,d\lambda(x) = \lambda(\varphi)\ .$$

Teorema 26.10.1.3 *Si ha*

$$\mathcal{F}\lambda = \delta_0\ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\overline{\mathcal{F}}(\delta_0) = \lambda$.

Teorema 26.10.1.4 *Si ha*

$$\overline{\mathcal{F}}\lambda = \delta_0\ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\mathcal{F}(\delta_0) = \lambda$.

Teorema 26.10.1.5 *Sia $a \in \mathbf{R}^N$; indichiamo con $e^{-2\pi i(\xi|a)}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow e^{-2\pi i(\xi|a)}\ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i(\xi|a)}\lambda\ .$$

Dimostrazione. Si ha $\delta_a = \gamma(a)\delta_0$; quindi

$$\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i(\xi|a)}\mathcal{F}\delta_0 = e^{-2\pi i(\xi|a)}\lambda\ .$$

Teorema 26.10.1.6 *Sia $a \in \mathbf{R}^N$; indichiamo con $e^{-2\pi i(\xi|a)}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow e^{-2\pi i(\xi|a)}\ ;$$

allora si ha

$$\overline{\mathcal{F}}\delta_a = e^{2\pi i(\xi|a)}\lambda\ .$$

Dimostrazione. Si ha $\delta_a = \gamma(a)\delta_0$; quindi

$$\overline{\mathcal{F}}\delta_a = e^{2\pi i(\xi|a)}\mathcal{F}\delta_0 = e^{2\pi i(\xi|a)}\lambda\ .$$

26.11 Trasformata di Fourier del valore principale di $\frac{1}{x}$

26.11.1 Trasformata di Fourier della distribuzione valore principale di $\frac{1}{x}$ e della funzione segno

Teorema 26.11.1.1 *Sia $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; per ogni $r \in]0,+\infty[$ sia*

$$\varphi_{R-]-r,r[} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \textit{per } x \in \mathbf{R}-]-r,r[\\ 0 & \textit{per } x \in]-r,r[\end{cases}$$

la funzione caratteristica di $\mathbf{R}-]-r,r[$; allora la funzione

$$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}, r \longrightarrow \int_R \varphi_{R-]-r,r[} \frac{1}{x} f(x)\, dx$$

è convergente in $\mathbf{C}$ per $r \to 0$.

Enunciato

Definizione 26.11.1.1 *Indichiamo con $\frac{1}{x}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{1}{x}\ ;$$

poniamo

$$\mathrm{pv}\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbf{R};\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, f \longrightarrow \lim_{r\to 0} \int_R \varphi_{R-]-r,r[} \frac{1}{x} f(x)\, dx\ .$$

Si osservi che se $0 \notin \mathrm{Supp}(f)$ allora si ha

$$\mathrm{pv}\frac{1}{x}(f) = \int_R \frac{1}{x} f(x)\, dx\ .$$

Teorema 26.11.1.2 *Indichiamo con $\frac{1}{x}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{1}{x}\ ;$$

allora si ha $\mathrm{pv}\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Enunciato

Teorema 26.11.1.3 *Indichiamo con $\frac{1}{x}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{1}{x}\ ;$$

indichiamo con $\mathrm{sgn}\,\xi$ la funzione

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \mathrm{sgn}\,\xi\ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{pv}\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\pi}{i}\,\mathrm{sgn}\,\xi\right) \cdot \lambda\ .$$

Enunciato

Teorema 26.11.1.4 *Indichiamo con* $\frac{1}{\xi}$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \frac{1}{\xi} \ ;$$

indichiamo con $\operatorname{sgn} x$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \operatorname{sgn} x \ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(\operatorname{sgn} x \cdot \lambda) = -\frac{i}{\pi}\left(\operatorname{pv}\frac{1}{\xi}\right) \ .$$

Enunciato

26.12 Trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto

26.12.1 Funzione temperata trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto

Teorema 26.12.1.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; sia* T *a supporto compatto; allora esiste una ed una sola* $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ *funzione temperata tale che*

$$\mathcal{F}T = f \cdot \lambda \ .$$

Enunciato
Si dice che f è la funzione temperata trasformata di Fourier della distribuzione a supporto compatto T

26.12.2 Funzione intera trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto

Teorema 26.12.2.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$*; sia* T *a supporto compatto; sia* $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ *la funzione temperata trasformata di Fourier di* T*; allora esiste una ed una sola* $g : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ *analitica tale che* $g|\mathbf{R}^N = f$*.*

Enunciato
Si dice che f è la funzione intera (o analitica) trasformata di Fourier della distribuzione a supporto compatto T
Per abuso di notazione indichiamo spesso g con $\mathcal{F}T$.

Teorema 26.12.2.2 *Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia T a supporto compatto; sia $g : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione intera trasformata di Fourier di T; per ogni $\xi \in \mathbf{C}^N$ indichiamo con $e^{-2\pi i(x|\xi)}$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{-2\pi i(x|\xi)} \; ;$$

allora si ha

$$(\forall \xi \in \mathbf{C}^N) \; g(\xi) = \langle T, e^{-2\pi i(x|\xi)} \rangle \; .$$

Dimostrazione. *

Con l'abuso di notazione indicato sopra si ha dunque

$$(\forall \xi \in \mathbf{C}^N) \; \mathcal{F}T(\xi) = \langle T, e^{-2\pi i(x|\xi)} \rangle \; .$$

Ricordiamo che se $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ e se $u \cdot \lambda$ è a supporto compatto, allora $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.
Per la trasformata di Fourier di $u\lambda$ vale la formula vista.
Più in generale per la funzione intera associata a $u \cdot \lambda$ vale quanto segue

Teorema 26.12.2.3 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $u \cdot \lambda$ a supporto compatto; sia $g : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione intera trasformata di Fourier di f; allora si ha*

$$(\forall \xi \in \mathbf{C}^N) \; g(\xi) = \int_{R^N} e^{-2\pi i(x|\xi)} u(x) \, dx \; .$$

Enunciato

26.13 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

26.13.1 Spazio di Hilbert

Prodotto scalare. Sia E uno spazio vettoriale complesso; sia $p : E \times E \longrightarrow \mathbf{C}$; per ogni $x, y \in E$ indichiamo $p(x,y)$ con $(x|y)$; si dice che p è un prodotto scalare se si ha

1. $(\forall x, y, z \in E) \; (x + y|z) = (x|z) + (y|z)$;
2. $(\forall a \in \mathbf{C}, \forall x, y \in E) \; (ax|y) = a(x|y)$;
3. $(\forall x, y, z \in E) \; (x|y + z) = (x|y) + (x|z)$;
4. $(\forall a \in \mathbf{C}, \forall x, y \in E) \; (x|ay) = \overline{a}(x|y)$;
5. $(\forall x, y \in E) \; (y|x) = \overline{(x|y)}$;
6. $(\forall x \in E) \; (x|x) \in \mathbf{R}_+$;
7. $(\forall x \in E) \; (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Se p è un prodotto scalare posto per ogni $x \in E$

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \; ,$$

resta definita una norma su E.
Siano E e F due spazi di Hilbert complessi; sia $f : E \longrightarrow F$; si dice che f è un isomorfismo se f è un isomorfismo di spazi vettoriali e se [er ogni $x, y \in A$ si ha $(x|y) = (f(x)|f(y))$.
Si dice che E dotato del prodotto scalare p è uno spazio di Hilbert complesso se E è completo rispetto alla norma definita sopra.

Duale di uno spazio di Hilbert. Se E uno spazio di Hilbert complesso; sia $T : E \longrightarrow \mathbf{C}$ lineare; allora T è continua se e solo se esiste $a \in E$ tale che

$$(\forall x \in E)\ T(x) = (x|a)\ .$$

In tal caso a è unico e si chiama vettore associato a T
Analogamente, sostituendo $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}$ e togliendo il segno di coniugazione, si definiscono gli spazi di Hilbert reali. L'esempio caratteristico è $\mathbf{R}^N$ con prodotto scalare $(x|y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$.
L'esempio caratteristico di spazio di Hilbert complesso è $\mathbf{C}^N$ con prodotto scalare $(x|y) = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$.
Gli isomorfismi $f : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}^N$ di spazi di Hilbert sono le trasformazioni ortogonali.

26.13.2 Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile.
Siano $f, g \in \mathcal{L}^2(A;\mathbf{C})$; essendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, per il teorema sulla disuguaglianza di Hölder, $f\overline{g}$ è integrabile; si pone allora

$$(f|g) = \int_A f(x)\overline{g(x)}\, dx\ .$$

Per $[f], [g] \in L^2(A;\mathbf{C})$ si pone

$$([f]|[g]) = (f|g) = \int_A f(x)\overline{g(x)}\, dx\ .$$

Resta definito nello spazio vettoriale complesso $L^2(A)$ un prodotto scalare.
La norma associata a tale prodotto scalare è la norma $\|\cdot\|_2$ di $L^2(A;\mathbf{C})$.
Quindi $L^2(A)$ dotato di tale prodotto scalare è uno spazio di Hilbert.

26.13.3 Trasformata di Fourier di un elemento di $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.13.3.1 *Sia $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora esiste $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ tale che*

$$\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = g \cdot \lambda\ .$$

Enunciato

Definizione 26.13.3.1 *Sia $F \in L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ tale che $[f] = F$; sia $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ tale che $\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = g \cdot \lambda$; sia $G = [g]$; poniamo*

$$\mathcal{F}F = G\ .$$

La definizione non dipende dalle particolari f e g.
$\mathcal{F}F$ si chiama trasformata di Fourier di F.

26.13.4 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.13.4.1 *La funzione*

$$L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), F \longrightarrow \mathcal{F}F$$

si chiama trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ si indica ancora con $\mathcal{F}$.

Teorema 26.13.4.1 *La trasformata di Fourier in* $L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), F \longrightarrow \mathcal{F}F$$

è un isomorfismo di spazi hilbertiani,

Enunciato

26.13.5 La trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Definizione 26.13.5.1 *Sia* $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; si pone*

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}[f]\ .$$

26.14 Trasformata di Fourier e convoluzione

26.14.1 Convoluzione di una funzione di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ e di una funzione di $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.14.1.1 *Sia* $p \in [1,+\infty]$*; sia* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; allora per quasi ogni* $x \in \mathbf{R}^N$ *la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow f(x-y)g(y)$$

è integrabile.

Enunciato

Definizione 26.14.1.1 *Sia* $p \in [1,+\infty]$*; sia* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $h : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$*; si dice che* h *è una convoluzione di* f *e di* g *se per quasi ogni* $x \in \mathbf{R}^N$ *si ha*

$$h(x) = \int_{R^N} f(x-y)g(y)\,dy\ .$$

Teorema 26.14.1.2 *Sia* $p \in [1,+\infty]$*; sia* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $h : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* h *una convoluzione di* f *e di* g*; allora si ha* $h \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ *e* $\|h\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$*.*

Enunciato

Definizione 26.14.1.2 *Sia* $p \in [1,+\infty]$*; sia* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$*; sia* $h : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* h *una convoluzione di* f *e di* g*; allora si pone*

$$[f] * [g]_p = [h]_p\ .$$

Si pone anche

$$[f] * [g]_p = [h]_p \ .$$

La convoluzione di $[f]_1$ e di $[g]_p$ è quindi la classe in $L^p(A; \mathbf{C})$ della funzione definita quasi dappertutto su $\mathbf{R}^N$

$$x \longrightarrow \int_{R^N} f(x-y)g(y)\, dy \ .$$

26.14.2 Trasformata di Fourier e convoluzione in $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$

Teorema 26.14.2.1 *Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; consideriamo*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \longrightarrow C(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$$

come trasformata di Fourier di funzione di $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; allora si ha

$$\mathcal{F}([f] * [g]) = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \ .$$

Enunciato

26.14.3 Trasformata di Fourier e convoluzione fra $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ e $L^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$

Teorema 26.14.3.1 *Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; sia $g \in L^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; consideriamo*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \longrightarrow L^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \ ,$$

ponendo $\mathcal{F}([f]_1) = [\mathcal{F}(f)]_\infty$; consideriamo

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C}) \ ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}([f] * [g]) = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \ .$$

Enunciato

26.14.4 Convoluzione di funzioni di $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$

Teorema 26.14.4.1 *Siano $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; allora per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow f(x-y)g(y)$$

è integrabile.

Dimostrazione. Infatti si tratta del prodotto di due funzioni di $L^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.

Definizione 26.14.4.1 *Siano $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; poniamo*

$$f * g : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \int_{R^N} f(x-y)g(y)\, dy \ .$$

Teorema 26.14.4.2 *Siano $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$; allora si ha $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.*

Enunciato

26.14.5 Trasformata di Fourier e convoluzione fra funzioni di $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$

Teorema 26.14.5.1 *Siano $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; consideriamo*

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$$

e

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \; ;$$

consideriamo la moltiplicazione

$$L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \times L^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), (F,G) \longrightarrow FG \; ;$$

consideriamo canonicamente $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $\mathcal{F}(f*g) \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ e

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \; .$$

Dimostrazione. *

26.14.6 Convoluzione di una distribuzione temperata e di una funzione declinante

Teorema 26.14.6.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $x \in \mathbf{R}^N$; allora la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow g(x-y)$$

appartiene a $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. *

Definizione 26.14.6.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ indichiamo con $g(x-y)$ la funzione*

$$\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow g(x-y)$$

poniamo

$$T*g : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow T(g(x-y)) \; .$$

Teorema 26.14.6.2 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha $T*g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.*

Enunciato

26.14.7 Trasformata di Fourier e convoluzione fra una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ ed una funzione di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$

Teorema 26.14.7.1 *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; consideriamo*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$$

e

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \; ;$$

consideriamo la moltiplicazione

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C}), (S,f) \longrightarrow Sf \; ;$$

$$\mathcal{F}(T*g) = \mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}g \; .$$

Enunciato

Capitolo 27

Serie di Fourier

27.1 Trasformata di Fourier di una distribuzione periodica

27.1.1 Distribuzioni periodiche

Distribuzione periodica. Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; si dice che S è una distribuzione periodica di periodo T se si ha

$$\gamma_T(S) = S\ .$$

Distribuzione periodica come distribuzioni temperata. Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; allora si ha $S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

27.1.2 Lo spazio vettoriale topologico delle successioni a decrescenza rapida

Successioni a decrescenza rapida. Sia $(c_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{C}$; si dice che $(c_n)_{n\in Z}$ è a decrescenza rapida se

$$(\forall m \in \mathbf{N}^*)\ c_n \prec\!\!\prec_{n\to\infty} \frac{1}{|n|^m}\ .$$

Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ l'insieme delle successioni a decrescenza rapida da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{C}$.
$\mathcal{S}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^Z$; quindi $\mathcal{S}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Per ogni $m \in \mathbf{N}$ e per ogni $c \in \mathcal{S}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ poniamo

$$q_m((c_n)_{n\in Z}) = \sup_{n\in Z}(1+|n|)^m |c_n|\ .$$

Resta definita una famiglia di seminorme $(q_m)_{m\in Z}$;
Consideriamo $\mathcal{S}(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ canonicamente dotato della topologia vettoriale associata alla famiglia di seminorme

$$(q_m)_{m\in N}\ .$$

Lo spazio vettoriale topologico così ottenuto è uno spazio di Fréchet.

27.1.3 Lo spazio vettoriale topologico delle successioni temperate

Successioni temperate. Sia $(c_n)_{n \in Z}$ una successione di $\mathbf{C}$; si dice che $(c_n)_{n \in Z}$ è temperata (o a crescenza lenta) se

$$(\exists m \in \mathbf{N})\ c_n \preceq_{n \to \infty} |n|^m \ .$$

Se $\mathcal{F}$ è l'insieme delle successioni temperate. $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale complesso $\mathbf{C}^Z$; quindi $\mathcal{F}$ è canonicamente dotato di una struttura di spazio vettoriale.
Sia $c = (c_n)_{n \in Z} \in \mathcal{F}$; per ogni $(a_n)_{n \in Z} \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$ la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n c_n$ di Laurent di $\mathbf{C}$ è assolutamente convergente.
Si pone

$$T_c : \mathcal{S}(\mathbf{Z}; \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, (a_n)_{n \in Z} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n c_n \ .$$

T_c è una forma lineare continua su $\mathcal{S}(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$.
Indichiamo con $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$ il duale topologico di $\mathcal{S}(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$; sia

$$\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{Z}; \mathbf{C}), c \longrightarrow T_c \ ;$$

allora α è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Identifichiamo $\mathcal{F}$ con $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}'\mathbf{C})$ mediante la biezione α.
Indichiamo dunque con $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$ l'insieme delle successioni temperate da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{C}$.
Consideriamo $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$ canonicamente dotato della topologia debole del duale.

27.1.4 Trasformata di Fourier di una distribuzione periodica

Teorema 27.1.4.1 *Sia $(c_n)_{n \in Z}$ una successione di $\mathbf{C}$; allora si ha*

1. *la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{na}$ è assolutamente convergente in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$;*
2. *la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{na}$ è assolutamente convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ se e solo $(c_n)_{n \in Z}$ è una successione temperata;*
3. *se $(c_n)_{n \in Z}$ è una successione temperata e se $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ si ha $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{na} = S$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ se e solo se si ha $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{na} = S$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.*

Enunciato
Se $(c_n)_{n \in Z}$ è una successione temperata la distribuzione temperata $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{na}$ si dice associata a $(c_n)_{n \in Z}$.

Teorema 27.1.4.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; allora esiste una ed una sola $(c_n)_{n \in Z}$ successione temperata tale che*

$$\mathcal{F}S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{n}{T}} \ ,$$

dove la serie di Laurent è assolutamente convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$;

Enunciato
$\mathcal{F}S$ è quindi determinata da $(c_n)_{n\in Z}$; ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 27.1.4.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata tale che*

$$\mathcal{F}S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{n}{T}} \ ,$$

dove la serie di Laurentè convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; allora $(c_n)_{n\in Z}$ si chiama successione temperata trasformata di Fourier di S.

Se non crea ambiguità scriviamo anche $\mathcal{F}S = (c_n)_{n\in Z}$.
Per l'antitrasformata di Fourier vale il seguente teorema.

Teorema 27.1.4.3 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; allora si ha*

$$\overline{\mathcal{F}}S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \delta_{\frac{n}{T}} \ ,$$

dove la serie di Laurent è convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\overline{\mathcal{F}}S = (\mathcal{F}S)\check{} = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{2\pi}{T}n})\check{}\ .$$

Per ogni $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ si ha

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{2\pi}{T}n})\check{}(f) = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{2\pi}{T}n})(\check{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(-\frac{2\pi}{T}n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} f(\frac{2\pi}{T}n) \ .$$

Si può dire che si passa dalla trasformata all'antitrasformata sostituendo $(c_n)_{n\in Z}$ con $(c_{-n})_{n\in Z}$.

27.1.5 Trasformata e cotrasformata di Fourier della derivata di una distribuzione periodica

Teorema 27.1.5.1 *Sia $a \in \mathbf{R}^N$; sia $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; allora si ha*

$$f \cdot \delta_a = f(a)\delta_a \ .$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.
Si ha

$$(f \cdot \delta_a)(\varphi) = \delta_a(f\varphi) = f(a)\varphi(a) = f(a) \cdot \delta_a(\varphi) = (f(a)\delta_a)(\varphi) \ .$$

Teorema 27.1.5.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; sia $m \in \mathbf{N}$; allora si ha*

$$\mathcal{F}S^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\frac{2\pi i}{T} n)^m \delta_{\frac{n}{T}} \ ,$$

dove la serie di Laurentè convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\mathcal{F}S^{(m)}(2\pi i\xi)^m\mathcal{F}(S) = (2\pi i\xi)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{\frac{n}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n((2\pi i\xi)^m\delta_{\frac{n}{T}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n((\frac{2\pi i}{T}n)^m\delta_{\frac{n}{T}}) \; .$$

Teorema 27.1.5.3 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; sia $m \in \mathbf{N}$; allora si ha*

$$\overline{\mathcal{F}}S^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}(-\frac{2\pi i}{T}n)^m\delta_{\frac{n}{T}} \; ,$$

dove la serie di Laurentè convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Si procede come sopra.

27.1.6 Trasformata e cotrasformata di Fourier di una distribuzione associata ad una successione temperata

Teorema 27.1.6.1 *Sia $(c_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{C}$ temperata; sia $a \in \mathbf{R}_+^*$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$, indichiamo con $e^{-2\pi ina\xi}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \xi \longrightarrow e^{-2\pi ina} \; ;$$

allora si ha

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{na}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{-2\pi ia\xi}\cdot\lambda) \; ,$$

dove la serie di Laurentè convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\mathcal{F}(\delta_{na}) = e^{-2\pi ia\xi}\lambda$.

Teorema 27.1.6.2 *Sia $(c_n)_{n\in Z}$ una successione di $\mathbf{C}$ temperata; sia $a \in \mathbf{R}_+^*$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$, indichiamo con $e^{-2\pi ina\xi}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \xi \longrightarrow e^{-2\pi ina} \; ;$$

allora si ha

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{na}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{2\pi ia\xi}\cdot\lambda) \; ,$$

dove la serie è convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\overline{\mathcal{F}}(\delta_{na}) = e^{2\pi ia\xi}\lambda$.

27.1.7 Sviluppo in serie di Fourier di una distribuzione periodica di periodo T

Teorema 27.1.7.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}nx}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \; ;$$

allora si ha

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{\frac{2\pi}{T}inx}\cdot\lambda)$$

dove la convergenza della serie di Laurent è in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Si ha infatti $S = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(S))$.

Definizione 27.1.7.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$; sia S periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \ ;$$

allora la serie di Laurent di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

si chiama serie di Fourier di S.

Chiamiamo ancora serie di Fourier di S la serie di distribuzioni temperate

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{\frac{2\pi}{T}inx} \cdot \lambda) \ .$$

La formula del teorema sopra si chiama sviluppo in serie di Fourier di S in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Teorema 27.1.7.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; per ogni $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, S periodica di periodo T sia $\mathcal{F}S$ la successione temperata trasformata di Fourier di S; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \ ;$$

consideriamo su $\{S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C});\ S \text{ periodica di periodo } T\}$ la topologia indotta dalla topologia di $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$; allora

$$\{S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C});\ S \text{ periodica di periodo } T\} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{Z};\mathbf{C}), S \longrightarrow \mathcal{F}S$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici, avente per isomorfismo inverso la funzione

$$\mathcal{S}'(\mathbf{Z};\mathbf{C}) \longrightarrow \{S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C});\ S \text{ periodica di periodo } T\}, (c_n)_{n\in Z} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx} \ ,$$

dove la serie è convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Enunciato

27.2 Serie di Fourier di una funzione periodica

27.2.1 Funzioni periodiche

Definizione 27.2.1.1 *Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$; si dice che f è periodica se esiste $T \in \mathbf{R}_+^*$ tale che f è periodica di periodo T.*

Teorema 27.2.1.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_*^+$; $a \in \mathbf{R}$; sia $f : [a, a+T[\longrightarrow \mathbf{C}$; allora esiste una ed una sola $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ periodica di periodo T tale che*

$$(\forall x \in [a, a+T[)\ g(x) = f(x) \ .$$

Dimostrazione. Immediata.

Si dice che g è il prolungamento per periodicità di periodo T di f.
Analogamente si procede per $f :]a, a+T] \longrightarrow \mathbf{C}$.

Teorema 27.2.1.2 *Sia* $T \in \mathbf{R}_*^+$*; sia* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* f *periodica, di periodo* T*; allora si ha*

1. f *funzione pari* $\Leftrightarrow f|[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ *funzione pari;*
2. f *funzione dispari* $\Leftrightarrow f|[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ *funzione dispari.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 27.2.1.3 *Sia* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* f *è periodica; sia* f *non costante; sia*

$$A = \{T \in \mathbf{R}_+^*;\ T \textit{ periodo di } f\}\ ;$$

allora A *ammette minimo.*

Enunciato

Definizione 27.2.1.2 *Sia* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* f *è periodica; sia* f *non costante; sia*

$$A = \{T \in \mathbf{R}_+^*;\ T \textit{ periodo di } f\}\ ;$$

allora $\min(A)$ *si chiama il periodo di* f*.*

Le funzioni seno e coseno hanno periodo 2π.
Le funzioni $|\sin x|$ e $|\cos x|$ hanno periodo π.

Teorema 27.2.1.4 *Sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* f *periodica di periodo* T*; allora la distribuzione* $f \cdot \lambda$ *è periodica di periodo* T*.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 27.2.1.5 *Sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* $f \in \mathbf{C}^R)$*; sia* f *periodica di periodo* T*; sia* $a \in \mathbf{R}_+^*$*; sia*

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow f(ax)\ ;$$

allora f *è periodica di periodo* $\frac{T}{a}$*.*

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 27.2.1.6 *Sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* f *periodica di periodo* T*; sia* $a \in \mathbf{R}$*; allora si ha*

$$\int_0^T u(x)\,dx = \int_a^{a+T} u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Esiste uno ed uno solo $n \in \mathbf{Z}$ tale che $a \leq nT < a + T$.
Si ha

$$\int_a^{a+T} u(x)\,dx = \int_a^{nT} u(x)\,dx + \int_{nT}^{a+T} u(x)\,dx\ .$$

Posto nel primo integrale $x' = x - (n-1)T$ e nel secondo $x' = x - nT$ si ha

$$\int_a^{nT} u(x)\,dx + \int_{nT}^{a+T} u(x)\,dx =$$

$$\int_{a-(n-1)T}^{T} u(x' + (n-1)T)\,dx' + \int_0^{a-(-1)T} u((x' + nT)\,dx' =$$

$$\int_{a-(n-1)T}^{T} u(x')\,dx' + \int_0^{a-(n-1)T} u(x')\,dx' = \int_0^T u(x')\,dx' \;.$$

27.2.2 Coefficienti di Fourier di una funzione periodica

Teorema 27.2.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier della distribuzione periodica $u\cdot\lambda$; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi}{T}inx} u(x)\,dx \;.$$

Enunciato

Definizione 27.2.2.1 *La funzione*

$$\mathcal{F} : \{u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C});\ u \text{ periodica di periodo } T\} \longrightarrow \mathbf{C}^Z, u \longrightarrow \mathcal{F}(u)$$

si chiama trasformata di Fourier in $\{u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C});\ u$ periodica di periodo $T\}$.

Se $(c_n)_{n\in ZZ}$, si dice che $(c_n)_{n\in Z}$ è la successione dei coefficienti di Fourier di u.
Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha dunque

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi}{T}inx} u(x)\,dx \;.$$

Teorema 27.2.2.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi}{T}inx} u(x)\,dx \;;$$

allora si ha

1. $\mathcal{F}(u\cdot\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{2\pi}{T}n}$,
2. $\overline{\mathcal{F}}(u\cdot\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \delta_{\frac{2\pi}{T}n}$, *dove le serie sono convergenti in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.*

Dimostrazione. Segue da sopra.

27.2.3 Teorema di Riemann-Lebesgue

Teorema 27.2.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

$$c_n \to_{n\to\infty} 0 \;.$$

Enunciato
In particolare si ha $(c_n)_{n\in N}$ è una successione limitata, cioè si ha $c \in l_\infty(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.

Teorema 27.2.3.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

$$\|c\|_\infty \le \frac{1}{T}\|u|[0,T[\|_1 \;.$$

Dimostrazione. Immediata.

27.2.4 Serie di Fourier di una funzione periodica di periodo T

Definizione 27.2.4.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia c_n il coefficiente di Fourier di u di indice n; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \;;$$

allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

si chiama serie di Fourier di u.

Si tratta della serie di Fourier della distribuzione periodica di periodo T, $u \cdot \lambda$.

Definizione 27.2.4.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica; sia u non costante; sia T il periodo (minimo) di u; per serie di Fourier di u si intente la serie di Fourier di u con periodo T.*

27.2.5 Coefficienti di Fourier di una funzione periodica reale

Teorema 27.2.5.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia $n \in \mathbf{Z}$; sia c_n il coefficiente di Fourier di u di indice n; allora si ha*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)u(x)\,dx - i\frac{1}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)u(x)\,dx \;.$$

Dimostrazione. Segue dalle formule di Eulero.

Definizione 27.2.5.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia $n \in \mathbf{Z}$; poniamo*

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\,dx\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\,dx\ .$$

a_n si chiama coefficiente di Fourier per il coseno di u di indice n.
b_n si chiama coefficiente di Fourier per il seno di u di indice n.
Si ha evidentemente $b_0 = 0$.

Teorema 27.2.5.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia c_n il coefficiente di Fourier di u di indice n, sia a_n il coefficiente di Fourier per il coseno di u di indice n, sia b_n il coefficiente di Fourier per il seno di u di indice n; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha*

1. $a_{-n} = a_n$;

2. $b_{-n} = -b_n$;

3. $c_n = a_n - ib_n = a_n + ib_{-n}$;

4. $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 27.2.5.3 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia*

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\,dx\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\,dx\ .$$

allora si ha

1. $\mathcal{F}(u\cdot\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n - ib_n)\delta_n$,

2. $\overline{\mathcal{F}}(u\cdot\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n + ib_n)\delta_n$, *dove le serie di Laurent sono convergenti in* $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Segue da sopra.

27.2.6 Serie ordinaria associata ad una serie di Laurent

Definizione 27.2.6.1 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di numeri complessi; la serie*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{-n})$$

si chiama serie ordinaria associata alla serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$

Analogamente si definisce la serie di funzioni

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n + f_{-n})$$

si chiama serie di funzioni ordinaria associata alla serie di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$, dove per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha $f_n : A \longrightarrow \mathbf{C}$ e A è un insieme.

Definizione 27.2.6.2 *Sia $(a_n)_{n\in Z}$ una successione di numeri complessi; la serie*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{-n})$$

si chiama serie ordinaria associata alla serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$

Analogamente si definisce la serie di funzioni

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n + f_{-n})$$

si chiama serie di funzioni ordinaria associata alla serie di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$, dove per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha $f_n : A \longrightarrow \mathbf{C}$ e A è un insieme.

27.2.7 Coefficienti di Fourier ordinari di una funzione periodica reale

Teorema 27.2.7.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia c_n il coefficiente di Fourier di u di indice n, sia a_n il coefficiente di Fourier per il coseno di u di indice n, sia b_n il coefficiente di Fourier per il seno di u di indice n; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \ ,$$

con $\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ la funzione

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ,$$

con $\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ,$$

allora la serie di funzioni ordinaria associata alla serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

è

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + 2b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right) \ .$$

Dimostrazione. Si ha
$c_0 e^{\frac{2\pi}{T}i0x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx} + c_{-n}e^{\frac{2\pi}{T}(-n)x}\right) =$
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((a_n - ib_n)(\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + i\sin(\frac{2\pi}{T}nx)) +$
$+ (a_{-n} - ib_{-n})(\cos(-\frac{2\pi}{T}nx) + i\sin(-\frac{2\pi}{T}nx))) =$
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((a_n - ib_n)(\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + i\sin(\frac{2\pi}{T}nx)) +$
$+ (a_n + ib_n)(\cos(\frac{2\pi}{T}nx) - i\sin(\frac{2\pi}{T}nx))) =$
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + ia_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx) - ib_n)\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx) +$
$+ a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) - ia_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx) + ib_n)\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)) =$
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + 2b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx))$.

Definizione 27.2.7.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *sia* $u(x) \in \mathbf{R}$*; per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *sia* a_n *il coefficiente di Fourier per il coseno di* u *di indice* n*, per ogni* $n \in \mathbf{N}^*$ *sia* b_n *il coefficiente di Fourier per il seno di* u *di indice* n*; per ogni* $n \in \mathbf{Z}$ *indichiamo con* $\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ,$$

con $\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ,$$

allora la serie di funzioni

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + 2b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right) \ .$$

si chiama serie di Fourier ordinaria di u*.*

Osservazione 27.2.7.1 Se la serie di Fourier di u è assolutamente convergente in x, anche la serie di Fourier ordinaria è assolutamente convergente in x, con la stessa somma.

Definizione 27.2.7.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica; sia u non costante; sia T il periodo (minimo) di u; per serie di Fourier ordinaria di u si intente la serie di Fourier di u ordinaria con periodo T.*

Definizione 27.2.7.3 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia a_n il coefficiente di Fourier per il coseno di u di indice n, per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia b_n il coefficiente di Fourier per il seno di u di indice n; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia*

$$A_n = \left\{ \begin{array}{ll} a_0 & \textit{per } n = 0 \\ 2a_n & \textit{per } n \neq 0 \end{array} \right\} ;$$

per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia

$$B_n = 2b_n ;$$

allora $(A_n)_{n \in N}$ si chiama successione dei coefficienti della serie di Fourier ordinaria di u per il coseno, $(B_n)_{n \in N^*}$ si chiama successione dei coefficienti della serie di Fourier ordinaria di u per il seno.

Teorema 27.2.7.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia A_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il coseno di indice n; per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia B_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il seno di indice n; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $\cos(\frac{2\pi}{T} inx)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \cos(\frac{2\pi}{T} nx) ,$$

con $\sin(\frac{2\pi}{T} inx)$ la funzione

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \sin(\frac{2\pi}{T} nx) ,$$

allora la serie di Fourier ordinaria di u è

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{2\pi}{T} nx) + B_n \sin(\frac{2\pi}{T} nx) \right) .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 27.2.7.3 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia A_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il coseno di indice n; per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia B_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il seno di indice n; allora si ha*

1.
$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt ;$$

e per ogni $n \in \mathbf{N}^*$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi nx) u(x)\, dx$$

2. per ogni $n \in \mathbf{N}^*$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(2\pi nx)u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Immediata.

27.2.8 Coefficienti di Fourier di una funzione periodica reale pari

Teorema 27.2.8.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia u una funzione pari; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ sia c_n il coefficiente di Fourier di u di indice n, sia a_n si chiama coefficiente di Fourier per il coseno di u di indice n, sia b_n si chiama coefficiente di Fourier per il seno di u di indice n; allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha*

1. $a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)u(x)\,dx$;
2. $b_n = 0$;
3. $c_n = a_n$.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbf{Z}$.
Si ha

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\,dx =$$

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\,dx\ .$$

Si ha

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\,dx = 0\ .$$

Teorema 27.2.8.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $u(x) \in \mathbf{R}$; sia u una funzione pari; per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia A_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il coseno di indice n; per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia B_n il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di u per il seno di indice n; allora si ha*

1.

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt\ ;$$

e per ogni $n \in \mathbf{N}^*$

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi nx)u(x)\,dx$$

2. *per ogni* $n \in \mathbf{N}^*$
$$B_n = 0 \ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

La serie di Fourier ordinaria di u è quindi

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \ .$$

27.2.9 Coefficienti di Fourier di una funzione periodica reale dispari

Teorema 27.2.9.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *sia* $u(x) \in \mathbf{R}$*; sia* u *una funzione dispari; per ogni* $n \in \mathbf{Z}$ *sia* c_n *il coefficiente di Fourier di* u *di indice* n*, sia* a_n *si chiama coefficiente di Fourier per il coseno di* u *di indice* n*, sia* b_n *si chiama coefficiente di Fourier per il seno di* u *di indice* n*; allora per ogni* $n \in \mathbf{Z}$ *si ha*

1. $a_n = 0$*;*
2. $b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\, dx$*;*
3. $c_n = -ib_n$*.*

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbf{Z}$.
Si ha
$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\, dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\, dx = 0 \ .$$
Si ha
$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\, dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\, dx = 0 =$$
$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2\pi}{T}nx)u(x)\, dx \ .$$

Teorema 27.2.9.2 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *sia* $u(x) \in \mathbf{R}$*; sia* u *una funzione dispari; per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *sia* A_n *il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di* u *per il coseno di indice* n*; per ogni* $n \in \mathbf{N}^*$ *sia* B_n *il coefficiente della serie di Fourier ordinaria di* u *per il seno di indice* n*; allora si ha*

1. *per ogni* $n \in \mathbf{N}$
$$A_n = 0 \ .$$

2. *per ogni* $n \in \mathbf{N}^*$

$$B_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Segue da sopra.

La serie di Fourier ordinaria di u è quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\ .$$

27.2.10 Trasformata di Fourier di funzioni periodiche pari e di funzioni periodiche dispari

Teorema 27.2.10.1 *Sia* $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; sia* $u|[0,T[\in \mathcal{L}^1([0,T[;\mathbf{C})$*; sia* $(c_n)_{n\in Z}$ *la successione dei coefficienti d Fourier di* u*; allora si ha*

1. u *pari* $\Rightarrow (c_n)_{n\in Z}$ *pari;*

2. u *dispari* $\Rightarrow (c_n)_{n\in Z}$ *dispari;*

3. u *reale pari* $\Rightarrow (c_n)_{n\in Z}$ *reale pari;*

4. u *reale dispari* $\Rightarrow (c_n)_{n\in Z}$ *immaginaria dispari.*

Dimostrazione. Immediata.

27.3 Regolarità e comportamento all'infinito per la serie di Fourier

27.3.1 Coefficienti di Fourier in $l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$

Teorema 27.3.1.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; sia* $(c_n)_{n\in Z}$ *la successione dei coefficienti di Fourier di* u*; sia* $(c_n)_{n\in Z} \in l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$*; allora si ha*

1. *la serie di Laurent di* u*,* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}in}$ *è totalmente convergente;*

2. *la serie di funzioni,* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}in}$ *converge uniformemente;*

3. *posto* $v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}in}$ v *è continua* u *è uguale a* v *quasi dappertutto.*

Dimostrazione. La (1) segue subito dal fatto che $|e^{-\frac{2\pi}{T}in}| = 1$; la (2) segue dalla (1); la (3) segue dalla (2).

Teorema 27.3.1.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $(\forall x \in \mathbf{R})$ $u(x) \in \mathbf{R}$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(A_n)_{n\in N}$ la successione ordinaria dei coefficienti di Fourier di u per il coseno; sia $(B_n)_{n\in N^*}$ la successione ordinaria dei coefficienti di Fourier di u per il seno; le serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ siano assolutamente convergenti; per ogni $n \in \mathbf{N}$, indichiamo con $\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ;$$

per ogni $n \in \mathbf{N}^*$, indichiamo con $\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ la funzione

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \ ;$$

allora si ha

1. *la serie di funzioni*

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)$$

   è totalmente convergente;

2. *la serie di funzioni*

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)$$

   converge uniformemente;

3. *posto $v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)$, v è continua e si ha $v = u$ quasi dappertutto.*

Dimostrazione. Ci si riconduce alla famiglia $(c_n)_{n\in Z}$.

27.3.2 Coefficienti di Fourier $(n^m c_n)_{n\in Z}$ in $l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$

Teorema 27.3.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier di u; supponiamo che sia*

$$(n^m c_n)_{n\in Z} \in l^1(\mathbf{Z};\mathbf{C}) \ ;$$

sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; allora esiste $v \in C^m(\mathbf{R};\mathbf{C})$ tale che $u = v$ quasi dappertutto.

Enunciato

27.3.3 u di classe C^m

Teorema 27.3.3.1 *Sia $m \in \mathbf{N}$; sia $u \in C^m(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

$$c_n \lll_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \; .$$

Enunciato

27.3.4 u di classe C^∞

Teorema 27.3.4.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

u è uguale quasi dappertutto ad una funzione di classe C^∞ $\Leftrightarrow$

$$(\forall m \in \mathbf{N})\; c_n \lll_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \; .$$

Enunciato

27.3.5 u analitica su $\{z \in \mathbf{C}; |\Im z| < r\}$

Teorema 27.3.5.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; sia $r \in \mathbf{R}_+^*$; allora u è uguale quasi dappertutto ad una funzione prolungabile su*

$$\{z \in \mathbf{C}; |\Im z| < r\}$$

in una funzione analitica se e solo se

$$(\forall t \in]0, \frac{2\pi}{T} r[) c_n \preceq_{n\to\infty} e^{-|n|t} \; .$$

Enunciato

27.3.6 u funzione intera

Teorema 27.3.6.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora u è uguale quasi dappertutto ad una funzione una funzione prolungabile su $\mathbf{C}$; in una funzione analitica se e solo se*

$$(\forall t \in \mathbf{R}_+^*) c_n \preceq_{n\to\infty} e^{-|n|t} \; .$$

Enunciato

27.4 Serie di Fourier e spazio di Hilbert P_T^2

27.4.1 Lo spazio di Hilbert P_T^2

Definizione 27.4.1.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; poniamo*

$$\mathcal{P}_T^2(\mathbf{R};\mathbf{C}) = \{u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, CC);\ u \text{ periodica di periodo } T, u|[0,T[\in \mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C})\}\ .$$

Si dice che $\mathcal{P}_T^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ è l'insieme delle funzioni su $\mathbf{R}$ periodiche complesse di quadrato integrabili su un periodo.
Si osservi che se $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ è periodica di periodo T e tale che $u|[0,T[\in \mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C})$, allora $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, CC)$; quindi $u \in \mathcal{P}_T^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Teorema 27.4.1.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; la funzione*

$$\alpha : \mathcal{P}_T^2 \longrightarrow \mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C}), u \longrightarrow u|[0,T[$$

è biettiva.

Dimostrazione. Immediata.

Consideriamo su $\mathcal{P}_T^2$ la relazione di equivalenza data dalle funzioni uguali quasi dappertutto; chiamiamo P_T^2 il corrispondente insieme quoziente.
Consideriamo su $\mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C})$ la relazione di equivalenza data dalle funzioni uguali quasi dappertutto, coincidente con la relazione d'equivalenza associata a $\|\cdot\|_2$; Vale il seguente teorema.

Teorema 27.4.1.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; la funzione*

$$\alpha_1 : P_T^2 \longrightarrow L^2([0,T[;\mathbf{C}), [u] \longrightarrow [u|[0,T[]$$

è biettiva.

Dimostrazione. Immediata.

Identifichiamo $[u] \in P_P^2$ con $\alpha(u) = [u|[0,T[]$ e P_T^2 con $L^2([0,T[;\mathbf{C})$.
Consideriamo in particolare $\|\cdot\|_2$ e $(\cdot|\cdot)$ definiti su P_T^2; più precisamente, per $[u] \in P_T^2$, poniamo

$$\|[u]\|_2 = \int_0^T |u|^2\,dx$$

e per $[u],[v] \in P_T^2$, poniamo

$$([u],[v]) = \int_0^T u\overline{v}\,dx\ .$$

In tal modo P_T^2 è uno spazio di Hilbert, identificato con lo spazio di Hilbert $L^2([0,T[;\mathbf{C})$.
L'intervallo $[0,T[$ può essere sostituito da $[0,T]$ o da $]0,T]$ o anche da $]0,T]$ o da $]0,T[$, cambiate le cose da cambiare.

27.4.2 Lo spazio di Hilbert $l_2(\mathbf{Z};\mathbf{C})$

Siano $(a_n)_{n\in Z}$, $(b_n)_{n\in Z} inl_2(\mathbf{Z};\mathbf{C})$; essendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, per il teorema sulla disuguaglianza di Hölder, la famiglia $(a_n\overline{b_n})_{n\in Z}$ è sommabile; si pone allora

$$((a_n)_{n\in Z}|(b_n)_{n\in Z}) = \sum_{n\in Z} a_n\overline{b_n}\,dx\ .$$

Resta definito nello spazio vettoriale complesso $l_2(A)$ un prodotto scalare.
La norma associata a tale prodotto scalare è la norma $\|\cdot\|_2$ di $l^2(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.
Quindi $l^2(A)$ dotato di tale prodotto scalare è uno spazio di Hilbert.

27.4.3 Funzione $u \in \mathcal{P}_T^2$ e coefficienti di Fourier

Teorema 27.4.3.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $T \in \mathbf{R}_+^*$*; sia* u *periodica di periodo* T*; sia* $(c_n)_{n\in Z}$ *la successione dei coefficienti d Fourier di* u*; allora si ha* $u|[0,T[\in \mathcal{P}_T^2$ *se e solo se* $(c_n)_{n\in Z} \in l_2(\mathbf{Z};\mathbf{C})$*; in tal caso, indicando con* $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ *la funzione*

$$[0,T[\longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx} \ ,$$

la serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n[e^{\frac{2\pi}{T}inx}]$$

converge in P_T^2 *ad* $[u]$*.*

Enunciato

27.4.4 Sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert

Sistema ortonormale. Sia E uno spazio di Hilbert; sia I un insieme al più numerabile; sia $(e_n)_{n\in I}$ una famiglia di elementi di E; si dice che $(e_n)_{n\in I}$ è un sistema ortonormale se si ha

1. $(\forall i,j \in I, i \neq j)\ (e_i|e_j) = 0$;
2. $(\forall i \in I)\ \|e_i\| = 1$.

Disuguaglianza di Bessel. Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale di E; sia $x \in E$; allora la famiglia $(|(x|e_n)|^2)_{n\in I}$ è sommabile e si ha

$$\sum_{n\in I} |(x|e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale di E; siano $x,y \in E$; allora la famiglia di $\mathbf{C}$ $((x|e_n)\bar{(}y|e_n))_{n\in I}$ è sommabile.

Sistema ortonormale completo. Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale di E; si dice che $(e_n)_{n\in I}$ è un sistema ortonormale completo se il sottospazio di E generato da $\{e_n;\ n \in I\}$ è denso in E.

Somma della famiglia $((x|e_n)e_n)_{n\in N}$. Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale; sia $x \in E$; in generale non è detto che famiglia $(\|(x|e_n)e_n)\|)_{n\in N}$ sia sommabile e quindi in base alla definizione di famiglia sommabile da noi data (che passa attraverso l'assoluta convergenza) che la famiglia di E, $((x|e_n)e_n)_{n\in N}$ sia sommabile.

Tuttavia, considerando $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow I$ biettiva, la serie di E $\sum_{n=0}^{\infty}((x|e_\sigma(n)n)e_\sigma(n)$ è convergente e la somma non dipende dalla particolare σ; è allora possibile porre è possibile porre

$$\sum_{i\in I}(x|e_n)e_n = \sum_{n=0}^{\infty}((x|e_\sigma(n))e_\sigma(n) \ .$$

Si prova anche che per tale definizione di somma, vale la proprietà associativa, come per le famiglie sommabili.

Uguaglianze di Parseval. Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale di E; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $(e_n)_{n\in I}$ sistema ortonormale completo;
2. per ogni $x \in E$ si ha
$$\sum_{n\in I} |(x|e_n)|^2 = \|x\|^2 \ ;$$

3. per ogni $x, y \in E$ si ha
$$\sum_{n\in I}(x|e_n)\overline{(y|e_n)} = (x|y)\ .$$
4. per ogni $x \in E$ si ha
$$\sum_{n\in I}(x|e_n)e_n = x\ .$$

Le uguaglianze (2) e (3) si chiamano uguaglianze di Parseval.
Se $x \in E$, allora la famiglia $((x|e_n))_{n\in I}$ si chiama successione dei coefficienti di Fourier di x rispetto al sistema ortonormale completo $(e_n)_{n\in I}$.
Lo spazio di Hilbert $l_2(I;\mathbf{C})$ Sostituendo $\mathbf{Z}$ con I nella definizione di $l^2(\mathbf{Z};\mathbf{C})$ si definisce lo spazio di Hilbert $l_2(I;\mathbf{C})$.
Sia $(c_n)_{n\in I} \in l_2(I;\mathbf{C})$; analogamente a quanto detto sopra, sebbene la famiglia $(\|c_n e_n\|)_{n\in I}$ non sia necessariamente sommabile è tuttavia possibile definire la somma $\sum_{n\in I} c_n e_n$.

Isomorfismo fra E **e** $l_2(I;\mathbf{C})$**.** Sia $(e_n)_{n\in I}$ un sistema ortonormale di E completo; sia $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow I$ biettiva; allora
$$\Phi : E \longrightarrow l_2(I;\mathbf{Z}), x \longrightarrow ((x|e_n))_{n\in Z}$$
è un isomorfismo di spazi di Hilbert avente per isomorfismo inverso la funzione
$$\Phi^{-1} : l^2(I;\mathbf{C}) \longrightarrow E, (c_n)_{n\in I} \longrightarrow \sum_{n\in I} c_n e_n\ .$$

27.4.5 Sistema ortonormale completo di P_T^2

Teorema 27.4.5.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $e^{\frac{2\pi}{T}inx}$ la funzione*
$$[0, T[\longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{\frac{2\pi}{T}inx}\ ;$$
allora la famiglia
$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}[e^{\frac{2\pi}{T}nxi}]\right)_{n\in Z}$$
è un sistema fondamentale ortonormale completo per lo spazio di Hilbert P_T^2; per ogni $[u] \in P_T^2$ se $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier della funzione periodica di u, la successione dei coefficienti di Fourier di $[u]$ rispetto al sistema ortonormale completo
$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}[e^{\frac{2\pi}{T}nxi}]\right)_{n\in Z}$$
è
$$(\sqrt{T}c_n)_{n\in Z}\ .$$

Dimostrazione. È immediato che $\left(\frac{1}{\sqrt{T}}[e^{\frac{2\pi}{T}nxi}]\right)_{n\in Z}$ è un sistema ortonormale di P_T^2. Sia $(c_n))n \in \mathbf{Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier du u. la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n[e^{\frac{2\pi}{T}int}]$ converge ad $[u]$; ciò equivale a dire che
$$\sum_{n\in Z}\sqrt{T}c_n[\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{2\pi}{T}int}] = [u]\ .$$
Cioò prova che il sistema ortonormale è completo e che la successione dei coefficienti di Fourier rispetto al sistema ortonormale è $(\sqrt{T}c_n)_{n\in Z}$.

Definizione 27.4.5.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $[u] \in P_T^2$; allora la successione $(c_n)_{n\in Z}$ dei coefficienti di Fourier di u si chiama successione dei coefficienti di Fourier di $[u]$ e si indica con $\mathcal{F}[u]$.*

Teorema 27.4.5.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; allora la funzione*

$$\Phi : P_T^2 \longrightarrow l_2(\mathbf{Z};\mathbf{C}), [u] \longrightarrow \sqrt{T}\mathcal{F}[u]$$

è un isomorfismo di spazi di Hilbert; l'isomorfismo inverso di Φ è la funzione

$$\Phi^{-1} : l_2(\mathbf{Z};\mathbf{C}) \longrightarrow P_T^2, (a_n)_{n\in Z} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{T}} [e^{\frac{2\pi}{T} inx}] \ .$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che famiglia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} [e^{\frac{2\pi}{T} nxi}] \right)_{n\in Z}$$

è un sistema fondamentale ortonormale completo di P_T^2.

Teorema 27.4.5.3 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; per ogni $f \in \mathcal{P}_T^2$ indichiamo con $\mathcal{F}f$ la successione dei coefficienti di Fourier di f; siano $u, v \in \mathcal{P}_T^2$; allora si ha*

$$\|u\|_2 = \frac{1}{\sqrt{T}} \|\mathcal{F}u\|_2$$

e

$$(u|v) = \frac{1}{T} (\mathcal{F}u|\mathcal{F}u) \ .$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che famiglia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} [e^{\frac{2\pi}{T} nxi}] \right)_{n\in Z}$$

è un sistema fondamentale ortonormale completo di P_T^2.

27.5 Convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier

27.5.1 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema 27.5.1.1 Condizione di Dini. *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $x \in \mathbf{R}$; siano l_+, $l_- \in \mathbf{C}$; sia*

$$r_+ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \frac{u(x+t) - l_+}{t} \ ;$$

sia

$$r_- :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \frac{u(x+t)-l_-}{t} \; ;$$

supponiamo che esista $t_+ \in \mathbf{R}$*,* $t_+ > 0$ *tale che* $r_+|]0,t_+] \in \mathcal{L}(]0,t_+])$*; supponiamo che esista* $t_- \in \mathbf{R}$*,* $t_- < 0$ *tale che* $r_+|[t_-,0[\in \mathcal{L}([t_-,0[)$*; sia* $(c_n)_{n\in Z}$ *la successione dei coefficienti d Fourier di* u*; per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *poniamo*

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{T}kxi} \; ;$$

allora $(s_n)_{n\in N}$ *è convergente e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{l_+ + l_-}{2} \; .$$

Enunciato
In altri termini la serie ordinaria associata alla serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{T}kxi}$ è convergente e ha somma $\frac{l_+ + l_-}{2}$.
Per u reale la serie di Fourier ordinaria (formata da coseni e seni) è convergente e ha somma $\frac{l_+ + l_-}{2}$.
Scriviamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{T}kxi} = \frac{l_+ + l_-}{2} \; .$$

Osservazione 27.5.1.1 La condizione:

$$(\exists t_+ \in \mathbf{R}, t_+ > 0) \; r_+|]0,t_+] \in \mathcal{L}(]0,t_+])$$

può essere sostituita dalla condizione più restrittiva

$$(\exists t \in \mathbf{R}, t_+ > 0)(\exists M_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\exists \alpha_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\forall s \in]0,t]) \; |u(x+s) - l_+| \le M_+ s^{\alpha_+} \; .$$

Tale condizione implica in particolare che

$$l+ = \lim_{y\to x+, y\neq x} u(y) \; .$$

Analogamente per l'altra condizione.

Osservazione 27.5.1.2 La condizione:

$$(\exists t \in \mathbf{R}, t_+ > 0)(\exists M_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\exists \alpha_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\forall s \in]0,t]) \; |u(x+s) - l_+| \le M_+ s^{\alpha_+}$$

può essere sostituita dalla condizione più restrittiva

$$(\exists t \in \mathbf{R}, t_+ > 0)(\exists M_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\forall s \in]0,t]) \; |u(x+s) - l_+| \le M_+ s \; .$$

Tale condizione implica in particolare che

$$l+ = \lim_{y\to x+, y\neq x} u(y) \; .$$

Analogamente per l'altra condizione.

Osservazione 27.5.1.3 La condizione:

$$(\exists t \in \mathbf{R}, t_+ > 0)(\exists M_+ \in \mathbf{R}_+^*)(\forall s \in]0,t]) \ |u(x+s) - l_+| \leq M_+ s$$

esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+s) - l_+}{s} \ .$$

Tale condizione implica in particolare che

$$l+ = \lim_{y \to x+, y \neq x} u(y) \ .$$

Tale limite è la derivata destra della funzione

$$u_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow \begin{cases} u(y) & \text{per } y \neq x \\ l_+ & \text{per } y = x \end{cases}$$

e si chiama pseudoderivata destra di y in x.
Analogamente per l'altra condizione.

Osservazione 27.5.1.4 Se u è continua in x le condizioni delle osservazioni precedenti implicano che la serie di Fourier ha per somma $u(x)$.
In particolare si ha la convergenza se u è continua in x e derivabile da destra e da sinistra.

27.5.2 Successione dei coefficienti di Fourier in $l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$

Teorema 27.5.2.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in \mathcal{W}^1_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia v periodica di periodo T; sia v una derivata distribuzionale di u; sia $v \in \mathcal{P}^2_T$; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha $c \in l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.*

Dimostrazione. Sia $(k_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di v;
Applicando la disuguaglianza $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, si ha

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}|2\pi i n||c_n| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}|(2\pi i n)c_n| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}|(\mathcal{F}(D(u\lambda)))_n| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}|k_n| \leq \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{|k_n|^2}\right) \ .$$

L'affermazione segue dalla sommabilità delle famiglie $(\frac{1}{n^2})_{n\in Z^*}$ e di $(|k_n|^2)_{n\in Z}$, conseguenza di $v \in \mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C})$.

Teorema 27.5.2.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in C^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha $c \in l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

Teorema 27.5.2.3 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $u|[0,T]$ di classe C^1 a tratti; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha $c \in l_1(\mathbf{Z};\mathbf{C})$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

27.5.3 Convergenza uniforme della serie di Fourier

Teorema 27.5.3.1 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $v \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia v periodica di periodo T; sia $v \in \mathcal{P}_T^1 \in \mathcal{L}^2([0,T[;\mathbf{C})$; sia $D(u\lambda) = v\lambda$; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier di u; allora si ha*

$$u(x) = \sum_{n\in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

uniformemente su $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. La serie

$$\sum_{n\in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

è totalmente convergente; quindi converge uniformemente ad un funzione v; quindi la serie

$$\sum_{n\in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx} \cdot \lambda$$

converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ a $v\lambda$; quindi $u\lambda = v\lambda$; essendo u, v continue, si ha $u = v$.

Teorema 27.5.3.2 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in C^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

$$u(x) = \sum_{n\in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

uniformemente su $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. Segue da sopra.

Teorema 27.5.3.3 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $u|[0,T]$ di classe C^1 a tratti; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u; allora si ha*

$$u(x) = \sum_{n\in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

uniformemente su $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

Teorema 27.5.3.4 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia u periodica di periodo T; sia*

$$(\forall x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])\ u(x) = x\ ;$$

sia $(a_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u per il coseno; sia $(b_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti d Fourier di u per il seno; allora si ha

$$(\forall \in \mathbf{N})\ a_n = 0 \text{ e } (\forall n \in \mathbf{N}^*)\ b_n = \frac{T}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\ .$$

Dimostrazione. Essendo u dispari si ha $(\forall \in \mathbf{N})\ a_n = 0$.
sia $n \in \mathbf{N}^*$. Si ha

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx =$$

$$\frac{4}{T}\left(\left[-x\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\frac{1}{\frac{2\pi}{T}n}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{1}{\frac{2\pi}{T}n}\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx\right) =$$

$$2\left(\left[-x\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\frac{1}{\pi n}\right]_0^{\frac{T}{2}} + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\pi n}\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi n}\left[-x\cos(\frac{2\pi}{T}nx) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}n}\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi n}(-\frac{T}{2}\cos(n\pi)) = \frac{T}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\ .$$

Quindi la serie di Fourier ordinaria di u è

$$\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\ .$$

Teorema 27.5.3.5 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia u periodica di periodo T; sia*

$$(\forall x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])\ u(x) = x\ ;$$

siano $a, b \in \mathbf{R}$; sia

$$-\frac{T}{2} < a < b < \frac{T}{2}\ ;$$

allora la serie di Fourier ordinaria di u,

$$\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\ .$$

converge uniformemente a u su $[a, b]$.

Enunciato

Teorema 27.5.3.6 *Sia $T \in \mathbf{R}_+^*$; sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia u periodica di periodo T; sia $(c_n)_{n\in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier di f; sia*

$$F = \{x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[;\ f \textit{ non continua in } x\};$$

sia $p = \mathrm{Card}(F)$; sia

$$t : \{1, \ldots, p\} \longrightarrow F$$

biettiva strettamente crescente; supponiamo che per ogni $k = 1, 2, \ldots, p-1$ $u|]x_k, x_{k+1}[$ *sia prolungabile su* $[x_k, x_{k+1}]$ *in una funzione di classe* C^1*; supponiamo che per ogni* $u|]x_p, x_1 + T[$ *sia prolungabile su* $[x_p, x_1 + T]$ *in una funzione di classe* C^1*; sia*

$$v : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \frac{\lim_{y \to x+, y \neq x} u(y) + \lim_{y \to x-, y \neq x} u(y)}{2}$$

allora si ha

1.
$$v(x) = \sum_{n \in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T} inx}$$

   puntualmente a v *su* $\mathbf{R}$ *(cioè posto per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *e per ogni* $n \in \mathbf{N}$ $s_n = \sum_{k=n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{T} ikx}$ *si ha* $\lim_{n \to \infty} v(x)$*);*

2. *per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$ *tale che per ogni* $x \in [a, b]$*,* u *continua in* x*, si ha*

$$u(x) = \sum_{n \in Z} c_n e^{\frac{2\pi}{T} inx}$$

   uniformemente su $[a, b]$*.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue dai teoremi sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.

Sia $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$; sia g periodica di periodo T; sia

$$(\forall x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])\ g(x) = x\ .$$

Per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots, p$ sia $l_k = u(t_k+) - u_(t_k-)$.

Sia
$$v : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{l_k}{T} g(x + \frac{T}{2} - t_k)\ .$$

La funzione v è periodica di periodo T.

Proviamo che v è continua.

È sufficiente provare che v è continua su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$.

Sia $x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$.

Sia $k = 1, 2, \ldots, p$. La funzione $g(x + \frac{T}{2} - t_k)$ è discontinua in x se e solo se esiste $h \in \mathbf{Z}$ tale che $x + \frac{T}{2} - t_k = \frac{T}{2} + hT$; cioè se e solo se $x = t_k + hT$; essendo $x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ se e solo se $x = t_k$.

Quindi v è continua su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[- \{t_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots, p\}$.

Sia $k = 1, 2, \ldots, p$.

Si ha
$$\lim_{x \to t_k+} g(x + \frac{T}{2} - t_k) = \lim_{y \to \frac{T}{2}+} g(y) = -\frac{T}{2}$$

e
$$\lim_{x \to t_k -} g(x + \frac{T}{2} - t_k) = \lim_{y \to \frac{T}{2} -} g(y) = \frac{T}{2} \ .$$

Sia $k = 1, 2, \ldots, p$. Proviamo che v è continua in t_k

Si ha
$$\lim_{x \to t_k +} v(x) = u(t_k +) + \sum_{j \in \{1,2,\ldots,p\} - \{k\}} \frac{l_k}{T} u(t_k + \frac{T}{2} - t_j) + \frac{l_k}{T}(-\frac{T}{2}) =$$
$$\sum_{j \in \{1,2,\ldots,p\} - \{k\}} \frac{l_k}{T} u(t_k + \frac{T}{2} - t_j) + \frac{u(t_k +) + u(t_k -)}{2} \ .$$
e
$$\lim_{x \to t_k -} v(x) = u(t_k -) + \sum_{j \in \{1,2,\ldots,p\} - \{k\}} \frac{l_k}{T} u(t_k + \frac{T}{2} - t_j) - \frac{l_k}{T}(-\frac{T}{2}) =$$
$$\sum_{j \in \{1,2,\ldots,p\} - \{k\}} \frac{l_k}{T} u(t_k + \frac{T}{2} - t_j) + \frac{u(t_k +) + u(t_k -)}{2} \ .$$

Ciò prova che v è continua.

Dall'ipotesi su u segue che v è di classe C^1 a tratti.

Quindi per il teorema sopra la serie di Fourier di v converge uniformemente.

Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a < b$; sia u continua su $[a, b]$.

Per il teorema sopra, utilizzando una traslazione, per ogni $k = 1, 2, \ldots, p$ si vede che la serie di Fourier di $g(x + \frac{T}{2} - x_k)$ converge uniformemente su $[a, b]$.

Quindi la serie di Fourier di u converge uniformemente su $[a, b]$ in quanto somma di serie che convergono uniformemente.

27.5.4 La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

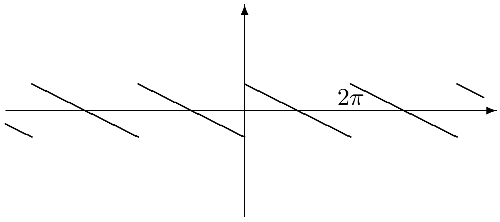
Teorema 27.5.4.1 *Si ha*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6} \ .$$

Dimostrazione. Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ periodica di periodo 2π tale che per ogni $x \in]0, 2\pi]$ sia
$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \ .$$

Sia $x \in \mathbf{R}$; esiste uno ed uno solo $x' \in]0, 2\pi]$, esiste uno ed uno solo $k \in \mathbf{Z}$ tali che $x = x' + 2k\pi$. Si ha
$$f(x) = f(x') = \frac{\pi - x'}{2} \ .$$

Si ha $-x = -x' - 2k\pi = -x' + 2\pi - 2k\pi - 2\pi = -x' + 2\pi + (-2k - 2)\pi$, con $-x' + 2\pi \in]0, 2\pi]$.

Si ha quindi
$$f(-x)=\frac{\pi-(-x'+2\pi)}{2}=\frac{x'-\pi}{2}=-f(x)\ .$$
Quindi f è una funzione dispari.



Sia $n\in\mathbf{N}^*$; sia B_n il coefficiente di indice n per il seno della serie di Fourier ordinaria di f.
Essendo f reale dispari, si ha
$$B_n=\frac{4}{2\pi}\int_0^\pi \sin(nt)f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\frac{\pi-t}{2}\,dt=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)\right]_0^t-\int_0^\pi -\frac{1}{n}\cos(nt)(=1)\,dt\right)=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)\right]_0^t-\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt\right)=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)\right]_0^t-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi\right)=$$
$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)-\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^\pi=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\sin(nt)+\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\ .$$
La serie di Fourier ordinaria di f è quindi
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)\ .$$
Essendo $\{x\ \in]0,2\pi];\ f$ non continua in $x\}=\{2\pi\}$ ed essendo $f|]0,2\pi]$ prolungabile per continuità in 2π, con prolungamento di classe C^1, la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)$ è convergente per ogni $x\in\mathbf{R}$.
Sia $x\in\mathbf{R}$; se $(\forall k\in\mathbf{Z})\ x\neq 2k\pi$, si ha
$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)\ .$$

Per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha quindi

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \ .$$

Si ha $f|]0, 2\pi] \in \mathcal{L}^2(]0.2\pi], \mathbf{C})$.
Sia $(c_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier di f
Consideriamo lo spazio di Hilbert $P^2_{2\pi}$; la successione dei coefficienti di Fourier di $[f]$ rispetto al sistema ortonormale completo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}[e^{\frac{2\pi}{T}nxi}]\right)_{n \in Z}$$

è

$$(\sqrt{2\pi}Tc_n)_{n \in Z} \ .$$

Per l'uguaglianza di Parseval la famiglia $(\sqrt{2\pi}c_n\overline{\sqrt{2\pi}c_n})_{n \in Z}$ è sommabile e si ha

$$\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}c_n\overline{\sqrt{2\pi}c_n} \ .$$

Si ha

$$\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{(\pi - x)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{12}(\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^3}{6} \ .$$

Sia $(b_n)_{n \in Z}$ la successione dei coefficienti di Fourier di f per il seno; per $n \in \mathbf{N}^*$ si ha $b_n = \frac{B_n}{2} = \frac{1}{2n}$; per $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ si ha $b_n = -b_{-n} = -\frac{1}{2(-n)} = \frac{1}{2n}$; per $n = 0$, si ha $b_0 = 0$.
Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha $c_n = -ib_n$; quindi per $n \neq 0$ si ha $c_n = -i\frac{1}{2n}$; per $n = 0$, si ha $c_0 = 0$.
Si ha quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}c_n\overline{\sqrt{2\pi}c_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi c_n\overline{c_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi c_{-n}\overline{c_{-n}} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi(-i)\frac{1}{2n}i\frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi(-i)^n\frac{1}{-2n}i\frac{1}{-2n} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pi\frac{1}{2n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi(-i)^n\frac{1}{2n^2} = \pi\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ . \ .$$

Si ha quindi

$$\frac{\pi^3}{6} = \pi\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ ;$$

quindi si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}\ .$$

Esercizio. Sia
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow |\sin(\pi x)|\ ;$$
determinare la serie di Fourier ordinaria di f e studiarne la convergenza.
Risoluzione. La funzione f è periodica.
Essendo π il periodo di $|\sin x|$, il periodo di f è 1.
f è una funzione pari.
Sia $(A_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il coseno.
Sia $(B_n)_{n\in N^*}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il seno.
Essendo f pari si ha $B_n = 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}^*$.
Si ha
$$A_0 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |\sin(\pi x)|\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\, dx = 2\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}\ .$$
Per $n \in \mathbf{N}^*$ si ha
$$A_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} |\sin(\pi x)|\cos(2\pi n x)\, dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\cos(2\pi n x)\, dx =$$
$$4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin((2n+1)\pi x) - \sin((2n-1)\pi x)\right)\, dx =$$
$$2\left[-\frac{1}{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi x) + \frac{1}{(2n-1)\pi}\cos((2n-1)\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$
$$2\left(\frac{1}{(2n+1)\pi} - \frac{1}{(2n-1)\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{-2}{4n^2-1} = -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\ .$$
La serie di Fourier ordinaria di f è quindi
$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos(2\pi n x) = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2\pi n x)\right)\ .$$
Essendo f di classe C^1 a tratti, la serie di Fourier converge totalmente e quindi uniformemente; per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha quindi
$$|\sin(\pi x)| = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2\pi n x)\right)\ ,$$
con convergenza della serie uniforme.

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione periodica di periodo 2 tale che per ogni $x \in [-1, 1[$ sia
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{per } x = -1 \end{cases}\ ;$$
determinare la serie di Fourier ordinaria di f e studiarne la convergenza.
Risoluzione. La funzione f è dispari.
Sia $(A_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il coseno.
Sia $(B_n)_{n\in N^*}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il seno.
Essendo f dispari si ha $A_n = 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha

$$B_n = 2\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,dx = 2\left(\left[-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n x)x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n x)\,dx\right) =$$

$$2\left(\left[-\frac{1}{\pi n}x\cos(\pi n x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx\right) =$$

$$2\left[-\frac{1}{\pi n}x\cos(\pi n x) + \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n x)\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi n}\cos(\pi n) = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}\ .$$

La serie di Fourier ordinaria di f è quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}\sin(2\pi n x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2\pi n x)\ .$$

Essendo $f|]-1,1[$ prolungabile a $[-1,1]$ in una funzione di classe C^1 a tratti, la serie di Fourier converge in ogni $x \in \mathbf{R}$; se per ogni $k \in \mathbf{Z}$, $x \neq 2k$ la somma della serie è $f(x)$; se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $x = 2k$ la somma della serie 'e

$$\frac{\lim_{y\to 2k+} f(y) + \lim_{y\to 2k-} f(y)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(x)\ .$$

Quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$ la somma della serie è $f(x)$.

La convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto $[a,b]$ tale che esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $[a,b] \subset]2k, 2k+2[$.

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ la funzione periodica di periodo 4 tale che per ogni $x \in [-2,2[$ sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{per } -2 \le x < -1 \text{ o } 1 < x < 2 \end{cases}\ ;$$

determinare la serie di Fourier ordinaria di f e studiarne la convergenza.

Risoluzione. La funzione f è pari.
Sia $(A_n)_{n\in N}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il coseno.
Sia $(B_n)_{n\in N^*}$ la successione dei coefficienti della serie di Fourier (ordinaria) per il seno.
Essendo f pari si ha $B_n = 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}^*$.
Si ha

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = 1\ .$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha

$$A_n = \int_0^2 f(t)\cos(\frac{\pi}{2}nx)\,dx = \int_0^1 \cos(\frac{\pi}{2}nx)\,dx = \left[\frac{2}{\pi n}\sin(\frac{\pi}{2}nx)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\ .$$

Se $n = 2k$ si ha $A_{2k}\frac{2}{2\pi k}\sin(k\pi) = 0$.
Se $n = 2k+1$ si ha

$$A_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) =$$

$$\frac{2}{(2k+1)\pi}\cos(k\pi) = \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k\ .$$

La serie di Fourier ordinaria di f è quindi

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{(2k+1)\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)x\right) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)x\right)\ .$$

Essendo $f|]-2,-1[$, $f|]-1,1[$, $f]1,2[$ prolungabili rispettivamente a $[-2,-1]$, $[-1,1]$, $[1,2]$ in funzioni di classe C^1 a tratti, la serie di Fourier converge in ogni $x \in \mathbf{R}$; se per ogni $k \in \mathbf{Z}$, $x \neq 2+2k$ la somma della serie è $f(x)$; se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $x = 1+4k$ la somma della serie ‘e

$$\frac{\lim_{y\to 1+4k+} f(y) + \lim_{y\to 1+4k-} f(y)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $x = -1+4k$ la somma della serie ‘e

$$\frac{\lim_{y\to -1+4k+} f(y) + \lim_{y\to -1+4k-} f(y)}{2} = \frac{1+9}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

La convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto $[a,b]$ tale che esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $[a,b] \subset]1+4k, 1+6k[$ oppure tale che esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $[a,b] \subset]-1+4k, -1+6k[$.

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ periodica di periodo 2π tale che per ogni $x \in]0, 2\pi]$ sia

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}\ ;$$

1. determinare la serie di Fourier ordinaria di f e studiarne la convergenza;
2. provare che esistono e solo unici $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che per ogni $x \in [0, 2\pi]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\sin(nx)$ sia convergente e si abbia

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\sin(nx)$$

e determinarli.

Risoluzione.

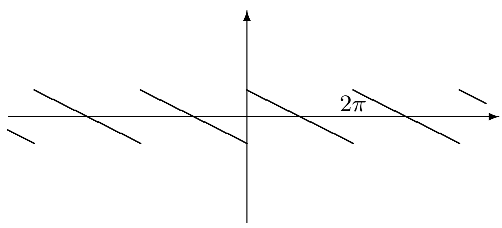
1. Sia $x \in \mathbf{R}$; esiste uno ed uno solo $x' \in]0, 2\pi]$, esiste uno ed uno solo $k \in \mathbf{Z}$ tali che $x = x' + 2k\pi$. Si ha

$$f(x) = f(x') = \frac{\pi - x'}{2}\ .$$

Si ha $-x = -x' - 2k\pi = -x' + 2\pi - 2k\pi - 2\pi = -x' + 2\pi + (-2k-2)\pi$, con $-x' + 2\pi \in]0, 2\pi]$. Si ha quindi

$$f(-x) = \frac{\pi - (-x' + 2\pi)}{2} = \frac{x' - \pi}{2} = -f(x)\ .$$

Quindi f è una funzione dispari.



Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia B_n il coefficiente di indice n per il seno della serie di Fourier ordinaria di f. Essendo f reale dispari, si ha

$$B_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\frac{\pi - t}{2}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi - t)\right]_0^t - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nt)(=1)\, dt\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)\right]_0^t-\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt\right)=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)\right]_0^t-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi\right)=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)(\pi-t)-\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^\pi=$$
$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\sin(nt)+\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\ .$$

La serie di Fourier ordinaria di f è quindi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)\ .$$

Essendo $\{x\in]0,2\pi];\ f \text{ non continua in } x\}=\{2\pi\}$ ed essendo $f|]0,2\pi]$ prolungabile per continuità in 2π, con prolungamento di classe C^1, la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)$ è convergente per ogni $x\in\mathbf{R}$.

Sia $x\in\mathbf{R}$.

Se $(\forall k\in\mathbf{Z})\ x\neq 2k\pi$, si ha

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)\ .$$

Se $(\exists k\in\mathbf{Z})\ x=2k\pi$, si ha

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)=\frac{\lim_{y\to x+,y\neq x}f(y)+\lim_{y\to x-,y\neq x}f(y)}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}=0\ .$$

Inoltre se $a,b\in\mathbf{R}$, con $a<b$, e se esiste $k\in\mathbf{Z}$ tale che $[a,b]\subset]2k\pi,(2k+2)\pi[$, la convergenza della serie di funzioni $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)$ è uniforme su $[a,b]$.

2. Per ogni $x\in\mathbf{R}$ e per ogni $n\in\mathbf{N}^*$ si ha

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}\ .$$

Quindi la serie di funzioni su $\mathbf{R}$,

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2}\cos(nx)$$

è totalmente convergente.

Sia

$$g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}, x\longrightarrow-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\cos(nx)\ .$$

Per ogni $x\in\mathbf{R}$ si ha

$$g(x)=\sum_{n=1}^\infty -\frac{1}{n^2}\cos(nx)\ .$$

Sia $x_0\in]0,2\pi[$; siano $a,b\in\mathbf{R}$ tali che $0<a<x_0<b<2\pi$.

Per ogni $n\in\mathbf{N}^*$ si ha $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)=\frac{1}{n}\sin(nx)$; essendo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(nx)$$

uniformemente convergente su $[a,b]$, la funzione g è derivabile in x_0 e si ha

$$g'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx_0) \ .$$

Quindi g è derivabile su $]0, 2\pi[$ e per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \ .$$

La funzione $g|]0, 2\pi[$ è quindi una primitiva di $f|]0, 2\pi[$.
Per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \ .$$

Una primitiva di $-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ è $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x$.
Quindi esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x + C = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \cos(nx) \ .$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \cos(nx), \ x \in]0, 2\pi[$$

è totalmente convergente e quindi uniformemente convergente.
Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0, x \in]0, 2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \cos(nx) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0, x \in]0, 2\pi} \left(-\frac{1}{n^2} \cos(nx) \right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \ .$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0, x \in]0, 2\pi} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x + C \right) = C \ .$$

Si ha quindi

$$C = -\frac{\pi}{6} \ .$$

Si ha dunque per ogni $x \in]0, 2\pi[$

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \cos(nx) \ .$$

Quindi

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \ .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \ .$$

Quindi la serie di funzioni su $\mathbf{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$$

è totalmente convergente.
Sia

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx) \ .$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^3}\sin(nx)\right) = \frac{1}{n^2}\cos(nx)$; essendo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

totalmente e quindi uniformemente convergente, la funzione h è derivabile e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \ .$$

La funzione h è quindi una primitiva di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$.
Per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Una primitiva di $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ è $\frac{1}{12}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x$.
Quindi esiste $C_1 \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in]0, 2\pi[$ si ha

$$\frac{1}{12}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x + C_1 = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx) \ .$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx), \ x \in]0, 2\pi[$$

è totalmente convergente e quindi uniformemente convergente.
Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0, x \in]0,2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^3} \sin(nx)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0, x \in]0,2\pi} \left(\frac{1}{n^3} \sin(nx)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \ .$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0, x \in]0,2\pi} \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x + C_1\right) = C_1 \ .$$

Si ha quindi

$$C_1 = 0 \ .$$

Si ha dunque per ogni $x \in]0, 2\pi[$

$$\frac{1}{12}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx) \ .$$

Ciò prova l'esistenza dei coefficienti A, B, C, D; l'unicità segue dal fatto che due funzioni polinomiali coincidenti su $]0, 2\pi[$ hanno uguali coefficienti. Inoltre quanto svolto sopra prova che si ha $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{\pi}{4}$, $C = \frac{pi^2}{6}$, $D = 0$.

Capitolo 28

Trasformata di Laplace

28.1 Trasformata di Laplace

28.1.1 Ascissa di assoluta convergenza

Teorema 28.1.1.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; per ogni* $s \in \mathbf{C}$ *indichiamo con* $e^{-st}u(t)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-st}u(t) \; ;$$

allora esiste uno ed uno solo $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ *tale che*

1. $(\forall s \in \mathbf{C},\, \Re s > \lambda)$ $e^{-st}u(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C},\, \Re s < \lambda)$ $e^{-st}u(t) \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

Enunciato

Definizione 28.1.1.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; per ogni* $s \in \mathbf{C}$ *indichiamo con* $e^{-st}u(t)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-st}u(t) \; ;$$

allora l'unico $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ *tale che*

1. $(\forall \sigma \in \mathbf{C},\, \Re s > \lambda)$ $e^{-st}u(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C},\, \Re s < \lambda)$ $e^{-st}u(t) \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

si chiama ascissa di assoluta convergenza di u *e si indica* $\lambda_a(u)$.

Teorema 28.1.1.2 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; per ogni* $\xi \in \mathbf{R}$ *indichiamo con* $e^{-\xi t}u(t)$ *la funzione*

$$\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-\xi t}u(t) \; ;$$

allora si ha

$$\lambda_a(u) = \inf(\{\xi \in \mathbf{R};\; e^{-\xi t}u(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{C})\}) \; .$$

Dimostrazione. Immediata.

28.1.2 Funzione trasformabile secondo Laplace

Definizione 28.1.2.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; si dice che u è trasformabile secondo Laplace se $\lambda_a(u) \neq +\infty$.*

28.1.3 Trasformata di Laplace in un punto

Definizione 28.1.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia $s \in \mathbf{C}$; sia $\xi = \Re s$; sia $\eta = \Im s$; sia $\xi > \lambda_a(u)$; indichiamo con $e^{-\xi x}u(x)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{-\xi x}u(x)\ ;$$

poniamo

$$\mathcal{L}u(s) = \mathcal{F}(e^{-\xi x}u(x))\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)\ .$$

Teorema 28.1.3.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia $s \in \mathbf{C}$; sia $\Re s > \lambda_a(u)$; allora si ha*

$$\mathcal{L}u(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Sia $\xi = \Re s$ e $\eta = \Im s$.
Si ha

$$\mathcal{L}u(s) = \int_R e^{-2\pi i\frac{\eta}{2\pi}}e^{-\xi x}u(x)\,dx = \int_R e^{-i\eta x}e^{-\xi x}u(x)\,dx = \int_R e^{-sx}u(x)\,dx =$$

$$\int_R e^{-sx}\,d(u\cdot\lambda)(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-sx}\,d(u\cdot\lambda)(x) =$$

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-sx}\,u(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}u(x)\,dx\ .$$

28.1.4 Trasformata di Laplace di una funzione localmente integrabile

Definizione 28.1.4.1 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; la funzione*

$$\mathcal{L}u : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda_a(u)\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-sx}u(x)\,dx$$

si chiama trasformata di Laplace della funzione localmente integrabile u.

28.1.5 Analiticità della trasformata di Laplace

Teorema 28.1.5.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; allora* $\mathcal{L}u$ *è una funzione analitica.*

Enunciato

Teorema 28.1.5.2 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\xi > \lambda_a(u)$*; indichiamo con* $e^{-\xi x}u(x)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow e^{-\xi x}u(x) \ ;$$

sia

$$g : \{\xi + i\eta;\ \eta \in \mathbf{R}\} \longrightarrow \mathbf{C}, (\xi + i\eta) \longrightarrow \mathcal{F}(e^{-\xi x}u(x)) \left(\frac{\eta}{2\pi}\right) \ ;$$

allora g *è prolungabile a* $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda_a(u)\}$ *in una funzione analitica e il prolungamento è la trasformata di Laplace di* u*.*

Enunciato

28.1.6 Trasformata di Laplace sulle funzioni localmente integrabili

Definizione 28.1.6.1 *Sia* $\mathcal{A}$ *l'insieme delle funzioni analitiche da un aperto di* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{C}$*; la funzione*

$$\mathcal{L} : \{u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C});\ \mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[\} \longrightarrow \mathcal{A}, u \longrightarrow \mathcal{L}u$$

si chiama trasformata di Laplace.

Due funzioni $u, v \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ con supporto contenuto in $[0, +\infty$ hanno la stessa trasformata di Laplace se e solo se sono uguali quasi dappertutto.
Infatti la trasformata di Laplace è riconducibile al prolungamento analitico di una trasformata di Fourier.

28.1.7 Funzione di Heaviside

Definizione 28.1.7.1 *Poniamo*

$$H : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \textit{per } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \textit{per } x = 0 \\ 0 & \textit{per } x < 0 \end{cases} \ .$$

La funzione H di chiama funzione di Heaviside.
Si ha $H \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ e $\mathrm{Supp}(H \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$.
Possiamo quindi considerare la trasformata di Laplace di H.

28.1.8 Trasformata di Laplace della funzione di Heaviside

Teorema 28.1.8.1 *Si ha*

1. $\lambda_a(H) = 0$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > 0)$ $\mathcal{L}H(s) = \frac{1}{s}$.

Dimostrazione. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; per ogni $t > 0$ si ha $e^{-\xi t}H(t) = e^{-\xi t}$. La funzione $t \longrightarrow e^{-\xi t}$ è integrabile su $[0, +\infty[$ se e solo se $\xi > 0$; da ciò segue che $\lambda_a(H) = 0$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\Re s > 0$ si ha Si ha infatti

$$\mathcal{L}H(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}H(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}\,dt =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{s}\left((1 - e^{-sx}\right) = \frac{1}{s}\ .$$

28.1.9 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)e^{\alpha t}$

Teorema 28.1.9.1 *Sia $\alpha \in \mathbf{C}$; indichiamo con $H(t)e^{\alpha t}$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow H(t)e^{\alpha t}\ ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)e^{\alpha t}$ è $\Re\alpha$;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > \Re\alpha)$ $\mathcal{L}(H(t)e^{\alpha t})(s) = \frac{1}{s-\alpha}$.

Dimostrazione. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; per ogni $t > 0$ si ha $e^{-\xi t}H(t)e^{\alpha t} = e^{-(\xi-\alpha)t} = e^{-(\xi-\Re\alpha)t}e^{\Im\alpha i t}$.
Quindi $|e^{-\xi t}H(t)e^{\alpha t}| = e^{-(\xi-\Re\alpha)t}$.

La funzione $t \longrightarrow e^{-(\xi+\Re\alpha)t}$ è integrabile su $[0, +\infty[$ se e solo se $\xi - \Re\alpha > 0$; cioè se e solo se $\xi > \Re\alpha$; da ciò segue che $\lambda_a(H) = \Re\alpha$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\Re s > \Re\alpha$ si ha Si ha infatti

$$\mathcal{L}H(s)e^{\alpha t} = \int_0^{+\infty} e^{-st}H(t)e^{\alpha t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(s-\alpha)t}\,dt =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{s-\alpha}\left((1 - e^{-(s-\alpha)x}\right) = \frac{1}{s-\alpha}$$

in quanto

$$|e^{-(s-\alpha)x}|e^{-(Res-\Re\alpha)x} \longrightarrow_{x\to+\infty} 0\ .$$

28.1.10 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)\sin(\omega t)$

Teorema 28.1.10.1 *Sia $\omega \in \mathbf{R}$; sia $\omega > 0$; indichiamo con $H(t)\sin(\omega t)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow H(t)\sin(\omega t) ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\sin(\omega t)$ è 0;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > 0 \ \mathcal{L}(H(t)\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) .$$

Per il teorema sopra le funzioni $t \longrightarrow e^{i\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{i\omega t}$ hanno ascissa di assoluta convergenza 0; quindi $H(t)\sin(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza ≤ 0.
Si verifica che per $\xi < 0$ la funzione $t \longrightarrow e^{-\xi t}\sin(\omega t)$ non é integrabile si $[0, +\infty[$.
Quindi l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\sin(\omega t)$ è 0.
Sia $s \in \mathbf{C}$. $\Re c > 0$. Si ha

$$\mathcal{L}H(s)\sin(\omega t) = \mathcal{L}H(s)\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) == \frac{1}{2i}(\frac{1}{s-\omega i} - \frac{1}{s+\omega i}) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} .$$

28.1.11 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)\cos(\omega t)$

Teorema 28.1.11.1 *Sia $\omega \in \mathbf{R}$; sia $\omega > 0$; indichiamo con $H(t)\cos(\omega t)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow H(t)\cos(\omega t) ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\cos(\omega t)$ è 0;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > 0 \ \mathcal{L}(H(t)\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) .$$

Per il teorema sopra le funzioni $t \longrightarrow e^{i\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{i\omega t}$ hanno ascissa di assoluta convergenza 0; quindi $H(t)\cos(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza ≤ 0.
Si verifica che per $\xi < 0$ la funzione $t \longrightarrow e^{-\xi t}\cos(\omega t)$ non é integrabile si $[0, +\infty[$.
Quindi l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\sin(\omega t)$ è 0.
Sia $s \in \mathbf{C}$. $\Re c > 0$. Si ha

$$\mathcal{L}H(s)\cos(\omega t) = \mathcal{L}H(s)\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) == \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega i} + \frac{1}{s+\omega i}) = \frac{s}{s^2+\omega^2} .$$

28.1.12 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t)$

Teorema 28.1.12.1 *Sia $\omega \in \mathbf{R}$; sia $\omega > 0$; indichiamo con $H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t)\ ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t)$ è ω;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > \omega\ \mathcal{L}(H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathrm{sh}(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{\omega t})\ .$$

Per il teorema sopra la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{\omega t}$ ha ascissa di assoluta convergenza ω; la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{-\omega t}$ ha ascissa di assoluta convergenza $-\omega$; quindi $H(t)\sin(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza $\leq \omega$.
Per $\xi \in \mathbf{R}$, $-\omega < \xi < \omega$ la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ non è integrabile su $[0,+\infty[$, mentre la funzione $t \longrightarrow e^{-\omega t}$ è integrabile su $[0,+\infty$; quindi la funzione $t \longrightarrow \mathrm{sh}(\omega t)$ non è integrabile su $[0,+\infty$. quindi $H(t)\,\mathrm{sh}(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza ω.
Sia $s \in \mathbf{C}$. $\Re c > \omega$. Si ha

$$\mathcal{L}H(s)\,\mathrm{sh}(\omega t) = \mathcal{L}H(s)\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{\omega t}) == \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\ .$$

28.1.13 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)\,\mathrm{ch}(\omega t)$

Teorema 28.1.13.1 *Sia $\omega \in \mathbf{R}$; sia $\omega > 0$; indichiamo con $H(t)\,\mathrm{ch}(\omega t)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow H(t)\,\mathrm{ch}(\omega t)\ ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)\cos(\omega t)$ è ω;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > \omega\ \mathcal{L}(H(t)\,\mathrm{ch}(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{\omega t})\ .$$

Per il teorema sopra la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{\omega t}$ ha ascissa di assoluta convergenza ω; la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ e $t \longrightarrow e^{-\omega t}$ ha ascissa di assoluta convergenza $-\omega$; quindi $H(t)\sin(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza $\leq \omega$.
Per $\xi \in \mathbf{R}$, $-\omega < \xi < \omega$ la funzione $t \longrightarrow e^{\omega t}$ non è integrabile su $[0,+\infty[$, mentre la funzione $t \longrightarrow e^{-\omega t}$ è integrabile su $[0,+\infty$; quindi la funzione $t \longrightarrow \mathrm{sh}(\omega t)$ non è integrabile su $[0,+\infty$. quindi $H(t)\,\mathrm{ch}(\omega t)$ ha ascissa di assoluta convergenza ω.
Sia $s \in \mathbf{C}$. $\Re c > \omega$. Si ha

$$\mathcal{L}H(s)\,\mathrm{ch}(\omega t) = \mathcal{L}H(s)\frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{\omega t}) == \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}) = \frac{s}{s^2-\omega^2}\ .$$

28.1.14 Trasformata di Laplace di u come funzione con restrizioni a semipiani limitate

Teorema 28.1.14.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $\sigma \in \mathbf{R}$*; sia* $\sigma > \lambda_a(u)$*; allora* $\mathcal{L}u$ *è limitata su*

$$\{s \in \mathbf{C}; \Re s \geq \sigma\} \ .$$

Enunciato

28.1.15 Limite 0 per $\Re s \to +\infty$ della trasformata di Laplace di u

Sia $A \subset \mathbf{C}$; supponiamo che per ogni $M \in \mathbf{R}$ esista $x \in A$ tale che $\Re x > M$; si $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia $l \in \mathbf{C}$; si dice che $f(z) \longrightarrow_{\Re \to +\infty} l$ se

$$(\forall U\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)(\exists M \in \mathbf{R})(\forall z \in A, \Re z > M)\ |f(z) - l| < \varepsilon \ .$$

Se esiste $l \in \mathbf{C}$ tale che $f(z) \longrightarrow_{\Re \to +\infty} l$ si dice che f è convergente per $\Re z \to +\infty$; in tal caso l è unico, si chiama limite di f per $\Re z \Rightarrow +\infty$ e si indica $\lim_{\Re z \to +\infty} f(z)$.

Teorema 28.1.15.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia u trasformabile secondo Laplace; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$*; allora* $\mathcal{L}u$ *è convergente per* $\Re z \Rightarrow +\infty$ *e si ha*

$$\lim_{\Re s \to +\infty} \mathcal{L}u(s) = 0 \ .$$

Enunciato

28.1.16 Limite della trasformata in un punto della retta di assoluta convergenza

Teorema 28.1.16.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia u trasformabile secondo Laplace; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $s_0 \in \mathbf{C}$*; supponiamo che l'integrale improprio* $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} u(t)\, dt$ *sia convergente; sia* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$*; sia*

$$A = \{s \in \mathbf{C}\ \Re s \geq \Re s_0, \mathrm{Am}(s - s_0) \in [-\theta, \theta] \ ;$$

allora per ogni $s \in A$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\, dt$ *è convergente e posto*

$$F : A \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} u(t)\, dt \ ,$$

si ha

$$\int_0^t e^{-st} u(t)\, dt \longrightarrow_{t \to +\infty} F(s) \ \textit{uniformemente su}\ A \ .$$

Enunciato

Teorema 28.1.16.2 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia u trasformabile secondo Laplace; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $s_0 \in \mathbf{C}$*; sia* $\Re(s_0) = \lambda_0$*; supponiamo che l'integrale improprio* $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}u(t)\,dt$ *sia convergente; sia* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$*; sia*

$$D = \{s \in \mathbf{C}\; \Re s > \Re s_0, \mathrm{Am}(s-s_0) \in [-\theta,\theta]\;;$$

allora si ha $\mathcal{F}u(s)|A$ *è convergente per* $s \to s_0$*; e si ha*

$$\lim_{s\to s_0, s\in A} \mathcal{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}u(t)\,dt\;.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

Osservazione 28.1.16.1 Per gli integrali impropri di funzioni non necessariamente positive vale il seguente criterio di convergenza.
Criterio di Dirichlet Sia $a \in \mathbf{R}$; siano f, $g : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^1; sia g continua; sia s la funzione integrale parziale dell'integrale improprio su di una semiretta positiva $\int_a^{+\infty} g$; sia f decrescente; sia $\lim_{+\infty} f = 0$; sia s limitata; allora l'integrale improprio su di una semiretta positiva $\int_a^{+\infty}(fg)$ è convergente.

28.1.17 Generalizzazione

Sia $u \in \mathcal{L}_{\rm Loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$.

La condizione $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$ può essere sostituita dalla condizione più generale

$$(\exists a \in \mathbf{R})\; \mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [a,+\infty[\;.$$

Possiamo dunque considerare la trasformata di Laplace di tali funzioni u.

28.1.18 Trasformata di Laplace della traslata di una funzione

Teorema 28.1.18.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\rm Loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $a \in \mathbf{R}$*; indichiamo con* $u(t-a)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow u(t-a)\;;$$

allora si ha

$$\mathrm{Supp}(u(t-a)\cdot\lambda \subset [a,+\infty[\;.$$

Enunciato

Teorema 28.1.18.2 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\rm Loc}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $a \in \mathbf{R}$*; indichiamo con* $u(t-a)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow u(t-a)\;;$$

allora si ha

1. $\lambda_a(u(t-a)) = \lambda_a(u)$;

2. *per ogni* $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda_a(u)$

$$\mathcal{L}(u(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(u)(s) \ .$$

Dimostrazione. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; la funzione $t \longrightarrow e^{-\xi t}u(t-a)$ è integrabile su $[a,+\infty[$ se e solo se la funzione $t' \longrightarrow e^{-\xi(t'+a)}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$.
Per ogni $t' \in [0,+\infty[$ si ha $e^{-\xi(t'+a)}u(t) = e^{-\xi a}e^{-\xi t'}$; quindi la funzione $t' \longrightarrow e^{-\xi(t'+a)}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$ se e solo se la funzione la funzione $t' \longrightarrow e^{-\xi t'}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; da ciò segue la prima affermazione.

Per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\Re s > \Re\alpha$ si ha

$$\mathcal{L}u(t-a)(s) = \int_a^{+\infty} e^{-st}u(t-a)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s(t'+a)}u(t')\,dt' =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(st'}e^{-sa)}u(t')\,dt' = e^{-sa)}\int_0^{+\infty} e^{-sa)}u(t')\,dt' = e^{-sa}\mathcal{L}u(s) \ .$$

28.1.19 Traslata della trasformata di Laplace

Teorema 28.1.19.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $\alpha \in \mathbf{C}$*; sia* $a \geq 0$*; indichiamo con* $e^{\alpha t}u(t)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{\alpha t}u(t) \ ;$$

allora si ha

1. $\lambda_a(e^{\alpha t}u(t)) = \lambda_a(u) + \Re\alpha$*;*
2. *per ogni* $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda_a(u) + \Re\alpha$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}u(t))(s) = \mathcal{L}(u)(s-\alpha) \ .$$

Dimostrazione. Sia

$$A_1 = \{\xi \in \mathbf{R}; e^{-\xi t}u(t) \text{ integrabile su } [0,+\infty[$$

e

$$A_2 = \{\xi \in \mathbf{R}; e^{-\xi t}e^{\alpha t}u(t) \text{ integrabile su } [0,+\infty[\ .$$

Si ha $\lambda_a(u) = \inf(A_1)$ e $\lambda_a(e^{\alpha t}u(t)) = \inf(A_2)$.
Per ogni $\xi \in A_2$, la funzione $e^{-\xi t}e^{\alpha t}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi la funzione $e^{-(\xi-\Re\alpha)t}|u(t)|$ è integrabile su $[0,+\infty[$; si ha quindi $\xi - \Re\alpha \in A_1$; quindi $\lambda_a(u) \leq \xi - \Re\alpha$; quindi $\lambda_a(u) + \Re\alpha \leq \xi$; quindi $\lambda_a(u) + \Re\alpha \leq \lambda_a(e^{\alpha t}u(t))$.
Per ogni $\xi \in A_1$, $e^{-(\xi t}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi $e^{-(\xi+\Re\alpha)t}e^{\Re\alpha t}|u(t)|$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi $e^{-(\xi+\Re\alpha)t}e^{\alpha t}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; si ha quindi $\xi + \Re\alpha \in A_2$; quindi $\lambda_a(e^{\alpha t}u(t)) \leq \xi + \Re\alpha$; quindi $\lambda_a(e^{\alpha t}u(t)) \leq \lambda_a(u) + \Re\alpha$.
Quindi $\lambda_a(e^{\alpha t}u(t)) = \lambda_a(u) + \Re\alpha$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\Re s > \lambda +_a (u) + \Re\alpha$ si ha

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}u(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}u(t)\,dt = \mathcal{L}(u)(s-\alpha) \ .$$

28.1.20 Trasformata di Laplace e omotetie

Teorema 28.1.20.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $c \in \mathbf{R}$*; sia* $c \geq 00$*; indichiamo con* $u(ct)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow u(ct)\ ;$$

allora si ha

1. $\lambda_a(u(ct)) = c\lambda_a(u)$;
2. *per ogni* $s \in \mathbf{C}$*,* $\Re s > c\lambda_a(u)$
$$\mathcal{L}(u(ct))(s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}(u)(\frac{s}{c})\ .$$

Dimostrazione. Sia

$$A_1 = \{\xi \in \mathbf{R}; e^{-\xi t}u(t) \text{ integrabile su } [0,+\infty[$$

e

$$A_2 = \{\xi \in \mathbf{R}; e^{-\xi t}e^{\alpha t}u(ct) \text{ integrabile su } [0,+\infty[\ .$$

Si ha $\lambda_a(u) = \inf(A_1)$ e $\lambda_a(u(ct)) = \inf(A_2)$.
Per ogni $\xi \in A_2$, la funzione $e^{-\xi t}u(ct)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi la funzione $e^{-(\xi\frac{t}{c}}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi la funzione $e^{-(\frac{\xi}{c}t}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; si ha quindi $\frac{\xi}{c} \in A_1$; quindi $\lambda_a(u) \leq \frac{\xi}{c}$; quindi $\lambda_a(u) \leq \frac{\lambda_a(u(ct))}{c}$; quindi $\lambda_a(u(ct)) \geq c\lambda_a(u)$.
Per ogni $\xi \in A_1$, $e^{-(\xi t}u(t)$ è integrabile su $[0,+\infty[$; quindi $e^{-(\xi ct}u(ct)|$ è integrabile su $[0,+\infty[$; si ha quindi $c\xi \in A_2$; quindi $\lambda_a(u(ct)) \leq c\xi$; quindi $\lambda_a(u(ct) \leq c\lambda_a(u)$.
Quindi $\lambda_a(u(ct)) = c\lambda_a(u)$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\Re s > c\lambda +_a (u)$ si ha

$$\mathcal{L}(u(ct))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-(s\frac{t'}{c}}u(t')\,dt =$$
$$\frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{s}{c}t}u(t')\,dt = \frac{1}{c}\mathcal{L}(u)\left(\frac{s}{c}\right)\ .$$

Osservazione 28.1.20.1 Si osservi che la condizione sul supporto contenuto in $[0,+\infty[$ impedisce a c di essere < 0.

28.2 Trasformata di Laplace di una funzione e derivata

28.2.1 Trasformata di Laplace della derivata

Nel teorema che segue si ricordi che che se $u \in \mathcal{W}^1(I;\mathbf{C})$, allora u è continua.

Teorema 28.2.1.1 *Sia* $u \in W^1_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$*; allora per ogni* $s \in \mathbf{C}$*,* $\Re s > \max(\{\lambda_a(u), \lambda_a(u')\})$ *si ha*

$$\mathcal{L}(u')(s) = s\mathcal{L}u(s)\ .$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbf{C}$; sia $\Re s > \max(\{\lambda_a(u), \lambda_a(u')\})$.
Essendo $u \in W^1_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$, u è continua; essendo $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$ si ha $u(x) = 0$ per ogni $x < 0$; si ha quindi $u(0) = \lim_{x\to 0, x<0} u(x) = 0$.
Si ha

$$\mathcal{L}u'(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}u'(t)\,dt =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left[e^{-st}u(t)\right]_0^x + s\int_0^x e^{-st}u(t)\,dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-sx}u(x) + s\int_0^x e^{-st}u(t)\,dt\right)\ .$$

Essendo $s > \lambda_a(u')$ tale limite esiste; essendo $s > \lambda_a(u)$ esiste anche $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-sx}u(t)\,dt$; quindi esiste $\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}u(x)$; sia $l = \lim_{x\to+\infty} e^{-sx}u(x)$; essendo $e^{-sx}u(x)$ integrabile, si ha $l = 0$.
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-sx}u(x) + s\int_0^x e^{-st}u(t)\,dt\right) = s\int_0^{+\infty} e^{-st}u(t)\,dt = s\mathcal{L}(u)(s)\ .$$

Nel teorema che segue si utilizza il fatto che se $u \in \mathcal{W}^n(I;\mathbf{C})$, allora u è è di classe C^{n-1}.

Teorema 28.2.1.2 *Sia* $n \in \mathbf{N}$*; sia* $u \in W^n_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; allora per ogni* $s \in \mathbf{C}$*,* $\Re s > \max(\{\lambda_a(u^{(k)});\ k = 0,1,\ldots,n\})$ *si ha*

$$\mathcal{L}(u^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}u(s)\ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

28.2.2 Trasformata di Laplace della derivata di una funzione di $\mathcal{W}^1_{\text{loc}}(]0,+\infty[;\mathbf{C})$

Teorema 28.2.2.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\text{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*; sia* $u|]0,+\infty[\in \mathcal{W}^1_{\text{loc}}(]0,+\infty[;\mathbf{C})$*; sia* $u(t)$ *convergente per* $t \to 0+$*; sia* u' *una derivata distribuzionale di* u *su* $]0,+\infty[$*; sia*

$$Du : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \begin{cases} u'(t) & \textit{per } t > 0 \\ 0 & \textit{per } t \le 0 \end{cases}\ ;$$

allora si ha

1. $Du \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*;*
2. $\text{Supp}(Du\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$*;*

3. *per ogni* $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \max(\{\lambda_a(u), \lambda_a(Du)\})$
$$\mathcal{L}(Du)(s) = s\mathcal{L}u(s) - u(0+) \ .$$

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione sopra; in tal caso però si ha
$$\left[e^{-st}u(t)\right]_0^x = e^{-sx}u(x) = u(0+) \ .$$

Osservazione 28.2.2.1 Si osservi che Du non è la derivata distribuzionale di u.

Questa è invece
$$D(u \cdot \lambda) = Du \cdot \lambda + (u(0+)\delta_0 \ .$$

L'affermazione segue anche dal teorema sulla trasformata di Laplace della derivata distribuzionale di una distribuzione.

28.2.3 Trasformata di Laplace della derivata di una funzione di $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[; \mathbf{C})$

Teorema 28.2.3.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $u|]0, +\infty[\in \mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[; \mathbf{C})$*; per ogni* $k = 0, 1, \ldots, n$ $u^{(k)}(t)$ *sia convergente per* $t \to 0+$*; sia* $u^{(n)}$ *una derivata distribuzionale* n*-esima di* u *su* $]0, +\infty[$*; sia*
$$D^n u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \begin{cases} u^{(n)}(t) & per\ t > 0 \\ 0 & per\ t \leq 0 \end{cases} \ ;$$
allora si ha

1. $D^n u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*;*
2. $\mathrm{Supp}(D^n u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*;*
3. *per ogni* $s \in \mathbf{C}$,
$$\Re s > \max(\{\lambda_a(D^k u);\ k = 0, 1, \ldots, n\})$$
si ha
$$\mathcal{L}(Du)(s) = s^n \mathcal{L}u(s) - \sum_{k=1}^{n} u^{(n-k}(0+)s^{n-k} \ .$$

Enunciato

28.2.4 Derivata della trasformata di Laplace

Teorema 28.2.4.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; indichiamo con* $tu(t)$ *la funzione*
$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow tu(t) \ ;$$
allora si ha

1. *$\lambda_a(tu(t)) = \lambda_a(u)$;*

2. *per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda_a(u)$*

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(u)(s) = -\mathcal{L}(tu(t))(s)\ .$$

Enunciato

Teorema 28.2.4.2 *Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0,+\infty[$; sia $n \in \mathbf{N}$; indichiamo con $t^n u(t)$ la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow t^n u(t)\ ;$$

allora si ha

1. *$\lambda_a(t^n u(t)) = \lambda_a(u)$;*

2. *per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda_a(u)$*

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(u)(s) = (-1)^n\mathcal{L}(t^n u(t))(s)\ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

Esercizio. Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ -x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{per } x > 1 \end{cases}\ ;$$

1. determinare l'ascissa di assoluta convergenza e la trasformata di Laplace di f;
2. determinare l'ascissa di assoluta convergenza e la trasformata di Laplace della funzione $xf(x)$.

Risoluzione.

1. Sia $\xi \in \mathbf{R}$; l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-\xi x}f(x)\,dx$ è convergente se e solo se $\int_1^{+\infty} e^{-\xi x}f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} -e^{-\xi x}\,dx$ è convergente; ciò avviene se e solo se se e solo se $\xi > 0$; Si ga quindi $\lambda_a(f) = 0$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-sx}f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-sx}f(x)\,dx =$$
$$\int_0^1 e^{-sx}(-x)\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-sx}(-1)\,dx = -\int_0^1 xe^{-sx}\,dx - \int_1^{+\infty} e^{-sx}\,dx =$$
$$-\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{s}e^{-sx}\,dx\right) - \lim_{y\to+\infty}\int_1^y e^{-sx}\,dx =$$
$$\left[\frac{1}{s}e^{-sx}x\right]_0^1 - \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-sx}\,dx - \lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_1^y =$$
$$\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}\left[\frac{-1}{s}e^{-sx}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\lim_{y\to+\infty}(e^{-sy} - e^{-s}) =$$
$$\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1) + -\frac{1}{s}e^{-s} = \frac{e^{-s} - 1}{s^2}\ .$$

La trasformata di Laplace di f è quindi

$$\mathcal{L}f : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{e^{-s} - 1}{s^2}\ .$$

2. Per il teorema sopra di ha $\lambda_a(xf(x)) = \lambda_a(f) = 0$.
   Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\mathcal{L}(xf(x))(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}f(s) = -\frac{e^{-s}(-1)s^2 - 2s(e^{-s}-1)}{s^4} =$$
$$-\frac{-se^{-s})s - 2e^{-s} + 2}{s^3} = \frac{se^{-s})s + 2e^{-s} = 2}{s^3} .$$
   La trasformata di Laplace di $xf(x)$ è quindi
$$\mathcal{L}(xf(x)) : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{se^{-s})s + 2e^{-s} = 2}{s^3} .$$

Esercizio. Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*_+$, con $\alpha \neq \beta$; siano $\mu, \nu \in \mathbf{R}^*_+$, $\mu > \nu$; sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che per ogni $t \in \mathbf{R}^*$,
$$f(t) = \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t}$$
e $f(0)$ sia il prolungamento continuo di $\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\beta t)}{t}$, $t \in \mathbf{R}^*$, in 0;

1. determinare la trasformata di Laplace di $H(t)f(t)$;
2. provare che l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t}\, dt$$
   dove per $t = 0$ la funzione è uguale al prolungamento continuo di $\frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t}$, con $x \in]0, +\infty]$, in 0, è convergente e determinarne il valore.

Risoluzione.

1. Si ha
$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 - 1 + \frac{1}{2}\beta^2 t^2 + \mathrm{o}(t^2)}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} (-\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2)t = 0 .$$
   Si ha quindi
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \begin{cases} \frac{\cos(\alpha t)-\cos(\beta t)}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases} .$$
   Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha
$$(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)) = tH(t)f(t) .$$
   Si ha $\lambda_a(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t) \leq 0$ e per $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)(s) = \mathcal{L}(H(t)\cos(\alpha t) - H(t)\cos(\beta t)(s) =$$
$$\mathcal{L}(H(t)\cos(\alpha t))(s) - \mathcal{L}(H(t)\cos(\beta t)(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2} - \frac{s}{s^2+\beta^2} .$$
   Si ha $\lambda_a(tH(t)f(t) = \lambda_a(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)$ e
$$\mathcal{L}(tH(t)f(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(H(t)f(t)) .$$
   Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha quindi
$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)(s) = \mathcal{L}(tH(t)f(t))(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(H(t)f(t))(s) .$$

Quindi
$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(H(t)f(t))(s) = -\frac{s}{s^2+\alpha^2} + \frac{s}{s^2+\beta^2} \ .$$
Sia
$$T = \{s \in \mathbf{C};\ \Im s = 0, \Re s < 0\} \ ,$$
di modo che $\mathbf{C}$ tagliato sia $\mathbf{C} - T$.
Per $z \in \mathbf{C}$, si ha $z^2+\alpha^2 \in T$ se e solo se esiste $x \leq 0$ tale che $z^2+\alpha^2 = x$, cioè tale che $z^2 = x - \alpha^2$, cioè tale che $z = \pm\sqrt{-x+\alpha^2}i$. Quindi se $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$, si ha $s \notin T$. Da ciò segue che $\frac{1}{2}\log(s^2+\alpha^2)$ è una primitiva di $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ su $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\}$.
Analogamente si vede che $\frac{1}{2}\log(s^2+\beta^2)$ è una primitiva di $\frac{s}{s^2+\beta^2}$ su $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\}$.
Esiste quindi $C \in \mathbf{C}$ tale che per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\mathcal{L}(H(t)f(t))(s) = -\frac{1}{2}\log(s^2+\alpha^2) + \frac{1}{2}\log(s^2+\beta^2) + C = \frac{1}{2}(\log(s^2+\beta^2) - \log(s^2+\alpha^2) + C \ .$$
Proviamo che per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} = \log(s^2+\beta^2) - \log(s^2+\alpha^2) \ .$$
Per $z \in \mathbf{C}$, si ha $\frac{z^2+\beta^2}{z^2+\alpha^2} \in T$ se e solo se esiste $x \leq 0$ tale che $\frac{z^2+\beta^2}{z^2+\alpha^2} = x$, cioè tale che $z^2+\beta^2 = xz^2 + x\alpha^2$, cioè tale che $z^2(1-x) = x\alpha^2 - \beta^2$, cioè tale che $z^2 = \frac{x\alpha^2-\beta^2}{1-x}$, cioè tale che $z = \pm\sqrt{\frac{\beta^2-x\alpha^2}{1-x}}i$. Quindi se $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$, si ha $\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} \notin T$.
Da ciò segue che $\frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}$ è una funzione analitica su $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\}$.
Per quanto visto sopra $\log(s^2+\beta^2) - \log(s^2+\alpha^2)$ è una funzione analitica su $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > 0\}$.
Per ogni $t \in \mathbf{R}_+^*$ si ha
$$\log\frac{t^2+\beta^2}{t^2+\alpha^2} = \log(t^2+\beta^2) - \log(t^2+\alpha^2) \ .$$
Quindi per le proprietà delle funzioni analitiche per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s < 0$ si ha
$$\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} = \log(s^2+\beta^2) - \log(s^2+\alpha^2) \ .$$
Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha quindi
$$\mathcal{L}(H(t)f(t))(s) = \frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} + C \ .$$
Si ha
$$\lim_{\Re s \to +\infty} \frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} + C = \frac{1}{2}\log 1 + C = C \ .$$
Quindi si ha $C = 0$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha quindi
$$\mathcal{L}(H(t)f(t))(s) = \frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} \ .$$
Per $s = \beta i + t$, con $t > 0$, si ha
$$\lim_{t\to 0}\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2} = \frac{(\beta i+t)^2+\beta^2}{(\beta i+t)^2+\alpha^2} = \frac{-\beta^2+2\beta t+t^2+\beta^2}{-\beta^2+2\beta t+t^2+\alpha^2} = \frac{2\beta t+t^2}{2\beta t+t^2+\alpha^2-\beta^2} = 0 \ .$$
Quindi non esiste in $\mathbf{C}$ $\lim_{s\to\beta i}\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}$.

Quindi la funzione analitica $\frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}$, $s \in \{z \in \mathbf{R};\ \Re z > 0\}$ non è prolungabile per continuità in βi; da ciò segue che $\lambda_a(H(t)f(t)) \leq 0$; quindi $\lambda_a(H(t)f(t)) = 0$.
Si ha quindi

$$\mathcal{L}(H(t)f(t)) : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{2}\log\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}\ .$$

2. Si ha

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t} = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{\mu t \nu t}{t} = \lim_{t\to 0, t\neq 0} (\mu\nu t) = 0\ .$$

Posto

$$g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \begin{cases} \frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}\ ,$$

si chiede di provare che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ è convergente e di calcolare il valore dell'integrale.
Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sin(\mu t)\sin(\nu t) = \frac{1}{2}\left(\cos((\mu-\nu)t) - \cos((\mu+\nu)t)\right)\ .$$

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $|\sin(\mu t)\sin(\nu t)| = |\sin(\mu t)|\ |\sin(\nu t)| \leq 1$; quindi la funzione $\sin(\mu t)\sin(\nu t)$, $t \in [0,+\infty[$ è limitata.
Per ogni $x \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ si ha

$$\left|\int_0^x \sin(\mu t)\sin(\nu t)\,dt\right| = \left|\int_0^x \frac{1}{2}\left(\cos((\mu-\nu)t) - \cos((\mu+\nu)t)\right)\,dt\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu-\nu}\sin((\mu-\nu)t) - \frac{1}{\mu+\nu}\sin((\mu+\nu)t)\right]_0^x\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\mu-\nu}\sin((\mu-\nu)x) - \frac{1}{\mu+\nu}\sin((\mu+\nu)x)\right| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu-\nu}|\sin((\mu-\nu)x)| + \frac{1}{\mu+\nu}|\sin((\mu+\nu)x)|\right) \leq\ .$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu-\nu} + \frac{1}{\mu+\nu}\right)\ .$$

Quindi esiste la funzione $\int_0^x \sin(\mu t)\sin(\nu t)\,dt$ è limitata.
Si ha $\lim_{t\to+\infty, t\in]0,+\infty[} \frac{1}{t} = 0$ e la funzione $\frac{1}{t}$, $t \in]0.+\infty[$ è decrescente.
Quindi per il criterio di Dirichlet l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t}\,dt\ .$$

è convergente.
Quindi l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t}\,dt$$

è convergente.
Si ha $\mu - \nu \neq \mu + \nu$. Per quanto visto sopra, per ogni $s \in \mathbf{R}_+^*$ l'integrale di Lebesgue

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos((\mu-\nu)t) - \cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt$$

è convergente (cioè l'integrale improprio è assolutamente convergente) e si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log\frac{s^2+(\mu+\nu)^2}{s^2+(\nu-\nu)^2}\ .$$

Si ha

$$\lim_{s\to 0, s\in R_+^*} e^{-st}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t} = \frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\ .$$

Per il teorema sopra la funzione $\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt$, $s\in]0,+\infty[$ è convergente in $\mathbf{C}$ per $s\to 0$ e si ha

$$\lim_{s\to 0, s\in R_+^*}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt =$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt\ .$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt = \lim_{s\to 0, s\in R_+^*}\frac{1}{2}\log\frac{s^2+(\mu+\nu)^2}{s^2+(\nu-\nu)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{(\mu+\nu)^2}{(\nu-\nu)^2} = \log\frac{\mu+\nu}{\nu-\nu}\ .$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\mu t)\sin(\nu t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos((\mu-\nu)t)-\cos((\mu+\nu)t)}{t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\mu+\nu}{\nu-\nu}\ .$$

28.2.5 Trasformata di Laplace della funzione $H(t)t^n$

Teorema 28.2.5.1 *Sia $n\in\mathbf{N}$; indichiamo con $H(t)t^n$ la funzione*

$$\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}, t\longrightarrow H(t)t^n\ ;$$

allora si ha

1. *l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)t^n$ è 0;*
2. *$(\forall s\in\mathbf{C}, \Re s>0\ \mathcal{L}(H(t)t^n))(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.*

Dimostrazione. Per il teorema sopra l'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)t^n$ è uguale all'ascissa di assoluta convergenza di $H(t)$, cioè 0.

Per ogni $s\in\mathbf{C}$,
$Res>0$ si ha

$$\mathcal{L}(t^nH(t))(s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}H(s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}s^{-1} =$$

$$(-1)^n(-1)^n n! s^{-1-n} = \frac{n!}{s^{n+1}}\ .$$

28.3 Trasformata di Laplace e convoluzione di funzioni

28.3.1 Convoluzione di due funzioni di supporto incluso in $[0.+\infty[$

Teorema 28.3.1.1 *Siano* $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\text{Supp}(v \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; allora per quasi* $x \in \mathbf{R}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, y \longrightarrow u(x-y)v(y)$$

è integrabile.

Enunciato

Definizione 28.3.1.1 *Siano* $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\text{Supp}(v \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; si pone*

$$u * v : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, x \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)v(y)\, dy\ .$$

$u * v$ si chiama convoluzione di u e di v.

Teorema 28.3.1.2 *Siano* $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(v \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; allora si ha* $u * v \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$ *e* $(\forall x \in \mathbf{R}$ *si ha*

$$(u*v)(x) \begin{cases} 0 & per\ x < 0 \\ \int_0^x u(x-y)v(y)\, dy & per\ x \geq 0 \end{cases} .$$

Enunciato

28.3.2 Trasformata di Laplace e convoluzione di funzioni

Teorema 28.3.2.1 *Siano* $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\text{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\text{Supp}(v \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; allora si ha*

1. $\lambda_a(u * v) \leq \max(\{\lambda_a(u), \lambda_a(v)\})$*;*

2. $(\forall s \in \mathbf{C})$, $\Re s > \max(\{\lambda_a(u), \lambda(v)\})$

$$\mathcal{L}(u*v)(s) = (\mathcal{L}(u)(s))(\mathcal{L}(v)(s))\ .$$

Enunciato

28.4 La trasformata di Laplace di una distribuzione

28.4.1 Ascissa di convergenza di una distribuzione

Teorema 28.4.1.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; per ogni* $s \in \mathbf{C}$ *indichiamo con* e^{-st} *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-st} \; ;$$

allora esiste uno ed uno solo $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ *tale che*

1. $(\forall s \in \mathbf{C},\ \Re s > \lambda)\ e^{-st}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}),\ \Re s < \lambda)\ e^{-st} \notin \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*.*

Enunciato

Definizione 28.4.1.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; per ogni* $\sigma \in \mathbf{C}$ *indichiamo con* e^{-st} *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-st} \; ;$$

allora l'unico $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ *tale che*

1. $(\forall s \in \mathbf{C}),\ \Re s > \lambda)\ e^{-st}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C}),\ \Re s < \lambda)\ e^{-st} \notin \mathcal{S}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*.*

si chiama ascissa di convergenza di T *e si indica* $\lambda(T)$*.*

Osservazione 28.4.1.1 Sia $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia $\mathrm{Supp}(\lambda u) \subset [0,+\infty[$; allora si ha

$$\lambda(u \cdot \lambda) \leq \lambda_a(u) \; .$$

Può essere $\lambda(u \cdot \lambda) < \lambda_a(u)$.

28.4.2 Distribuzione trasformabile secondo Laplace

Definizione 28.4.2.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; si dice che* T *è trasformabile secondo Laplace se* $\lambda(T) \neq +\infty$*..*

28.4.3 Trasformata di Fourier di $e^{-\sigma t}T$

Teorema 28.4.3.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $\xi \in \mathbf{R}$*; sia* $\xi\lambda(T)$ *indichiamo con* $e^{-\xi t}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-\xi t} \; ;$$

allora esiste una ed una sola $f \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$ *tale che*

$$\mathcal{F}(e^{-\xi t}T) = f \cdot \lambda \; .$$

Enunciato
Si dice che f è la funzione trasformata di Fourier di $e^{-\sigma t}T$.
Identificheremo a volte la distribuzione $\mathcal{F}(e^{-\xi t}T)$ con la funzione f.

28.4.4 Trasformata di Laplace di una distribuzione in un punto

Definizione 28.4.4.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $s \in \mathbf{C}$*; sia* $\xi = \Re s$*; sia* $\eta = \Im s$*; sia* $\xi > \lambda(T)$ *indichiamo con* $e^{-\xi t}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-\xi t} \ ;$$

sia $f \in C(\mathbf{R};\mathbf{C})$ *la funzione trasformata di Fourier di* $e^{-\xi t}T$*; poniamo*

$$\mathcal{L}T(s) = f\left(\frac{\eta}{2\pi}\right) \ .$$

Indicando f con $\mathcal{F}(e^{\xi t}T)$ si ha dunque

$$\mathcal{L}T(s) = \mathcal{F}(e^{\xi t}T)\left(\frac{\eta}{2\pi}\right) \ .$$

28.4.5 Trasformata di Laplace di una distribuzione

Definizione 28.4.5.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; la funzione*

$$\mathcal{L}T : \{\xi \in \mathbf{C};\ \Re\xi > \lambda(T)\} \longrightarrow \mathbf{C}, \xi \longrightarrow \mathcal{L}T(\xi)$$

si chiama trasformata di Laplace della distribuzione T*.*

28.4.6 Analiticità della trasformata di Laplace

Teorema 28.4.6.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; allora* $\mathcal{L}T$ *è una funzione analitica.*

Enunciato

Teorema 28.4.6.2 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $\xi \in \mathbf{R}$*; sia* $\xi > \lambda(T)$*; indichiamo con* $e^{-\xi t}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{-\xi t} \ ;$$

sia f *la funzione trasformata di Fourier di* $e^{-\xi t}T$*; sia*

$$g : \{\xi + i\eta;\ \eta \in \mathbf{R}\} \longrightarrow \mathbf{C}, (\xi + i\eta) \longrightarrow f\left(\frac{\eta}{2\pi}\right) \ ;$$

allora g *è prolungabile a* $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda(T)\}$ *in una funzione analitica e il prolungamento è la trasformata di Laplace di* T*.*

Enunciato

28.4.7 Trasformata di Laplace sulle distribuzioni

Definizione 28.4.7.1 *Sia* $\mathcal{A}$ *l'insieme delle funzioni analitiche da un aperto di* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{C}$*; la funzione*

$$\mathcal{L} : \{T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C});\ \mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[\} \longrightarrow \mathcal{A}, T \longrightarrow \mathcal{L}T$$

si chiama trasformata di Laplace sulle distribuzioni.

28.4.8 Trasformata di Laplace di una funzione u e della distribuzione $u \cdot \lambda$

Teorema 28.4.8.1 *Sia* $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* $\operatorname{Supp}(\lambda u) \subset [0, +\infty[$*; allora la trasformata di Laplace* $\mathcal{L}(u \cdot \lambda)$ *della distribuzione* $u \cdot \lambda$ *è un prolungamento analitico della trasformata di Laplace* $\mathcal{L}u$ *della funzione localmente integrabile* u*.*

Dimostrazione. Immediata.

28.4.9 Generalizzazione

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$.

La condizione $\operatorname{Supp}(T) \subset [0, +\infty[$ può essere sostituita dalla condizione più generale

$$(\exists a \in \mathbf{R}) \operatorname{Supp}(T) \subset [a, +\infty[\ .$$

Possiamo dunque considerare la trasformata di Laplace di tali distribuzioni u.

28.4.10 Trasformata di Laplace di una distribuzione a supporto compatto

Teorema 28.4.10.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* T *a supporto compatto; allora si ha* $\lambda(T) = -\infty$*.*

Dimostrazione. Infatti per ogni $\xi \in \mathbf{R}$, $e^{-\xi t}T$ è una distribuzione a supporto compatto e quindi appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$.

La trasformata di Laplace di T è quindi una funzione analitica su $\mathbf{C}$.

Teorema 28.4.10.2 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$*; sia* T *a supporto compatto; sia* g *la funzione analitica trasformata di Fourier di* T*; sia* f *la funzione analitica trasformata di Laplace di* T*; allora si ha*

$$(\forall s \in \mathbf{C}) \ f(s) = g(-i\frac{s}{2\pi}); .$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbf{C}$; sia $\xi = \Re s$; sia $\eta = \Im s$. Si ha

$$f(s) = \mathcal{L}T(s) = \mathcal{F}(e^{-\xi t}T)(\frac{\eta}{2\pi}) = \mathcal{F}(e^{2\pi i \frac{\xi}{-2\pi i} t}T)(\frac{\eta}{2\pi}) =$$

$$\mathcal{F}T(\frac{\eta}{2\pi} + \frac{\xi}{-2\pi i}) = g(\frac{\eta - i\xi}{2\pi}) =$$

$$g(i\frac{-i\eta - \xi}{2\pi}) = g(-i\frac{s}{2\pi}) \ .$$

28.4.11 Trasformata di Laplace della traslata di una distribuzione

Teorema 28.4.11.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $a \in \mathbf{R}$*; allora si ha*

1. $\lambda(\gamma(a)T)) = \lambda(T)$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C})$, $\Re s > \lambda(T)$
$$\mathcal{L}(\gamma(a)T)(s) = e^{as}\mathcal{L}T(s)\ .$$

Enunciato

28.4.12 Traslata della trasformata di Laplace di una distribuzione

Teorema 28.4.12.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $\alpha \in \mathbf{C}$*; indichiamo con* $e^{\alpha t}$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow e^{\alpha t}\ ;$$

allora si ha

1. $\lambda(e^{\alpha t}T) = \lambda(T) + \Re\alpha$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C})$, $\Re s > \lambda(T) + \Re\alpha$
$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}T)(s) = (\mathcal{L}T)(s-\alpha)\ .$$

Enunciato

28.4.13 Trasformata di Laplace di una distribuzione e omotetie

Teorema 28.4.13.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; sia* $c \in \mathbf{R}$*; sia* $c > 0$*; per ogni* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$*, indichiamo con* $f(ct)$ *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow f(ct)\ ;$$

indichiamo con $T(ct)$ *la distribuzione*

$$\mathcal{D}(\mathbf{R};\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}, f \longrightarrow T(f(ct))\ ;$$

allora si ha

1. $\lambda(T(ct)) = c\lambda(T)$;
2. $(\forall s \in \mathbf{C})$, $\Re s > c\lambda(T)$
$$\mathcal{L}(T(ct))(s) = \frac{1}{c}(\mathcal{L}T)(\frac{s}{c})\ .$$

Enunciato

28.4.14 Trasformata di Laplace della derivata di una distribuzione

Teorema 28.4.14.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; allora* T *è trasformabile secondo Laplace se e solo se* T' *è trasformabile secondo Laplace e in tal caso si ha*

$$\lambda(T') \leq \lambda(T) .$$

Enunciato

Teorema 28.4.14.2 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; allora per ogni* $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda(T)$ *si ha*

$$\mathcal{L}(T')(s) = s\mathcal{L}T(s) .$$

Enunciato

Teorema 28.4.14.3 *Sia* $n \in \mathbf{N}$*; sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; allora per ogni* $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda(T)$ *si ha*

$$\mathcal{L}(T^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}T(s) .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sopra.

28.4.15 Derivata della trasformata di Laplace di una distribuzione temperata

Teorema 28.4.15.1 *Sia* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$*; sia* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0,+\infty[$*; indichiamo con* t *la funzione*

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow t ;$$

allora si ha

1. $\lambda(tT) = \lambda(T)$*;*
2. $(\forall s \in \mathbf{C})$, $\Re s > \lambda(T)$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(T)(s) = -\mathcal{L}(tT)(s) .$$

Enunciato

28.4.16 Trasformata di Laplace della distribuzione δ_0 e di $(\delta_0)'$

Teorema 28.4.16.1 *Si ha*

$$\mathcal{L}\delta_0 = 1 ,$$

dove

$$1 : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow 1 .$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\mathcal{F}(\delta_0) = \lambda$, cioè la funzione 1.

Teorema 28.4.16.2 *Si ha*

$$\mathcal{L}(\delta_0') = 1_C \ ,$$

dove

$$1_C : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow s \ .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema sulla trasformata di Laplace della derivata.

28.5 Antitrasformata di Laplace

28.5.1 Antitrasformata di Laplace

Definizione 28.5.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; si dice che f ammette antitrasformata di Laplace se esiste $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ con* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0, +\infty[$*, se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che*

1. $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\} \subset A$,
2. $\lambda(T) \leq \lambda$,
3. $\mathcal{L}T|\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda\} = f|\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\}$.

Teorema 28.5.1.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; allora f ammette antitrasformata di Laplace se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, esiste $M \in \mathbf{R}_+^*$, esiste $m \in \mathbf{Z}$ tali che*

1. $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\} \subset A$,
2. $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > \lambda)\ |f(s)| \leq M(1 + |s|)^m$.

Enunciato

Teorema 28.5.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta antitrasformata di Laplace; allora esiste una ed una sola $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ con* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0, +\infty[$*, tale che esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che*

1. $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\} \subset A$,
2. $\lambda(T) \leq \lambda$,
3. $\mathcal{L}T|\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda\} = f|\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\}$.

Enunciato

Definizione 28.5.1.2 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta antitrasformata di Laplace; allora l'unica $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\mathbf{C})$ con* $\mathrm{Supp}(T) \subset [0, +\infty[$*, tale che esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che*

1. $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\} \subset A$,

2. $\lambda(T) \leq \lambda$,

3. $\mathcal{L}T|\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda\} = f|\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\}$,

si chiama antitrasformata di Laplace di f e si indica con $\mathcal{L}^{-1}f$.

Osservazione 28.5.1.1 Il teorema si può generalizzare considerando distribuzioni T con supporto inferiormente limitato.
In tal caso la condizione diventa

$$|f(s)| \leq e^{-as} M(1 + |s|)^m$$

per un $a \in \mathbf{R}$; si ha allora $\mathrm{Supp}(T) \subset [a, +\infty[$.

28.5.2 Distribuzioni uguali e trasformata di Laplace

Teorema 28.5.2.1 *Siano $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}; \mathbf{C})$; sia $\mathrm{Supp}(T) \subset [0, +\infty[$; sia $\mathrm{Supp}(S) \subset [0, +\infty[$; sia $\lambda \in \mathbf{R}$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$T = S$;*

2. *$\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$;*

3. *se $\lambda \geq (\max(\{\lambda(S), \lambda(T)\})$, allora per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda$ $\mathcal{L}T(s) = \mathcal{T}(s)$.*

Dimostrazione. Segue da sopra.

28.5.3 Antitrasformata e derivate

Teorema 28.5.3.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta antitrasformata di Laplace; sia $p \in \mathbf{N}^*$; indichiamo con $\frac{f(s)}{s^p}$ la funzione*

$$A - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{f(s)}{s^p}\ .$$

allora $\frac{f(s)}{s^p}$ ammette antitrasformata di Laplace e si ha

$$\mathcal{L}^{-1}f = D^p \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{f(s)}{s^p}\right)\ .$$

Dimostrazione. Poichè f ammette antitrasformata di Laplace esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, esiste $M \in \mathbf{R}_+^*$, esiste $m \in \mathbf{N}$ tali che $\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \lambda\} \subset A$, e $(\forall s \in \mathbf{C}, \Re s > \lambda)$ $|f(s)| \leq M(1 + |s|)^m$.
Sostituendo eventualmente λ con $\max(\{\lambda, 1\})$, possiamo supporre $\lambda > 1$; per $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 1$ si ha quindi

$$\left|\frac{f(s)}{s^p}\right| \leq |f(s)| \leq M(1 + |s|)^m\ .$$

Quindi $\frac{f(s)}{s^p}$ ammette antitrasformata di Laplace.

Esiste $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tale che $\{s \in \mathbf{C};\ \Re s > \lambda\} \subset A$, $\lambda(\mathcal{L}^{-1} f) \leq \lambda_1$, $\lambda(\mathcal{L}^{-1}(\frac{f(s)}{s^p}) \leq \lambda_1$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \lambda_1$ si ha

$$\mathcal{L}(D^p \mathcal{L}^{-1}(\frac{f(s)}{s^p}))(s) = s^p \mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{f(s)}{s^p})(s) = s^p \frac{f(s)}{s^p} = f(s) \ .$$

28.5.4 Espressione dell'antitrasformata

Teorema 28.5.4.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; sia $\mu \in \mathbf{R}$; sia*

$$\{s \in \mathbf{C}; \Re s > \mu\} \subset A\} \ ;$$

supponiamo che esista $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, che esista $M' \in \mathbf{R}_+^*$ tali che per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \mu$, sia

$$|f(s)| \leq M' \frac{1}{|s|^\alpha} \ ;$$

per ogni $a, b \in \mathbf{C}$ sia $[a, b]$ il segmento orientato di punto iniziale a e punto finale b; sia $x \in \mathbf{R}$; sia $x > \mu$; allora si ha

1. *f ammetta antitrasformata di Laplace;*

2. *per ogni $t \in \mathbf{R}$ la funzione*

$$\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{C}, R \longrightarrow \int_{[x-iR, x+iR]} e^{zt} f(z)\, dz$$

   è convergente per $R \to +\infty$;

3. *posto per ogni $t \in \mathbf{R}$*

$$\int_{x-\infty i}^{x+\infty i} e^{zt} f(z)\, dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{[x-iR, x+iR]} e^{zt} f(z)\, dz$$

   e

$$u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{x-\infty i}^{x+\infty i} e^{zt} f(z)\, dz$$

   si ha

   (a) u è continua,
   (b) $\mathrm{Supp}(u \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$ *è inferiormente limitato,*
   (c) $\mathcal{L}^{-1} f = u \cdot \lambda$.

Enunciato

28.5.5 Antitrasformata come funzione

Definizione 28.5.5.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta antitrasformata di Laplace; sia $g \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(g \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; si dice che g è un'antitrasformata di Laplace di f se $g \cdot \lambda$ è l'antitrasformata di Laplace di f.*

Osservazione 28.5.5.1 Se g è un'antitrasformata di Laplace di f, lo è anche ogni funzione uguale a g quasi dappertutto.
Se esiste $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, se esiste $\mu \in \mathbf{R}$, se esiste $M' \in \mathbf{R}_+^*$ tali che per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > \mu$, sia

$$|f(s)| \leq M' \frac{1}{|s|^\alpha}$$

(cioè se esiste $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$ tale che $f(s) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^\alpha}\right)$ per $\Re s \to +\infty$) allora esiste g continua tale che g è antitrasformata di Laplace di f.
g è l-unica funzione continua che è antitrasformata di Laplace di f. In tal caso si dice che g è l'antitrasformata di Laplace di f.

28.5.6 Alcune funzioni antitrasformate

Teorema 28.5.6.1 *Sia*

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{s} ;$$

allora un'antitrasformata di f è la funzione di Heaviside H.

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 28.5.6.2 *Sia $\alpha \in \mathbf{C}$;*

$$f : \mathbf{C} - \{\alpha\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{s - \alpha} ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t)e^{\alpha t} ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 28.5.6.3 *Sia $\omega \in \mathbf{R}_+^*$; sia*

$$f : \mathbf{C} - \{i\omega, -i\omega\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t) \sin(\omega t) ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Osservazione 28.5.6.1 Si noti il fatto che g è continua.

Teorema 28.5.6.4 *Sia $\omega \in \mathbf{R}_+^*$; sia*

$$f : \mathbf{C} - \{i\omega, -i\omega\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \ ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t) \cos(\omega t) \ ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 28.5.6.5 *Sia $\omega \in \mathbf{R}_+^*$; sia*

$$f : \mathbf{C} - \{\omega, \omega\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \ ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t) \operatorname{sh}(\omega t) \ ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Osservazione 28.5.6.2 Si noti il fatto che g è continua.

Teorema 28.5.6.6 *Sia $\omega \in \mathbf{R}_+^*$; sia*

$$f : \mathbf{C} - \{\omega, \omega\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{s}{s^2 - \omega^2} \ ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t) \operatorname{ch}(\omega t) \ ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Teorema 28.5.6.7 *Sia $n \in \mathbf{N}$; sia*

$$f : \mathbf{C} - \{\omega, \omega\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \ ;$$

allora un'antitrasformata di f è

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow H(t) t^n \ ; .$$

Dimostrazione. Immediata.

Osservazione 28.5.6.3 Si noti il fatto che per $n \neq 0$, g è continua.

28.5.7 Antitrasformata di $e^{-as}f(s)$

Teorema 28.5.7.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta funzione antitrasformata di Laplace; sia $g \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(g \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; supponiamo che g sia un'antitrasformata di f; sia $a \in \mathbf{R}$; indichiamo con $e^{-as}f(s)$ la funzione*

$$A \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow e^{-as}f(s) \ ;$$

allora $e^{-as}f(s)$ ammette antitrasformata e un'antitrasformata di $e^{-as}f(s)$ è la funzione

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(t-a) \ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\mathcal{L}(h) = e^{-as}\mathcal{L}(g)(s) = e^{-as}f(s)$.

28.5.8 Antitrasformata di $f(s-\alpha)$

Teorema 28.5.8.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f ammetta funzione antitrasformata di Laplace; sia $g \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(g \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; supponiamo che g sia un'antitrasformata di f; sia $\alpha \in CC$; indichiamo con $f(s-\alpha)$ la funzione*

$$\alpha + A \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow f(s-\alpha) \ ;$$

allora $f(s-\alpha)$ ammette antitrasformata e un'antitrasformata di $f(s-\alpha)$ è la funzione

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow e^{\alpha t}g(t) \ .$$

Dimostrazione. Si ha infatti $\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(g)(s-\alpha) = f(s-\alpha)$.

28.5.9 Antitrasformata di un prodotto

Teorema 28.5.9.1 *Sia $A \subset \mathbf{C}$; sia A aperto; siano $f, f_1 : A \longrightarrow \mathbf{C}$; sia f analitica; supponiamo che f, f_1 ammettano funzioni antitrasformata di Laplace; siano $g, g_1 \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$; sia* $\mathrm{Supp}(g \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; sia* $\mathrm{Supp}(g_1 \cdot \lambda) \subset [0, +\infty[$*; supponiamo che g sia un'antitrasformata di f; supponiamo che g_1 sia un'antitrasformata di f_1; allora fg ammette antitrasformata e un'antitrasformata di $f \cdot f_1$ è la convoluzione $g * g_1$ di g e di g_1*

Dimostrazione. Si ha infatti $\mathcal{L}(g * g_1) = \mathcal{L}(g)\mathcal{L}(g_1) = f \cdot f_1$.

Esercizio. Sia

$$F : \mathbf{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{(s-1)^2} \ ;$$

provare che f ammette funzione antitrasformata di Laplace e trovare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$, con $\mathrm{Supp}(f) \subset [0, +\infty[$ che sia antitrasformata di F.

Risoluzione. Posto

$$G : \mathbf{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{s^2} \ ,$$

per ogni $s \in \mathbf{C}$, $s \neq 1$ si ha $F(s) = G(s-1)$.
La funzione G ammette funzione antitrasformata di Laplace continua $\mathcal{L}^{-1}(G)$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(G)(t) = H(t)t \ .$$

Quindi F ammette funzione antitrasformata di Laplace continua $\mathcal{L}^{-1}(F)$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = H(t)te^t \ .$$

Esercizio. Sia

$$F : \mathbf{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \ ;$$

provare che f ammette funzione antitrasformata di Laplace e trovare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$, con $\mathrm{Supp}(f) \subset [0, +\infty[$ che sia antitrasformata di F.

Risoluzione. Si ha $s^2 - 3s + 1 = (s-1)(s-2)$.
Scomponendo $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$ in fratti semplici, si trova

$$\frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \ .$$

La funzione $\frac{1}{s-2}$ ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è

$$g_1(t) = H(t)e^{2t} \ .$$

La funzione $\frac{1}{s-1}$ ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è

$$g_2(t) = H(t)e^t \ .$$

Quindi la funzione F ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è

$$g_1(t) - g_2(t) = H(t)(e^{2t} - e^t) \ .$$

Tale funzione è l'unica antitrasformata di Laplace continua.

Esercizio. Sia

$$F : \mathbf{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \frac{s}{(s^2+1)^2} \ ;$$

provare che f ammette funzione antitrasformata di Laplace e trovare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$, con $\mathrm{Supp}(f) \subset [0, +\infty[$ che sia antitrasformata di F.

Risoluzione. Si ha $\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$.
La funzione $\frac{s}{s^2+1}$ ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è

$$g_1(t) = H(t)\cos t \ .$$

La funzione $\frac{1}{s^2+1}$ ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è

$$g_2(t) = H(t)\sin t \ .$$

Quindi la funzione F ammette funzione antitrasformata di Laplace e una funzione antitrasformata è la convoluzione $g_1 * g_2$ di g_1 e di g_2.
Per $t \geq 0$ e per le formule di Werner si ha

$$(g_1 * g_2)(t) = \int_0^t \cos u \sin(t-u)\, du = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin(2u-t) + \sin t)\, du \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2u-t) + u\sin t\right]_0^t =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos t + t\sin t + \frac{1}{2}\sin t\right) = \frac{1}{2}t\sin t \ .$$

Una funzione antitrasformata di Laplace è quindi

$$\frac{1}{2}H(t)t\sin t \ .$$

Tale funzione è l'unica antitrasformata di Laplace continua.

Esercizio. Sia $F(s)$ la funzione complessa, di variabile complessa definita naturalmente da

$$F(s) = \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{s^2+4}{s}} \ ,$$

e dove gli argomenti di log e di $\sqrt{\ }$ si intendono appartenere a $\mathbf{C}$ tagliato;

1. determinare il dominio di F;
2. provare che F ammette funzione antitrasformata di Laplace e trovare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{C})$, con $\mathrm{Supp}(f) \subset [0,+\infty[$ che sia antitrasformata di F.

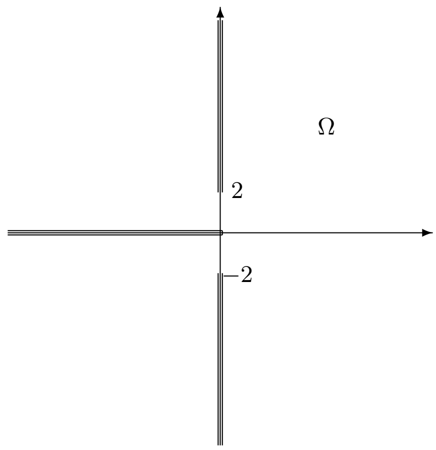
Risoluzione.

1. Sia $\Omega = \mathrm{dom}(F)$.

   Sia
   $$T = \{x \in \mathbf{R};\ x \leq 0\} \ .$$
   Si ha
   $$\Omega = \{s \in \mathbf{C}; s \neq 0,\ s^2+4 \notin T,\ \frac{s^2+4}{s} \notin T\} \ .$$
   Sia $s \in \mathbf{C}$; si ha $s^2+4 \in T$ se e solo se esiste $x \in \mathbf{R}$, $x \leq 0$ tale che $s^2+4 = x$, cioè tale che $s^2 = x-4$, cioè tale che $s = \pm\sqrt{4-x}i$.

   Si ha
   $$\{\sqrt{4-x};\ x \in \mathbf{R}.x \leq 0\} = [2,+\infty[\ .$$
   Quindi si ha $s^2+4 \in T$ se e solo se
   $$s \in \{yi;\ y \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\} \ .$$
   Sia $s \in \mathbf{C}^*$, tale che $\sqrt{s^2+4}\ \not{i}nT$; si ha $\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \in T$ se e solo se esiste $x \in \mathbf{R}$, $x \leq 0$ tale che $\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = x$, cioè tale che $\sqrt{s^2-4} = xs$; per $x = 0$ si ha $\sqrt{s^2-4} = 0$; quindi $s^2+4 \in T$, in contraddizione con l'ipotesi fatta; supponiamo dunque $x > 0$; si ha $\sqrt{s^2-4} = xs$; se e solo se $\begin{cases} s^2+4 = s^2x^2 \\ \mathrm{Am}(sx) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$, cioè tale che $\begin{cases} s^2(x^2-1) = 4 \\ \Re(sx) > 0 \end{cases}$, cioè, essendo $x < 0$, tale che $\begin{cases} s^2(x^2-1) = 4 \\ \Re s < 0 \end{cases}$; per $x = -1$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $x \neq -1$; si ha $\begin{cases} s^2(x^2-1) = 4 \\ \Re s < 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} s^2 = \frac{4}{x^2-1} \\ \Re s < 0 \end{cases}$; se $-1 < x < 0$, si ha $s = \pm\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}i$; quindi $\Re s = 0$; quindi il sistema non ha soluzioni; supponiamo $x < -1$; si ha $s = \pm\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$; quindi essendo $\Re s < 0$, $s = -\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$.

   Si ha
   $$\{-\frac{2}{\sqrt{x^2-1}};\ x \in \mathbf{R}.x < -1\} =]-\infty,0[\ .$$
   Quindi si ha $\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \in T$ se e solo se
   $$s \in \{t \in \mathbf{R}; t < 9\} \ .$$
   Si ha quindi
   $$\Omega = \mathbf{C} - (\{0\} \cup \{yi;\ y \in]-\infty,-2] \cup]2,+\infty[\} \cup \{t \in \mathbf{R};\ t < 0\}) \ .$$



2. Si ha
$$\{s \in \mathbf{C}; \Re s > 0\} \subset \Omega \,.$$
Consideriamo l'equivalenza asintotica per $\Re s \to +\infty$.
Proviamo che per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\sqrt{s^2+4} = s\sqrt{1+\frac{4}{s^2}} \,.$$
Per quanto visto sopra la funzione
$$g_1 : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow \sqrt{s^2+4}$$
è analitica.
Sia $s \in \mathbf{C}^*$; si ha $! + \frac{1}{s^2} \in T$ se e solo se esiste $x \in \mathbf{R}$, $x < 0$ tale che $! + \frac{1}{s^2} = x$, cioè tale che $\frac{1}{s^2} = x - 1$, cioè tale che $s^2 = \frac{1}{x-1}$; cioè tale che $s = \frac{1}{\sqrt{x-1}} i$. Quindi se $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$, allora $s \notin T$.
Quindi la funzione
$$g_2 : \{s \in \mathbf{C};\ \Re s > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, s \longrightarrow s\sqrt{1+\frac{4}{s^2}}$$
è analitica.
Se $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$, si ha
$$g_1(t) = \sqrt{t^2+4} = \sqrt{t^2(1+\frac{4}{t^2}} = t\sqrt{1+\frac{4}{t^2}} = g_2(t) \,.$$
Per le proprietà delle funzioni analitiche si ha $g_1 = g_2$; quindi per ogni $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$ si ha
$$\sqrt{s^2+4} = s\sqrt{1+\frac{4}{s^2}} \,.$$
Sia $s \in \mathbf{C}$, $\Re s > 0$; si ha
$$F(s) = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = \frac{1}{2}\log\frac{s\sqrt{1+\frac{4}{s^2}}}{s} = \frac{1}{2}\log\sqrt{1+\frac{4}{s^2}} =$$
$$\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{s^2}}-1\right) \sim_{\Re s \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{s^2}}-1\right) \sim_{\Re s \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{4}{s^2} = \frac{1}{s^2} \,.$$

Quindi esiste $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che per ogni $s \in \mathbf{C}$ con $\Re s > \lambda_0$ si ha $|F(s)| \leq \frac{2}{|s|^2}$ quindi f ammette funzione antitrasformata di Laplace.
Sia $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};\mathbf{C})$ con $\mathrm{Supp}(f\cdot\lambda) \subset [0,+\infty[$ tale che $\mathcal{L}^{-1}(F) = f\cdot\lambda$.
Per ogni $s \in \Omega$ si ha

$$F'(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{s^2+4}}2ss - \sqrt{s^2+4}}{s^2} = \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s}}\frac{s^2-s^2-4}{s^2\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{2}\frac{-4}{s(s^2+4)} = -2\frac{1}{s(s^2+4)} \ .$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{C}$ tali che

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+a} \ .$$

Si ha

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)s \ .$$

Per $s = 0$ si ha $1 = 4A$; quindi $A = \frac{1}{4}$.
Si ha

$$1 = \frac{1}{4}(s^2+4) + (Bs+C)s \ ;$$

quindi

$$4 = s^2 + 4 + 4(Bs+C)s \ ;$$

quindi

$$-s^2 = 4(Bs+C)s \ ;$$

quindi

$$-s = 4Bs + 4C \ ;$$

quindi $4B = -1$,quindi $B = -\frac{1}{4}$ e $C = 0$.
Quindi

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} \ .$$

Si ha quindi

$$F'(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s}\right) \ .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F') = \frac{1}{2}(H(t)\cos(2t) - H(t))\cdot\lambda = \frac{1}{2}(H(t)(\cos(2t)-1)\cdot\lambda \ .$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2}(H(t)(\cos(2t)-1)\cdot\lambda = -tf(t)\cdot\lambda \ .$$

Quindi per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$-tf(t) = \frac{1}{2}(H(t)(\cos(2t)-1) \ ;$$

quindi

$$f(t) = \frac{1}{2}\frac{1-\cos(2t)}{t} \ .$$

Si ha

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}4t^2}{t} = 0 \ .$$

Posto

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1-\cos(2t)}{t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} \ .$$

si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = h\cdot\lambda \ .$$

28.6 Equazioni differenziali lineari su $[0,+\infty[$

28.6.1 Equazioni differenziali lineari su $[0,+\infty[$

Teorema 28.6.1.1 *Sia* $n \in \mathbf{N}$*; sia* $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ *una successione di* $\mathbf{C}$*; sia* $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$*; sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$*; sia* $u|]0,+\infty[\in \mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[,\mathbf{C})$*; per ogni* $k=0,1\ldots,n-1$ $(u|]0,+\infty[)^{(k)}(t)$ *sia convergente per* $t\to 0+$ *di modo che per ogni* $k=1,2,\ldots,n-1$ u *derivabile* k *volte in* 0 *e* $u^{(k)}(0)=\lim_{t\to 0+,t>0}u^{(k)}(t)$ *e dunque per ogni* $k=0,1,\ldots,n-1$ $u\in C^k([0,+\infty[\mathbf{C})$*; sia*

$$f^0:\mathbf{R}\longrightarrow \mathbf{C}, t\longrightarrow \begin{cases} f(t) & per\ t\geq 0\\ 0 & per\ t<0\end{cases} \quad ;$$

per ogni $k=0,1\ldots,n-1$ *sia sia*

$$(u^{(k)})^0:\mathbf{R}\longrightarrow \mathbf{C}, t\longrightarrow \begin{cases} u^{(k)}(t) & per\ t\geq 0\\ 0 & per\ t<0\end{cases} \quad ;$$

sia $u^{(n)}:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ *una derivata distribuzionale* n*-esima di* $u|]0,+\infty[$*; sia*

$$(u^{(n)})^0:\mathbf{R}\longrightarrow \mathbf{C}, t\longrightarrow \begin{cases} u^{(k)}(t) & per\ t> 0\\ 0 & per\ t\leq 0\end{cases} \quad ;$$

allora u *è soluzione in* $\mathcal{W}^{(n)}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$ *dell'equazione differenziale*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f$$

se e solo se

$$(u^{(n)})^0\cdot\lambda+a_1(u^{(n-1)})\cdot\lambda+\ldots+a_nu^0\cdot\lambda=f^0\cdot\lambda\,.$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che due distribuzioni $g\cdot\lambda$ e $h\cdot\lambda$ sino uguali se e solo se g e h sono uguali quasi dappertutto.

28.6.2 Trasformabilità della soluzione

Teorema 28.6.2.1 *Sia* $n \in \mathbf{N}$*; sia* $(a_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ *una successione di* $\mathbf{C}$*; sia* $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$*; sia* $u \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$*; sia* u *soluzione in* $\mathcal{W}^n_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{C})$ *di*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f\ ;$$

sia

$$f^0:\mathbf{R}\longrightarrow \mathbf{C}, t\longrightarrow \begin{cases} f(t) & per\ t\geq 0\\ 0 & per\ t<0\end{cases} \quad ;$$

per ogni $k=1,2\ldots,n-1$ *sia sia*

$$(u^{(k)})^0:\mathbf{R}\longrightarrow \mathbf{C}, t\longrightarrow \begin{cases} u^{(k)}(t) & per\ t\geq 0\\ 0 & per\ t<0\end{cases} \quad ;$$

sia $u^{(n)} :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ *è una derivata distribuzionale n-esima di* $u|]0,+\infty[$*; sia*

$$(u^{(n)})^0 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, t \longrightarrow \begin{cases} u^{(k)}(t) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} ;$$

sia $f^0 \cdot \lambda$ *trasformabile secondo Laplace; allora per ogni* $k = 1, 2, \ldots, n$ $(u^{(k)})^0 \cdot \lambda$ *è trasformabile secondo laplace.*

Dimostrazione. Per ogni $k = 1, 2, \ldots n$ sia $(u^0)^{(k)}$ la derivata distribuzionale di $u^0 \cdot \lambda$.
Si ha $\lambda((u^0)^{(k)}) \leq \lambda(u^0 \cdot \lambda) = \lambda(f^0 \cdot \lambda)$.
Si ha $\lambda((u^0)^{(k)} \leq \max(\{0, \lambda(u^{(k)} \cdot \lambda)\})$ da ciò la tesi.

Esercizio. Sia $M \in \mathbf{R}_+^*$; sia

$$f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \begin{cases} t & \text{per } 0 \leq t \leq M \\ 0 & \text{per } t > M \end{cases}$$

siano $A, B \in \mathbf{R}$; risolvere il seguente problema di Cauchy su $[0,+\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + 9y = f \\ y(0) = A,\ y'(0) = B \end{cases} .$$

Risoluzione. Sia $y : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$; sia $y|]0,+\infty[\in W^2_{\text{loc}}(]0,+\infty[;\mathbf{C})$; sia y continuo in 0; sia $y|]0,+\infty[(t)$ convergente per $t \to 0$; y risulta derivabile in 0 con $y'(0) = \lim_{t\to 0+, t>0} y'(t)$, di modo che $u \in C^1([0,+\infty[;\mathbf{C})$.
Siano y^0 e $(y')^0$ i prolungamenti di y e di y' a $\mathbf{R}$ con la costante 0.
Sia $y'' :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ una derivata distribuzionale seconda di y. Sia $(y'')^0$ il prolungamento di y'' a $\mathbf{R}$ di y'' con la costante 0.
Sia f^0 il prolungamento di f a $\mathbf{R}$ con la costante 0.
Si ha $\text{Supp}(f^0\lambda) = [0, M]$.
$f^0 \cdot \lambda$ è quindi a supporto compatto; si ha quindi $\lambda(f^0 \cdot \lambda) = -\infty$.
Per ogni $s \in \mathbf{C}$, $s \neq 0$ si ha

$$\mathcal{L}(f^0 \cdot \lambda)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^M te^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^M - \int_0^M -\frac{1}{s}e^{-st}\, dt =$$

$$\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^M + \frac{1}{s}\int_0^M e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^M + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^M =$$

$$\left[-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^M = -\frac{1}{s}Me^{-Ms} - \frac{1}{s^2}e^{-Ms} + \frac{1}{s^2} .$$

Si osservi che per $s = 0$ $\mathcal{L}(f^0\lambda)$ assume il valore

$$\lim_{s\to 0}\left(-\frac{1}{s}Me^{-Ms} - \frac{1}{s^2}e^{-Ms} + \frac{1}{s^2}\right) =$$

$$\lim_{s\to 0}\left(-\frac{1}{s}M(1 - Ms + \text{o}(s)) - \frac{1}{s^2}(1 - Ms + \frac{1}{2}(-Ms)^2 + \text{o}(s^2)) + \frac{1}{s^2}\right) =$$

$$\lim_{s\to 0}\left(-\frac{1}{s}M + M^2 + \text{o}(1) - \frac{1}{s^2} + \frac{M}{s} - \frac{M^2}{2} + \text{o}(1) + \frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{M^2}{2} + \text{o}(1)\right) = \frac{M^2}{2} .$$

Si ha in $\mathcal{W}^2_{\text{loc}}([0,+\infty[;\mathbf{R})$

$$\begin{cases} y'' + 9y = f \\ y(0) = A,\ y'(0) = B \end{cases}$$

se e solo se
$$\begin{cases} ((y'')^0 \cdot \lambda + 9y^0 \cdot \lambda = f^0 \cdot \lambda \\ y(0) = A,\, y'(0) = B \end{cases} ;$$
quindi se e solo se
$$\begin{cases} \mathcal{L}(((y'')^0 \cdot \lambda + 9y^0 \cdot \lambda) = \mathcal{L}(f^0 \cdot \lambda) \\ y(0) = A,\, y'(0) = B \end{cases} .$$
Sia
$$\Omega = \{s \in \mathbf{C};\ \Re(s) > \max(\{\lambda(y^0 \cdot \lambda),\, \lambda((y')^0 \cdot \lambda),\, \lambda((y'')^0 \cdot \lambda)\})\} .$$
Le condizioni sopra sono allora equivalenti a dire che per ogni $s \in \Omega$,
$$\begin{cases} s^2\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda)(s) - y'(0)s - y(0) + 9\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda)(s) = -\frac{1}{s}Me^{-Ms} - \frac{1}{s^2}e^{-Ms} + \frac{1}{s^2} \\ y(0) = A,\, y'(0) = B \end{cases} .$$
Si ha quindi
$$s^2\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda)(s) - As - B + 9\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda) = -\frac{1}{s}Me^{-Ms} - \frac{1}{s^2}e^{-Ms} + \frac{1}{s^2} ,$$
cioè
$$\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda)(s^2 + 9) = Bs + A - \frac{1}{s}Me^{-Ms} - \frac{1}{s^2}e^{-Ms} + \frac{1}{s^2} .$$
Ciò equivale a dire per per ogni $s \in \Omega - \{3i, -3i\}$ si ha
$$\mathcal{L}(y^0 \cdot \lambda)(s) = B\frac{s}{s^2+9} + A\frac{1}{s^2+9} - M\frac{e^{-Ms}}{s(s^2+9)} - \frac{e^{-Ms}}{s^2(s^2+9)} + \frac{1}{s^2(s^2+9)} .$$
Quindi
$$\begin{aligned} y^0 \cdot \lambda = {} & B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right) - M\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-Ms}}{s(s^2+9)}\right) \\ & -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-Ms}}{s^2(s^2+9)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+9)}\right) , \end{aligned}$$
dove le funzioni di variabile complessa si intendono definite nel loro dominio naturale.
Si ha
$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+9}) = H(t)\cos(3t) \cdot \lambda .$$
Si ha
$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+9}) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s^2+9}) = \frac{1}{3}H(t)\sin(3t) \cdot \lambda .$$
Esistono $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tali che su $\mathbf{C} - \{0, 3i, -3i\}$ si ha
$$\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{cs+d}{s^2+9} .$$
Si ha su $\mathbf{C}$
$$1 = as(s^2+9) + b(s^2+9) + (cs+d)s^2 .$$
Per $s = 0$, si ha $1 = 9b$; quindi $b = \frac{1}{9}$.
Si ha quindi
$$1 = as(s^2+9) + \frac{1}{9}(s^2+9) + (cs+d)s^2 ;$$
quindi
$$1 = as(s^2+9) + \frac{1}{9}s^2 + 1 + (cs+d)s^2 ;$$
quindi
$$-\frac{1}{9}s^2 = as(s^2+9) + (cs+d)s^2 ;$$
quindi
$$-\frac{1}{9}s = a(s^2+9) + (cs+d)s .$$

Per $s=0$ si ha $0=9a$; quindi $a=0$.
Si ha quindi
$$-\frac{1}{9}s=(cs+d)s\ ;$$
quindi
$$-\frac{1}{9}=cs+d\ ;$$
quindi $c=0$ e $d=-\frac{1}{9}$.
Si ha quindi
$$\frac{1}{s^2(s^2+9)}=\frac{1}{9}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{s^2+9}\ .$$
Si ha quindi
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+9)}\right)=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{27}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)=$$
$$\frac{1}{9}H(t)t\cdot\lambda-\frac{1}{27}H(t)\sin(3t)\cdot\lambda=\left(\frac{1}{9}H(t)(t-\frac{1}{3}\sin(3t))\right)\cdot\lambda\ .$$
Sia
$$\tau_M:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},t\longrightarrow t-M\ .$$
Si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-Ms}}{s^2(s^2+9)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+9)}\right)\circ\tau_M=\left(\frac{1}{9}H(t-M)(t-M-\frac{1}{3}\sin(3(t-M))\right)\cdot\lambda\ .$$
Esistono $a,b,c\in\mathbf{R}$ tali che su $\mathbf{C}-\{0,3i,-3i\}$ si ha
$$\frac{1}{s(s^2+9)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+9}\ .$$
Si ha su $\mathbf{C}$
$$1=a(s^2+9)+(bs+c)s\ .$$
Per $s=0$, si ha $1=9a$; quindi $a=\frac{1}{9}$.
Si ha quindi
$$1=\frac{1}{9}(s^2+9)+(bs+c)s\ ;$$
quindi
$$1=\frac{1}{9}s^2+1+(bs+c)s\ ;$$
quindi
$$-\frac{1}{9}s^2=(bs+c)s\ ;$$
quindi
$$-\frac{1}{9}s=bs+c\ .$$
Quindi $b=\frac{1}{9}$ e $c=0$.
Si ha quindi
$$\frac{1}{s(s^2+9)}=\frac{1}{9}\frac{1}{s}-\frac{1}{9}+\frac{s}{s^2+9}\ .$$
Si ha quindi
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+9)}\right)=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)=$$
$$[\frac{1}{9}H(t)\cdot\lambda-\frac{1}{27}H(t)\cos(3t)\cdot\lambda=\left(\frac{1}{9}H(t)(1-\cos(3t))\right)\cdot\lambda\ .$$
Si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-Ms}}{s(s^2+9)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+9)}\right)\circ\tau_M=\left(\frac{1}{9}H(t-M)(1-\cos(3(t-M)))\right)\cdot\lambda\ .$$

Si ha quindi

$$y^0 \cdot \lambda =$$
$$(AH(t)\cos(3t) + B\frac{1}{3}H(t)\sin(3t) + \frac{1}{9}H(t)(t - \frac{1}{3}\sin(3t))$$
$$M\frac{1}{9}(H(t-M)(1-\cos(3t-3M))-$$
$$\frac{1}{9}H(t-M)(t-M-\frac{1}{3}\sin(3t-3M))\cdot\lambda\ .$$

Quindi, essendo per ogni $t \geq 0$ y continua, per ogni $t \geq 0$ si ha

$$y(t) = A\cos(3t) + \frac{B}{3}\sin(3t) + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin(3t)-$$
$$\frac{1}{9}H(t-M)(M - M\cos(3t-3M) + t - M - \frac{1}{3}\sin(3t-3M))\ .$$

o anche

$$y(t) =$$
$$\begin{cases} A\cos(3t) + \frac{B}{3}\sin(3t + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin(3t) \text{ per } 0 \leq t \leq M \\ A\cos(3t) + \frac{B}{3}\sin(3t) + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin(3t)) - \frac{1}{9}(M - M\cos(3t-3M)+ \\ t - M - \frac{1}{3}\sin(3t-3M)) \text{ per } t > M \end{cases}\ .$$