# CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2 ESERCIZI

Carlo Ravaglia

18 febbraio 2016

# Indice

**14 Calcolo differenziale** **1**
14.1 Derivate parziali . . . . . 1
14.1.1 Derivate parziali . . . . . 1
14.2 Massimi e minimi . . . . . 2
14.2.1 Massimi e minimi di funzioni . . . . . 2
14.3 Derivate parziali di ordine superiore . . . . . 12
14.3.1 Derivate parziali di ordine superiore . . . . . 12
14.4 Differenziabilità e derivata . . . . . 13
14.4.1 Dominio, matrice jacobiana e derivata . . . . . 13
14.4.2 Matrice jacobiana e derivata . . . . . 15
14.4.3 Derivata della funzione composta . . . . . 16
14.4.4 Gradiente e differenziale . . . . . 18
14.5 Derivate direzionali . . . . . 20
14.5.1 Derivate direzionali . . . . . 20
14.6 Diffeomorfismo . . . . . 23
14.6.1 Diffeomorfismo e derivata della funzione inversa . . . . . 23
14.7 Estremanti relativi . . . . . 27
14.7.1 Estremanti relativi in $\mathbf{R}^2$ . . . . . 27
14.7.2 Estremanti relativi in $\mathbf{R}^3$ . . . . . 31

**15 Forme differenziali lineari** **35**
15.1 Forme differenziali esatte . . . . . 35
15.1.1 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^2$ . . . . . 35
15.1.2 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^3$ . . . . . 37
15.1.3 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^N$ . . . . . 38
15.2 Campi di vettori esatti . . . . . 38
15.2.1 Campi di vettori esatti . . . . . 38
15.3 Integrale di forme differenziali su traiettorie . . . . . 39
15.3.1 Integrale di forme differenziali su traiettorie . . . . . 39

**16 Equazioni implicite** **41**
16.1 Problema con equazione implicita . . . . . 41
16.1.1 Problema con equazione implicita in $\mathbf{R}^2$ . . . . . 41

16.1.2 Problema con una equazione implicita in $\mathbf{R}^3$ . . . . . . . . . . 42
16.1.3 Problema con un sistema di due equazioni implicite in $\mathbf{R}^3$ . . . 44

**17 Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$ 45**
17.1 Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
17.1.1 Sottovarietà differenziale; spazio tangente, spazio normale, varietà lineare tangente, varietà lineare normale . . . . . . . . . . 45
17.1.2 Spazio tangente, spazio normale, varietà lineare tangente, varietà lineare normale ad una sottovarietà in forma parametrica 54
17.1.3 Sottovarietà e derivate direzionali . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
17.2 Massimi e minimi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
17.2.1 Massimi e minimi di funzioni di due variabili . . . . . . . . . . 57
17.2.2 Massimi e minimi di funzioni di tre variabili . . . . . . . . . . . 66

**18 Equazioni differenziali 103**
18.1 Equazioni del primo ordine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
18.1.1 Problemi di Cauchy per equazioni del primo ordine . . . . . . . 103
18.2 Equazioni di ordine superiore al primo . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
18.2.1 Problemi di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo 115

**19 Equazioni differenziali lineari 117**
19.1 Equazioni del primo ordine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
19.1.1 Problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine . . . . 117
19.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
19.2.1 Integrale generale per i sistemi di due equazioni . . . . . . . . . 120
19.2.2 Autovettori e integrale generale per i sistemi di due equazioni . 121
19.2.3 Problema di Cauchy per i sistemi di due equazioni . . . . . . . 123
19.2.4 Autovettori e problema di Cauchy per i sistemi di due equazioni 124
19.2.5 Problema di Cauchy per i sistemi di tre equazioni . . . . . . . 126
19.3 Equazione di ordine superiore . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
19.3.1 Integrale generale di un'equazioni differenziale lineare . . . . . 126
19.3.2 Problema di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo a coefficienti costanti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
19.3.3 Problema di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo a coefficienti costanti con parametri . . . . . . . . . . . . . . . 153
19.3.4 Problema di Cauchy per equazioni lineari a coefficienti non costanti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155

**20 Integrale di Riemann 157**
20.1 Integrale di Riemann per funzioni di 1 variabile . . . . . . . . . . . . . 157
20.1.1 Calcolo di derivate . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157

**21 Integrale di Lebesgue 159**
21.1 Integrali multipli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
21.1.1 Integrali doppi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
21.1.2 Convergenza di integrali doppi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175

21.1.3 Integrali tripli . . . . . 176
21.2 Misure di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$ . . . . . 188
21.2.1 Misure di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ . . . . . 188
21.2.2 Misure di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ . . . . . 189

**22 Integrale di funzioni su varietà 197**
22.1 Integrali di funzioni su varietà . . . . . 197
22.1.1 Integrali curvilinei di funzioni in $\mathbf{R}^2$ . . . . . 197
22.1.2 Integrali curvilinei di funzioni in $\mathbf{R}^3$ . . . . . 203
22.1.3 Integrali di superficie di funzioni . . . . . 204
22.2 Misura di sottoinsiemi di una varietà . . . . . 209
22.2.1 Lunghezza di una curva . . . . . 209
22.2.2 Area di una superficie . . . . . 211

**23 Integrale di forme differenziali 215**
23.1 Integrale di forme differenziali . . . . . 215
23.1.1 Integrali curvilinei di forme differenziali in $\mathbf{R}^2$ . . . . . 215
23.1.2 Integrali curvilinei di forme differenziali in $\mathbf{R}^3$ . . . . . 226
23.1.3 Integrali di superficie di 2-forme . . . . . 227

**24 Teorema di Stokes 235**
24.1 Teorema di Stokes applicato alle curve . . . . . 235
24.1.1 Integrali curvilinei di forme differenziali esatte . . . . . 235

# Capitolo 14

# Calcolo differenziale

## 14.1 Derivate parziali

### 14.1.1 Derivate parziali

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^5 \sin \frac{y^2 + z^2}{x^2} \ ;$$

per $(x, y, z) \in \mathrm{dom}(f)$, calcolare

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \ ;$$

si dimostri che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = kf(x, y, z) \ ;$$

si determini tale $k$.

**Risoluzione.** Sia $(x, y, z) \in \mathrm{dom}(f)$. Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 5x^4 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} + x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} (y^2 + z^2)(-\frac{2}{x^3}) =$
$5x^4 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} - 2x^2(y^2 + z^2) \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} \frac{2y}{x^2} = 2x^3 y \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} \frac{2z}{x^2} = 2x^3 z \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}$.
Si ha quindi
$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) =$
$5x^5 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} - 2x^3(y^2 + z^2) \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} + 2x^3 y^2 \cos \frac{y^2+z^2}{+} 2x^3 z^2 \cos \frac{y^2+z^2}{=}$
$5x^5 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} = 5f(x, y, z)$.
Si ha quindi $k = 5$.

## 14.2 Massimi e minimi

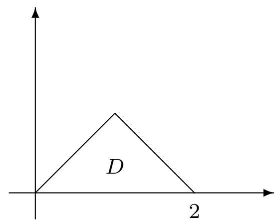
### 14.2.1 Massimi e minimi di funzioni

1. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, y - x \leq 0, x + y \leq 2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x^2 + xy$$

in caso affermativo, determinarli.

**Risoluzione.** Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo

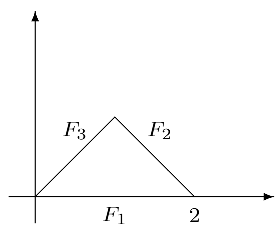



Sia $D$ il dominio di $f$. Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $f$.

Consideriamo $f$ su $\overset{\circ}{D}$. Per ogni $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$.

Si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $(x,y) = (0,0)$. Essendo $(0,0) \notin \overset{\circ}{D}$, si ha $E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$; si ha quindi $E \subset \operatorname{Fr}(D)$.

Consideriamo $f$ su $\operatorname{Fr}(D)$. Posto $S_1 = [(0,0),(2,0)]$, $S_2 = ](2,0),(1,1)]$, $S_3 = ](0,0),(1,1)[$, si ha $\operatorname{Fr}(D) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.




Consideriamo $f$ su $S_1$. Su $S_1$ si ha $(x,y) = (x,0)$ e $0 \leq x \leq 2$; si ha quindi $f(x,y) = f(x,0) = x^2$; sia
$h_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$;
se $(x,y) \in E \cap S_1$, allora $x$ è un estremante per $h_1$. Sia $E_1$ l'insieme degli estremanti di $h_1$. Poichè $h_1$ è strettamente crescente si ha $E_1 = \{0,2\}$. Si ha quindi

$$E \cap S_1 \subset \{(0,0),(2,0)\}\ .$$

Consideriamo $f$ su $S_2$. Su $S_2$ si ha $(x,y)=(x,2-x)$ e $1 \leq x < 2$; si ha quindi $f(x,y)=f(x,2-x)=x^2+x(2-x)=2x$; sia
$h_2:[1,2[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x$;
se $(x,y) \in E \cap S_2$, allora $x$ è un estremante per $h_2$. Sia $E_2$ l'insieme degli estremanti di $h_2$. Poichè $h_2$ è strettamente crescente si ha $E_2=\{1\}$. Si ha quindi

$$E \cap S_2 \subset \{(1,1))\} .$$

Consideriamo $f$ su $S_3$. Su $S_3$ si ha $(x,y)=(x,x)$ e $0 < x < 1$; si ha quindi $f(x,y)=f(x,x)=2x^2$; sia
$h_3:]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x^2$;
se $(x,y) \in E \cap S_3$, allora $x$ è un estremante per $h_3$. Sia $E_3$ l'insieme degli estremanti di $h_3$. Poichè $h_3$ è strettamente crescente si ha $E_3=\emptyset$; si ha quindi $E \cap S_3=\emptyset$.

Si ha quindi

$$E \subset \{(0,0),(2,0),(1,1)\} .$$

Si ha:
$f(0,0)=0$, $f(2,0)=4$, $f(1,1)=2$.

Si ha quindi $\max(f)=4$ e $\min(f)=0$.

2. **Esercizio.** Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in \mathbf{R}^2; x \leq 1, -x \leq y \leq x\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 3x^2-xy+2y^2 ,$$

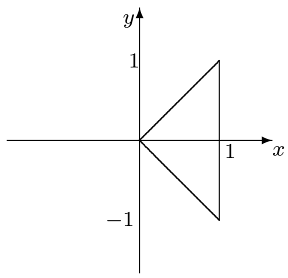
(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia

$$D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2;\ x \leq 1,\ y \leq x,\ y \geq -x\} .$$




Essendo $D$ compatto ed $f$ continua, $f$ ammette massimo e minimo.

(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $f$.

Consideriamo $f$ su $\mathring{D}$. Per ogni $(x,y) \in \mathring{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x-y$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x+4y$.

Si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $\begin{cases} 6x - y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $(x,y) = (0,0)$. essendo $(0,0) \notin \overset{\circ}{D}$, si ha $E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$; si ha quindi $E \subset \operatorname{Fr}(D)$.
Consideriamo $f$ su $\operatorname{Fr}(D)$. Posto $S_1 = [(-1,1),(1,1)]$, $S_2 = [(0,0),(1,1)[$, $S_3 = ](0,0),(1,-1)[$, si ha $\operatorname{Fr}(D) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
Consideriamo $f$ su $S_1$. Su $S_1$ si ha $(x,y) = (1,y)$ e $-1 \leq y \leq 1$; si ha quindi $f(x,y) = f(1,y) = 3 - y + 2y^2$; sia
$h_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow 2y^2 - y + 3$;
se $(x,y) \in E \cap S_1$, allora $y$ è un estremante per $h_1$. Sia $E_1$ l'insieme degli estremanti di $h_1$. Per $y \in ]-1,1[$ si ha
$h_1'(y) = 4y - 1$;
si ha $h_1'(y) = 0$ se e solo se $y = \frac{1}{4}$; si ha quindi
$E_1 \subset \left\{\frac{1}{4}, -1, 1\right\}$;
si ha quindi

$$E \cap S_1 \subset \left\{(1, \frac{1}{4}), (1,-1), (1,1)\right\} .$$

Consideriamo $f$ su $S_2$. Su $S_2$ si ha $(x,y) = (x,x)$ e $0 \leq x < 1$; si ha quindi $f(x,y) = f(x,x) = 3x^2 - x^2 + 2x^2 = 4x^2$; sia
$h_2 : [0,1[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 4x^2$;
se $(x,y) \in E \cap S_2$, allora $x$ è un estremante per $h_2$. Sia $E_2$ l'insieme degli estremanti di $h_2$. Poichè $h_2$ è strettamente crescente si ha $E_2 = \{0\}$. Si ha quindi

$$E \cap S_2 \subset \{(0,0))\} .$$

Consideriamo $f$ su $S_3$. Su $S_3$ si ha $(x,y) = (x,-x)$ e $0 < x < 1$; si ha quindi $f(x,y) = f(x,-x) = 3x^2 + x_2^2 x^2 = 6x^2$; sia
$h_3 : ]0,1[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 6x^2$;
se $(x,y) \in E \cap S_3$, allora $x$ è un estremante per $h_3$. Sia $E_3$ l'insieme degli estremanti di $h_3$. Poichè $h_3$ è strettamente crescente si ha $E_3 = \emptyset$; si ha quindi $E \cap S_3 = \emptyset$.
Si ha quindi

$$E \subset \left\{(1, \frac{1}{4}), (1,-1), (1,1), (0,0)\right\} .$$

Si ha:
$f(0,0) = 0$, $f(1,1) = 4$, $f(1,-1) = 6$, $f(1, \frac{1}{4}) = \frac{23}{8}$.
Si ha quindi $\max(f) = 6$ e $\min(f) = 0$.

3. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq -1,\ -x - y \geq 1,\ -x + y \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

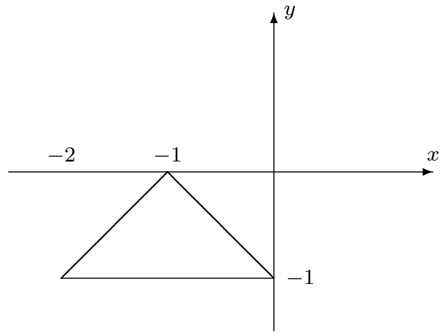
$$(x,y) \longrightarrow -2xy + 3y^2 - y ,$$

   (a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq -1,\ -x - y \geq 1,\ -x + y \leq 1\}\ .$$




Essendo $D$ compatto ed $f$ continua, $f$ ammette massimo e minimo.

(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $f$.
Consideriamo $f$ su $\overset{\circ}{D}$. Per ogni $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y,$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 6y - 1.$
Si ha $\mathrm{grad}\, f(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $\begin{cases} -2y = 0 \\ -2x + 6y - 1 = 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0)$. essendo $(-\frac{1}{2}, 0) \notin \overset{\circ}{D}$, si ha
$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset\ ;$$
si ha quindi $E \subset \mathrm{Fr}\,(D)$.
Consideriamo $f$ su $\mathrm{Fr}\,(D)$. Posto
$S_1 = [(-2, -1), (0, -1)],$
$S_2 = ](0, -1), (-1, 0)],$
$S_3 = ](-1, 0), (-1, -1)[,$
si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
Consideriamo $f$ su $S_1$. Per ogni $(x, y) \in S_1$ si ha $y = -1$ e $-2 \leq x \leq 0$; si ha quindi $f(x, y) = f(x, -1) = 2x + 3 + 1 = 2x + 4$; sia
$h_1 : [-2, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x + 4;$
sia $E_1$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $h_1$; la funzione $h_1$ è strettamente crescente; si ha quindi
$E_1 = \{-2, 0\};$
si ha quindi
$$E \cap S_1 \subset \{(-2, -1), (0, -1)\}\ .$$
Consideriamo $f$ su $S_2$. Su $S_2$ si ha $x = -1 - y$ e $-1 < y \leq 0$; si ha quindi $f(x, y) = f(-1-y, y) = -2(-1-y)y+3y^2-y = 2y+2y^2+3y^2-y = 5y^2+y;$

sia
$h_2 :]-1,0] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow 5y^2+y$;
sia $E_2$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $h_2$; per ogni $y \in ]-1,0]$ si ha $h_2'(y) = 10y+1$; quindi $h_2'(y) = 0$ se e solo se $y = -\frac{1}{10}$; si ha $-1 < -\frac{1}{10} \leq 0$; si ha quindi $E_2 \subset \left\{-\frac{1}{10}, 0\right\}$; si ha quindi

$$E \cap S_2 \subset \left\{(-1,0), (-\frac{9}{10}, -\frac{1}{10})\right\} \ .$$

Consideriamo $f$ su $S_3$. Su $S_3$ si ha $x = y-1$ e $-1 < y < 0$; si ha quindi $f(x,y) = f(y-1,y) = -2(y-1)y+3y^2-y = -2y^2+2y+3y^2-y = y^2+y$;
sia
$h_3 :]-1,0[ \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow y^2+y$;
sia $E_3$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $h_3$; per ogni $y \in ]-1,0[$ si ha $h_3'(y) = 2y+1$; quindi $h_3'(y) = 0$ se e solo se $y = -\frac{1}{2}$; si ha $-1 < -\frac{1}{2} < 0$; si ha quindi $E_3 \subset \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; si ha quindi

$$E \cap S_3 \subset \left\{(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\right\} \ .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{(-2,-1), (0,-1), (-1,0), (-\frac{9}{10}, -\frac{1}{10}), (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\right\} \ .$$

Si ha:
$f(-2,-1) = 0$, $f(0,-1) = 4$, $f(-1,0) = 0$, $f(-\frac{-9}{10}, -\frac{1}{10}) = -\frac{1}{20}$,
$f(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.
Si ha quindi $\max(f) = 4$ e $\min(f) = -\frac{1}{4}$.

4. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq x^4\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

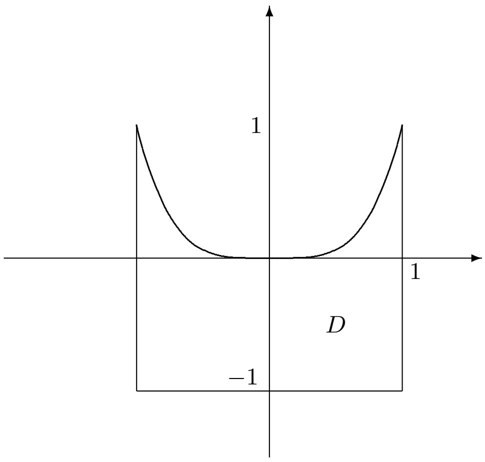
$$(x,y) \longrightarrow x^4 - 2xy^2 - y \ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.




Essendo $D$ compatto ed $f$ continua, $f$ ammette massimo e minimo.

(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $f$.

Consideriamo $f$ su $\overset{\circ}{D}$. Per ogni $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2y^2$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy - 1$.

Se $(x,y) \in E$, si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, cioè
$\begin{cases} 4x^3 - 2y^2 = 0 \\ -4xy - 1 = 0 \end{cases}$.

Per $x = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $x \neq 0$.

Si ha $y = -\frac{1}{4x}$; quindi si ha
$4x^3 - 2(-\frac{1}{4x})^2 = 0$;
quindi
$4x^3 - 2\frac{1}{16x^2} = 0$;
quindi
$4x^3 - \frac{1}{8x^2} = 0$;
quindi
$\frac{32x^5 - 1}{8x^2} = 0$;
quindi
$32x^5 - 1 = 0$;
quindi
$x^5 = \frac{1}{32}$;
quindi
$x = \frac{1}{2}$.

Si ha quindi $y = -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$.

Si trova il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} \subset \left\{ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \right\} ; .$$

Consideriamo $f$ su $\mathrm{Fr}\,(D)$. Posto
$F_1 = [(-1,-1),(1,-1)]$,
$F_2 = ](1,-1),(1,1)]$,
$F_3 = ](-1,-1),(-1,1)]$,
$F_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1, y = x^4\}$,
si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$.
Consideriamo $f$ su $F_1$. Per ogni $(x,y) \in F_1$ si ha $y = -1$ e $-1 \leq x \leq 1$; si ha quindi
$f(x,y) = f(x,-1) = x^4 - 2x + 1$;
sia
$g_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^4 - 2x + 1$;
sia $E_1$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $g_1$.
Sia $x \in ]-1,1[$. Si ha
$g_1'(x) = 4x^3 - 2$.
Si ha $g_1'(x) = 0$ se e solo se $4x^3 - 2 = 0$, cioè se e solo se $x^3 = \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
Si ha quindi
$E_1 \cap ]-1,1[ \subset \{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\}$.
Si ha quindi
$E_1 \subset \{1, -1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\}$.
Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \{(1,-1),(-1,-1),(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},-1)\} .$$

Consideriamo $f$ su $F_2$. Per ogni $(x,y) \in F_2$ si ha $x = 1$ e $-1 < y \leq 1$; si ha quindi
$f(x,y) = f(1,y) = 1 - 2y^2 - y$;
sia
$g_2 : ]-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow 1 - 2y^2 - y$;
sia $E_2$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $g_2$.
Sia $y \in ]-1,1[$. Si ha
$g_2'(y) = -4y - 1$.
Si ha $g_2'(y) = 0$ se e solo se $-4y - 1 = 0$, cioè se e solo se $y = -\frac{1}{4}$.
Si ha quindi
$E_2 \cap ]-1,1[ \subset \{-\frac{1}{4}\}$.
Si ha quindi
$E_2 \subset \{1, -\frac{1}{4}\}$.
Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \{(1,1),(1,-\frac{1}{4})\} .$$

Consideriamo $f$ su $F_3$. Per ogni $(x,y) \in F_3$ si ha $x = -1$ e $-1 < y \leq 1$; si ha quindi
$f(x,y) = f(-1,y) = 1 + 2y^2 - y$;
sia
$g_3 : ]-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow 1 + 2y^2 - y$;
sia $E_3$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $g_3$.
Sia $y \in ]-1,1[$. Si ha
$g_3'(y) = 4y - 1$.
Si ha $g_3'(y) = 0$ se e solo se $4y - 1 = 0$, cioè se e solo se $y = \frac{1}{4}$.
Si ha quindi
$E_3 \cap ]-1,1[ \subset \{\frac{1}{4}\}$.
Si ha quindi
$E_3 \subset \{1, \frac{1}{4}\}$.
Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \{(-1,1), (-1, \frac{1}{4})\} \ .$$

Consideriamo $f$ su $F_4$. Per ogni $(x,y) \in F_4$ si ha $y = x^4$ e $-1 < x < 1$; si ha quindi
$f(x,y) = f(x,x^4) = x^4 - 2x(x^4)^2 - x^4 = -2x^9$;
sia
$g_4 : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -2x^9$;
sia $E_4$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $g_4$.
La funzione $g_4$ è strettamente decrescente; si ha quindi $E_4 = \emptyset$.
Si ha quindi

$$E \cap F_4 = \emptyset \ .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1,-1), (-1,-1), (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1), (1, -\frac{1}{4}), (1,1), (-1, \frac{1}{4}), (-1,1) \right\} \ .$$

Si ha:
$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1-4+8}{16} = \frac{5}{16}$,
$f(1,-1) = 1 - 2 + 1 = 0$,
$f(-1,-1) = 1 + 2 + 1 = 4$,
$f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1) = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^4 - 2\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1 = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$,
$f(1, -\frac{1}{4}) = 1 - 2\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{8-1+2}{8} = \frac{9}{8}$,
$f(1,1) = 1 - 2 - 1 = -2$,
$f(-1, \frac{1}{4}) = 1 + 2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8+1-2}{8} = \frac{7}{8}$,
$f(-1,1) = 1 + 2 - 1 = 2$.
Si ha $-2 < -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1$ se e solo se $3 > \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, se e solo se $1 > \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, se e solo se $2 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, se e solo se $8 > \frac{1}{2}$; ciò è vero; quindi si ha $-2 < -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1$.

Si ha quindi $\max(f) = 4$ e $\min(f) = -2$.

5. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

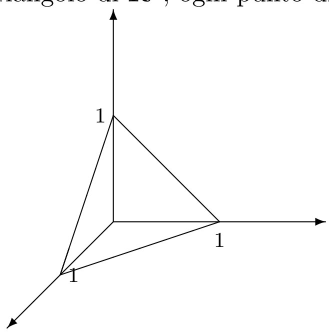
$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2$$

in caso affermativo, determinarli.

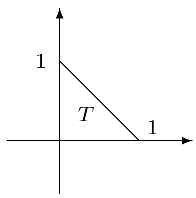
**Risoluzione.** Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.

Il dominio $D$ di $f$ è un triangolo di $\mathbf{R}^3$; ogni punto di $D$ è punto di frontiera.




Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo per $f$.

Sia $T$ il triangolo $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.



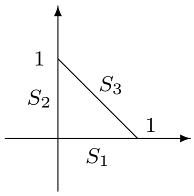

Su $D$ si ha $(x, y, z) = (x, y, 1 - x - y)$ e $(x, y) \in T$; si ha quindi $f(x, y, z) = f(x, y, 1 - x - y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$; sia $g : T \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$;
se $(x, y, z) \in E$, allora $(x, y)$ è un estremante per $g$. Sia $E_1$ l'insieme degli estremanti di $g$.

Consideriamo $g$ su $\overset{\circ}{T}$. Per ogni $(x, y) \in \overset{\circ}{T}$ si ha
$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 2$,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y + 2x - 2$. Si ha $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$,

cioè se e solo se $\begin{cases} 3x = 1 \\ 3y = 1 \end{cases}$ ; si trova $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Essendo $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$, si ha $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \overset{\circ}{T}$; si ha quindi

$$E_1 \cap \overset{\circ}{T} \subset \left\{ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right\} .$$

Consideriamo $g$ su $\mathrm{Fr}\,(T)$. Posto $S_1 = [(0,0),(1,0)]$, $S_2 = ](0,0),(0,1)]$, $S_3 = ](1,0),(0,1)[$, si ha $\mathrm{Fr}\,(T) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.




Consideriamo $g$ su $S_1$. Su $S_1$ si ha $(x, y) = (x, 0)$ e $0 \leq x \leq 1$; si ha quindi $g(x, y) = g(x, 0) = 2x^2 - 2x + 1$; sia
$h_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x^2 - 2x + 1$;
se $(x, y) \in E_1 \cap S_1$, allora $x$ è un estremante per $h_1$. Sia $E_{1,1}$ l'insieme degli estremanti di $h_1$. Consideriamo $h_1$ su $]0,1[$; per ogni $x \in ]0,1[$ si ha $h_1'(x) = 4x - 2$; si ha quindi $h'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$; si ha quindi $E_{1,1} \subset \{\frac{1}{2}, 0, 1\}$;

$$E_1 \cap S_1 \subset \left\{ (\frac{1}{2}, 0), (0,0), (1,0) \right\} .$$

Consideriamo $g$ su $S_2$. Su $S_2$ si ha $(x, y) = (0, y)$ e $0 < y \leq 1$; si ha quindi $g(x, y) = g(0, y) = 2y^2 - 2y + 1$; sia
$h_2 : ]0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow 2y^2 - 2y + 1$;
se $(x, y) \in E_1 \cap S_2$, allora $y$ è un estremante per $h_2$. Sia $E_{1,2}$ l'insieme degli estremanti di $h_2$. Consideriamo $h_2$ su $]0,1[$; per ogni $x \in ]0,1[$ si ha $h_2'(y) = 4y - 2$; si ha quindi $h'(y) = 0$ se e solo se $y = \frac{1}{2}$; si ha quindi $E_{1,2} \subset \{\frac{1}{2}, 1\}$;

$$E_1 \cap S_2 \subset \left\{ (0, \frac{1}{2}), (0,1) \right\} .$$

Consideriamo $g$ su $S_3$. Su $S_3$ si ha $(x, y) = (x, 1 - x)$ e $0 < x < 1$; si ha quindi $g(x, y) = g(x, 1-x) = 2x^2 + 2(1-x)^2 + 2x(1-x) - 2x - 2(1-x) + 1 = 2x^2 - 2x + 1$; sia
$h_3 : ]0,1[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x^2 - 2x + 1$;
se $(x, y) \in E_1 \cap S_3$, allora $x$ è un estremante per $h_3$. Sia $E_{1,3}$ l'insieme degli

estremanti di $h_3$. Per ogni $x \in ]0,1[$ si ha $h_3'(x) = 4x - 2$; si ha quindi $h'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$; si ha quindi $E_{1,3} \subset \{\frac{1}{2}\}$;

$$E_1 \cap S_2 \subset \left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E_1 \subset \left\{ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0,0), (0,1), (1,0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \right\} .$$

Si ha:
$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$,
$f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 1$,
$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) = f(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Si ha quindi $\max(f) = 1$ e $\min(f) = \frac{1}{3}$.

## 14.3 Derivate parziali di ordine superiore

### 14.3.1 Derivate parziali di ordine superiore

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \log(e^x - e^y) ;$$

calcolare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 .$$

**Risoluzione.** Sia $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$. Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{e^x - e^y} e^x = \frac{e^x}{e^x - e^y}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{e^x - e^y}(-e^y) = -\frac{e^y}{e^x - e^y}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{e^x(e^x - e^y) - e^x e^x}{(e^x - e^y)^2} = -\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x(-\frac{-e^y}{(e^x - e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{e^y(e^x - e^y) + e^y e^y}{(e^x - e^y)^2} = -\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$.
Si ha quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right)^2 = .$$

$$\left(-\frac{e^x e^y}{(e^x-e^y)^2}\right)\left(-\frac{e^x e^y}{(e^x-e^y)^2}\right)-\left(\frac{e^x e^y}{(e^x-e^y)^2}\right)^2 =$$
$$\frac{e^{2x}e^{2y}}{(e^x-e^y)^4}-\frac{e^{2x}e^{2y}}{(e^x-e^y)^4}=0\ .$$

## 14.4 Differenziabilità e derivata

### 14.4.1 Dominio, matrice jacobiana e derivata

1. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z)=(x\sin z, y\sin z, e^{z^2})\ ;$$

(a) determinare il dominio di $f$;

(b) determinare la matrice jacobiana di $f$ in un punto generico del dominio;

(c) determinare la trasformazione lineare derivata di $f$ in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}\ .$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f)=\mathbf{R}^3$.

(b) Per ogni $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=(\sin z,0,0)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=(0,\sin z,0)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=(x\cos z, y\cos z, 2ze^{z^2})$.
Quindi si ha

$$f'(x,y,z)=\begin{pmatrix}\sin z & 0 & x\cos z\\ 0 & \sin z & y\cos z\\ 0 & 0 & 2ze^{z^2}\end{pmatrix}\ .$$

(c) Per ogni $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ si ha

$$f'(x,y,z):\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3,(h_1,h_2,h_3)\longrightarrow$$
$$((\sin z)h_1+x(\cos z)h_3,(\sin z)h_2+y(\cos z)h_3,2ze^{z^2}h_3)\ .$$

2. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z,t)=(x\sin t^2, y\cos z^2, te^{x^2}, z^2e^{-x})\ ;$$

(a) determinare il dominio naturale di $f$;

(b) determinare la matrice jacobiana di $f$ in un punto generico del dominio;

(c) determinare la trasformazione lineare derivata di $f$ in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^4$.

(b) Per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = (\sin t^2, 0, 2xte^{x^2}, -z^2e^{-x})$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, t) = (0, \cos z^2, 0, 0)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z, t) = (0, -2yz \sin z^2, 0, 2ze^{-z})$,
$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = (2xt \cos t^2, 0, e^{x^2}, 0)$.
Quindi si ha

$$f'(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \sin t^2 & 0 & 0 & 2xt \cos t^2 \\ 0 & \cos z^2 & -2yz \sin z^2 & 0 \\ 2xte^{x^2} & 0 & 0 & e^{x^2} \\ -z^2e^{-x} & 0 & 2ze^{-x} & 0 \end{pmatrix} .$$

(c) Per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ si ha

$$f'(x, y, z, z) : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4, (h_1, h_2, h_3, h_4) \longrightarrow ((\sin t^2)h_1 + 2x(\cos t^2)h_4,$$

$$(\cos z^2)h_2 - 2yz(\sin z^2)h_3, 2xtze^{x^2}h_1 + e^{x^2}h_4, -z^2e^{-x}h_1 + 2ze^{-x}h_3) \ .$$

3. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (x^y, y^x) \ ;$$

(a) determinare il dominio naturale di $f$;
(b) determinare la matrice jacobiana di $f$ in un punto generico del dominio;
(c) determinare la trasformazione lineare derivata di $f$ in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\} \ .$$

(b) Per ogni $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (yx^{y-1}, y^x \log y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^y \log x, xy^{x-1})$.
Quindi si ha

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \log x \\ y^x \log y & xy^{x-1} \end{pmatrix} .$$

(c) Per ogni $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f'(x, y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$

$$(h_1, h_2) \longrightarrow (yx^{y-1}h_1 + x^y(\log x)h_2, y^x(\log y)h_1 + xy^{x-1}h_2) .$$

### 14.4.2 Matrice jacobiana e derivata

1. **Esercizio.** Determinare la matrice jacobiana e la derivata della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y) \longrightarrow (x \sin y^2, e^{xy}, \mathrm{Arctg}(x^2 + y)) .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y^2 & 2xy \cos y^2 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} & \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix}$$

e
$f'(x, y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (h, k) \longrightarrow$
$((\sin y^2)h + 2xy(\cos y^2)k, ye^{xy}h + xe^{xy}k, \frac{2xh}{1+(x^2+y)^2} + \frac{k}{1+(x^2+y)^2})$.

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (e^{xy}, x + y) ;$$

dire se $f$ è differenziabile in $(1, 2)$; in caso affermativo, determinare la derivata di $f$ in $(1, 2)$, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (ye^{xy}, 1)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xe^{xy}, 1)$;
quindi $f$ è di classe $C^1$; quindi $f$ è differenziabile; in particolare $f$ è differenziabile in $(1, 2)$.

Si ha

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

quindi

$$f'(1, 2) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h, k) \longrightarrow (2e^2h + e^2k, h + k) .$$

3. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y) \longrightarrow (e^{x+y}, \sin x, \cos y) ;$$

dire se $f$ è differenziabile; in caso affermativo, per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ determinare la derivata di $f$ in $(x, y)$, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

**Risoluzione.** Poichè $f$ è di classe $C^1$, $f$ è differenziabile.

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ \cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix} ;$$

quindi si ha

$$f'(x, y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (h, k) \longrightarrow (e^{x+y}h + e^{x+y}k, (\cos x)h, (-\sin y)k) .$$

4. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2y, e^{x-y+z^2}) ;$$

determinare la derivata di $f$ in $(1, 2, 1)$, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2xy, e^{x-y+z^2})$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x^2, -e^{x-y+z^2})$;
$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, 2ze^{x-y+z^2})$.
Quindi si ha

$$f'(1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ;$$

quindi

$$f'(1, 2, 1) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h_1, h_2, h_3) \longrightarrow (4h_1 + h_2, h_1 - h_2 + 2h_3) .$$

### 14.4.3 Derivata della funzione composta

1. **Esercizio.** Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(x^2e^{y^2}, xy) ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di $g$.

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = D_1g(x^2e^{y^2}, xy)2xe^{y^2} + D_2g(x^2e^{y^2}, xy)y =$
$2xe^{y^2}D_1g(x^2e^{y^2}, xy) + yD_2g(x^2e^{y^2}, xy)$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = D_1g(x^2e^{y^2}, xy)x^2 2ye^{y^2} + D_2g(x^2e^{y^2}, xy)x =$
$2x^2ye^{y^2}D_1g(x^2e^{y^2}, xy) + xD_2g(x^2e^{y^2}, xy)$.

2. **Esercizio.** Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y) \; ;$$
esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ attraverso le derivate parziali, $D_1 g$, $D_2 g$ di $g$.

**Risoluzione.** Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)\cos x + D_2 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)\cos x$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_1 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)(-\sin y) + D_2 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)\sin y =$
$-D_1 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)\sin y + D_2 g(\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)\sin y$.

3. **Esercizio.** Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x,y) \longrightarrow (e^y, \sin x, \sin(x^2y^2))$$
e
$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (z^2 \sin x \cos y, e^{x-y+z})$$
determinare la derivata $(g \circ f)'(0,0)$ esprimendolo nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ \cos x & 0 \\ \cos(x^2y^2)2xy^2 & \cos(x^2y^2)2yx^2 \end{pmatrix} ,$$
quindi
$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 \cos x \cos y & -z^2 \sin x \sin y & 2z \sin x \cos y \\ e^{x-y+z} & -e^{x-y+z} & e^{x-y+z} \end{pmatrix} ,$$
si ha $f(0,0) = (1,0,0)$; quindi si ha
$$g'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & -e & e \end{pmatrix} .$$
Si ha
$$g'(1,0,0)f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & -e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e & e \end{pmatrix} .$$
Quindi si ha
$$(g \circ f)'(0,0) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h,k) \longrightarrow (0, -eh + ek) \; .$$

### 14.4.4 Gradiente e differenziale

1. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\sin x^2)e^{-y} \ ;$$

   (a) determinare il dominio di $f$;

   (b) determinare il gradiente di $f$ in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di $f$ in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari $dx_i$.

   **Risoluzione.**

   (a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^2$.

   (b) Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(\cos x^2)e^{-y}$,
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(\sin x^2)e^{-y}$.
   Si ha quindi

$$\mathrm{grad}\, f(x, y) = (2x(\cos x^2)e^{-y}, -(\sin x^2)e^{-y}) \ .$$

   (c) Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$df(x, y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1, h_2) \longrightarrow 2x(\cos x^2)e^{-y}h_1 - (\sin x^2)e^{-y}h_2 \ .$$

   (d) Si ha

$$df(x, y) = 2x(\cos x^2)e^{-y}\, dx - (\sin x^2)e^{-y}\, dy \ .$$

2. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (x + y)^{\sin x + \sin y} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di $f$;

   (b) determinare il gradiente di $f$ in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di $f$ in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari $dx_i$.

   **Risoluzione.**

(a) Si ha
$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x+y>0\} \ .$$

(b) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$f(x,y) = e^{(sinx+\sin y)\log(x+y)} \ .$$

Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha quindi
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{(sinx+\sin y)\log(x+y)}\left(\cos x \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right) =$
$(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos x \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right)$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{(sinx+\sin y)\log(x+y)}\left(\cos y \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right) =$
$(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos y \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right)$.
Si ha quindi
$$\mathrm{grad}\, f(x,y) = \left((x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos x \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right),\right.$$
$$\left.(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos y \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right)\right) \ .$$

(c) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha
$$df(x,y) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1,h_2) \longrightarrow$$
$$(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos x \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right) h_1 +$$
$$(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos y \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y} h_2\right) \ .$$

(d) Si ha
$$df(x,y) = (x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos x \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y}\right) dx +$$
$$(x+y)^{sinx+\sin y}\left(\cos y \log(x+y) + \frac{\sin x+\sin y}{x+y} dy\right) \ .$$

3. **Esercizio.** Determinare il differenziale della funzione:
$$f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z,t) \longrightarrow xyzt + x + y + z + t$$
nel punto $(1,1,1,1)$, esprimendolo nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ si ha
$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = (yzt+1, xzt+1, xyt+1, xyz+1)$;
quindi si ha $\mathrm{grad}\, f(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$; quindi si ha
$$df(1,1,1,1) : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1,h_2,h_3,h_4) \longrightarrow 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 \ .$$

4. **Esercizio.** Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z \log(1 + x^2 + y^2) \ ;$$
   (a) determinare il gradiente di $f$ in un punto $(x, y, z)$ del dominio;
   (b) determinare il differenziale di $f$ in un punto $(x, y, z)$ del dominio, esprimendolo nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ ;$$
   (c) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme differenziali $(dx, dy, dz)$.

   **Risoluzione.**
   (a) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \left( \frac{2xz}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2yz}{1 + x^2 + y^2}, \log(1 + x^2 + y^2) \right)$$
   (b) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$df(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R},$$
$$(h_1, h_2, h_3) \longrightarrow \frac{2xz}{1 + x^2 + y^2} h_1 + \frac{2yz}{1 + x^2 + y^2} h_2 + \log(1 + x^2 + y^2) h_3 \ .$$
   (c) Si ha
$$df(x, y, z) = \frac{2xz}{1 + x^2 + y^2} dx + \frac{2yz}{1 + x^2 + y^2} dy + \log(1 + x^2 + y^2) dz \ .$$

## 14.5 Derivate direzionali

### 14.5.1 Derivate direzionali

1. **Esercizio.**
   Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 y \ ;$$
   determinare la derivata direzionale
$$D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} f(1, 1) \ .$$

   **Risoluzione.** La funzione $f$ è di classe $C^1$; quindi è differenziabile.
   Si ha quindi
$$D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} f(1, 1) = f'(1, 1)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = df(1, 1)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \ .$$

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$.
Si ha quindi
$\operatorname{grad} f(x, y) = (2xy, x^2)$.
Si ha quindi
$\operatorname{grad} f(1, 1) = (2, 1)$.
Si ha quindi
$df(1, 1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1, h_2) \longrightarrow 2h_1 + h_2$.
Si ha quindi

$$D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} f(1, 1) = f'(1, 1)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \ .$$

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \cos(xy) \ ;$$

determinare la derivata direzionale

$$D_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} f(1, 1) \ .$$

**Risoluzione.** La funzione $f$ è di classe $C^1$; quindi è differenziabile.
Per ogni $(x.y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) == \sin(xy)y = -y \sin(xy)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) == \sin(xy)x = -x \sin(xy)$.
Quindi

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (-y \sin(xy), -x \sin(xy)) \ .$$

Quindi

$$\operatorname{grad} f(1, 1) = (-\sin 1, \sin 1)) \ .$$

Quindi

$$df(1, 1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1, h_2) \longrightarrow -(\sin 1)h_1 - (\sin 1)h_2 \ .$$

Si ha quindi

$$D_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} f(1, 1) = df(1, 1)(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = (\sin 1)2\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sin 1)(-\frac{1}{2}) =$$
$$\frac{\sin 1}{2}(1 - \sqrt{3}) \ .$$

3. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ ;$$

sia $(x, y, z) \in \operatorname{dom}(f)$; determinare:

(a) $df(x,y,z)$;

(b) $\|\operatorname{grad} f(x,y,z)\|$;

(c) la direzione
$$e(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f(x,y,z)}{\|\operatorname{grad} f(x,y,z)\|}\ ;$$

(d) la derivata direzionale
$$D_{e(x,y,z)} f(x,y,z)\ .$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Si ha quindi
$$\operatorname{grad} f(x,y,z) =$$
$$\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\ .$$
Si ha quindi
$$df(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1,h_2,h_3) \longrightarrow$$
$$\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}h_1 - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}h_2 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}h_3\right)\ .$$

(b) Si ha
$$\|\operatorname{grad} f(x,y,z)\| =$$
$$\sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} =$$
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ .$$

(c) Si ha
$$\frac{\operatorname{grad} f(x,y,z)}{\|\operatorname{grad} f(x,y,z)\|} = (x^2+y^2+z^2)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \ .$$
$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\ .$$

Si ha quindi

$$e(x,y,z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) .$$

(d) Si ha

$$D_{e(x,y,z)}f(x,y,z) = df(x,y,z)(e(x,y,z)) =$$

$$-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) =$$

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} .$$

## 14.6 Diffeomorfismo

### 14.6.1 Diffeomorfismo e derivata della funzione inversa

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x^2 - xy, x + y^3) ;$$

(a) determinare la matrice jacobiana di $f$ nel punto $(1,1)$;

(b) determinare la derivata di $f$ nel punto $(1,1)$ esprimendola nella forma

$$\varphi : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} ;$$

(c) dire se esiste un intorno aperto $U$ di $(1,1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(d) in caso affermativo, indicato ancora con $f$ tale diffeomorfismo, si determini $f(1,1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,1)\big)$ esprimendola nella forma

$$\varphi : V \longrightarrow W, k \longrightarrow \mathcal{T}\{k\} .$$

**Risoluzione.**

(a) Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-y,1)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-x,3y^2)$.
Si ha quindi

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) Si ha

$$f'(1,1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h_1,h_2) \longrightarrow (h_1-h_2, h_1+3h_2) .$$

(c) Si ha
$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+1 = 4 \neq 0;$
quindi esiste un intorno aperto $U$ di $(1,1)$ tale che $U \longrightarrow f(U), (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ è un diffeomorfismo.

(d) Indichiamo ancora con $f$ tale diffeomorfismo. Si ha $f(1,1) = (0,2)$. Si ha
$(f^{-1})'(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
Si ha quindi

$$(f^{-1})'(0,2) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (k_1,k_2) \longrightarrow \left(\frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2, -\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) .$$

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x^2+y^2, x^2y^3) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1,1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando $U$, $V$ e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto $U$ di $(1,1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con $f$ tale diffeomorfismo, si determini la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,1)\big)$ esprimendola nella forma sopra descritta.

**Risoluzione.**

(a) Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x, 2xy^3)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y, 3x^2y^2$.
Si ha quindi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^3 & 3x^3y^2 \end{pmatrix} ;$$

Si ha quindi

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Quindi si ha

$$f'(1,1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h_1, h_2) \longrightarrow (2h_1 + 2h_2, 2h_1 + 3h_2) .$$

(b) Si ha
$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0;$
quindi esiste un intorno aperto $U$ di $(1,1)$ tale che $U \longrightarrow f(U), (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ è un diffeomorfismo.

(c) Indichiamo ancora con $f$ tale diffeomorfismo. Si ha $f(1,1) = (2,1)$. Si ha
$(f^{-1})'(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
Si ha quindi

$$(f^{-1})'(2,1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (k_1, k_2) \longrightarrow \left( \frac{3}{2} k_1 - k_2, -k_1 + k_2 \right) .$$

3. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (\cos(xy), \cos(xy^2)) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(\frac{\pi}{2}, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando $U$, $V$ e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto $U$ di $(\frac{\pi}{2}, 1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con $f$ tale diffeomorfismo, si determini $f(\frac{\pi}{2}, 1)$ la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(\frac{\pi}{2}, 1)\big)$ esprimendola nella forma sopra descritta.

**Risoluzione.**

(a) Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-\sin(xy)y, -\sin(xy^2)y^2) = (-y\sin(xy)y, -y^2\sin(xy^2)y^2),$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-\sin(xy)x, -\sin(xy^2)2xy) = (-x\sin(xy), -2xy\sin(xy^2)).$
Si ha quindi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ -y^2\sin(xy) & -2xy\sin(xy^2) \end{pmatrix} ;$$

Si ha quindi

$$f'(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \end{pmatrix} .$$

Quindi si ha

$$f'(\frac{\pi}{2},1) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (h_1,h_2) \longrightarrow (-h_1 - \frac{pi}{2}h_2, -h_1 - \pi h_2) .$$

(b) Si ha
$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \end{vmatrix} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$;
quindi esiste un intorno aperto $U$ di $(\frac{\pi}{2},1)$ tale che $U \longrightarrow f(U), (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ è un diffeomorfismo.

(c) Indichiamo ancora con $f$ tale diffeomorfismo. Si ha $f(\frac{\pi}{2},1) = (0,0)$. Si ha
$(f^{-1})'(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & \pi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\pi & \frac{\pi}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$.
Si ha quindi

$$(f^{-1})'(0,0) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (k_1,k_2) \longrightarrow \left(-2k_1 + k_2, \frac{2}{\pi}k_1 - \frac{2}{\pi}k_2\right) .$$

4. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x,y,z) \longrightarrow (x^2+y^2+z^2, x+y+z, x) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1,5,0)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando $U$, $V$ e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto $U$ di $(1,5,0)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con $f$ tale diffeomorfismo, si determini la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,5,0)\big)$ esprimendola nella forma sopra descritta.

**Risoluzione.**

(a) Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (2x,1,1)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (2y,1,0)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (2z,1,0)$.
Si ha quindi

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

quindi
Si ha quindi

$$f'(1,5,0) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Quindi si ha

$$f'(1,5,0) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (h_1, h_2, h_3) \longrightarrow (2h_1 + 10h_2, h_1 + h_2 + h_3, h_1) .$$

(b) Si ha
$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0;$
quindi esiste un intorno aperto $U$ di $(1,5,0)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$$

è un diffeomorfismo.

(c) Indichiamo ancora con $f$ tale diffeomorfismo. Si ha $f(1,5,0) = (26,6,1)$.
Si ha
$(f^{-1})'(26,6,1) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 10 & -8 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$
Si ha quindi

$$(f^{-1})'(26,6,1) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (k_1, k_2, k_3) \longrightarrow$$

$$\left( k_3, \frac{1}{10}k_1 - \frac{1}{5}k_3, \frac{1}{10}k_1 + k_2 - \frac{4}{5}k_3 \right) .$$

## 14.7 Estremanti relativi

### 14.7.1 Estremanti relativi in $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x^4 + y^4 - xy .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - x \end{matrix} .$$

I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a

$$\begin{cases} y = 4x^3 \\ 4(4x^3)^3 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x^3 \\ 2^8 x^9 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x^3 \\ x(2^8 x^8 - 1) = 0 \end{cases} .$$

Si ha $x = 0$ e $y = 0$, oppure $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$, oppure $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$.

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 \end{array} .$$

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

quindi si ha $\det(\mathcal{H}(f)(0,0)) = -1 < 0$; quindi $(0,0)$ non è un estremante relativo.

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ e } 3 > 0 ;$$

quindi $d^2 f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è strettamente positivo; quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di minimo relativo.

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ e } 3 > 0 ;$$

quindi $d^2 f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ è strettamente positivo; quindi $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di minimo relativo.

2. **Esercizio.** Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^3 - y^2 + xy - y .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x - 1 \end{array} .$$

I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -2y + x - 1 = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a
$\begin{cases} y = -3x^2 \\ -2(-3x^2) + x - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3x^2 \\ 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$ .
Si ha $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1\pm 5}{12}$; quindi $x = \frac{1}{3}$ o $x = -\frac{1}{2}$; quindi $(x, y) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ o $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$ .
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$
Si ha

$$\mathcal{H}(f)(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} ;$$

quindi si ha $\det(\mathcal{H}(f)(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -5 < 0$; quindi $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ non è un estremante relativo.
Si ha

$$\mathcal{H}(f)(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \text{ e } -3 < 0 ;$$

quindi $d^2 f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è strettamente negativo; quindi $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ è un punto di massimo relativo.

3. **Esercizio.** Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 y + xy + 3 .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x$ .
I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a
$\begin{cases} x(x + 1) = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = 0 \text{ o } x = -1 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}$ .

Se $x = 0$ si ha $y = 0$; si trova $(0, 0)$.
Se $x = -1$ si ha $-2y + y = 0$, cioè $-y = 0$, cioè $y = 0$; si trova $(-1, 0)$.

I punti critici di $f$ sono quindi $(0, 0)$ e $(-1, 0)$.

Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x + 11 \end{array} \quad .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 1 \\ 2x + 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0]; ;$$

quindi $(0, 0)$ non è un estremante relativo.

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0]; ;$$

quindi $(-, 0)$ non è un estremante relativo.

Quindi la funzione $f$ non ammette estremanti relativi

4. **Esercizio.** Sia $f$ la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = x \log(x - y) ;$$

   (a) determinare il dominio di $f$;

   (b) determinare e classificare gli estremanti relativi di $f$.

**Risoluzione.**

   (a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x - y > 0\} .$$

(b) Per ogni $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x-y) + \frac{x}{x-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{x-y} \end{array} .$$

I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log(x-y) + \frac{x}{x-y} = 0 \\ -\frac{x}{x-y} = 0 \end{cases} .$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = 0$; si ha quindi $\log(x-y) = 0$; quindi $x - y = 1$; quindi, essendo $x = 0$, si ha $y = -1$.

La funzione $f$ ammette quindi un solo punto critico, dato da $(0, -1)$.

Per ogni $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x-y} + \frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} - \frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x(-1)}{(x-y)^2} = -\frac{x}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{y}{(x-y)^2} \end{array} .$$

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0]; ;$$

quindi $(0, -1)$ non è un estremante relativo.

Quindi la funzione $f$ non ammette estremanti relativi

### 14.7.2 Estremanti relativi in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y - z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - x \end{array} .$$

I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \\ 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Si ha un unico punto critico dato da $(0,0,0)$.

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2 \end{array} .$$

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 \cdot 3 = 4 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ 2 > 0;$$

quindi $d^2 f(0,0,0)$ è strettamente positivo; quindi $(0,0,0)$ è un punto di minimo relativo.

2. **Esercizio.** Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x^2 - y^2 - xz + z .$$

**Risoluzione.** Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x + 1 \end{array} .$$

I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} .$$

Si ha un unico punto critico dato da $(1,0,2)$.

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \end{array} .$$

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(1,0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0;$$

quindi $d^2 f(1,0,2)$ non è nè semidefinito positivo nè semidefinito negativo; quindi $(1,0,2)$ non è un estremante relativo. Quindi la funzione non ammette estremanti relativi.

# Capitolo 15

# Forme differenziali lineari

## 15.1 Forme differenziali esatte

### 15.1.1 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy\ .$$

   **Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^2$. Posto $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2y - y$, per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 1\ ;$$

   quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.

   L'insieme delle primitive di $\omega$ è $\{f + c;\ c \in \mathbf{R}\}$.

2. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x^2y\,dx + (y^2 + x)\,dy\ .$$

   **Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^2$.

   Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x^2 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + x) = 1\ .$$

   Quindi $\omega$ non è chiusa. Quindi $\omega$ non è esatta.

3. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy\ .$$

**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \neq 0\}$. Posto
$f : A \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \frac{x}{y}$, per ogni $(x,y) \in A$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\ ;$$

quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.

L'insieme delle primitive di $\omega$ è dato dall'insieme delle funzioni della forma $f + c$, dove $c$ è una funzione costante su ogni componente connessa di $A$, cioè su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$ e su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y < 0\}$.

4. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^2$. Posto

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \mathrm{Arctg}(xy)\ ,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}y = \frac{y}{1+x^2y^2}$
e
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}x = \frac{x}{1+x^2y^2}$; quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.

L'insieme delle primitive di $\omega$ è $\{f + c;\ c \in \mathbf{R}\}$.

5. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{y}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^2$.

Si ha
$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{1+x^2y^2} = -x\frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$
e $\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{1+x^2y^2} = -y\frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$.

Quindi $\omega$ non è chiusa. Quindi $\omega$ non è esatta.

### 15.1.2 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo determinarne l'insieme delle primitive:
$$ydx + xdy + zdz\ .$$
**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^3$. Posto $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow xy + \frac{z^2}{2}$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = z\ ;$$
quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.
L'insieme delle primitive di $\omega$ è $\{f + c; c \in \mathbf{R}\}$.

2. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:
$$xdx + xdy + dz\ .$$
**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^3$.
Si ha
$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 1\ .$$
Quindi $\omega$ non è chiusa. Quindi $\omega$ non è esatta.

3. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:
$$ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy + dz\ .$$
**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^3$. Posto
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow e^{xy} + z\ ,$$
per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1\ ;$$
quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.
L'insieme delle primitive di $\omega$ è $\{f + c; c \in \mathbf{R}\}$.

4. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:
$$xe^{xy}\, dx + ye^{xy}\, dy + dz\ .$$

**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^3$.

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} = x^2 e^{xy} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x}(ye^{xy}) = y^2 e^{xy} \ .$$

Quindi $\omega$ non è chiusa. Quindi $\omega$ non è esatta.

### 15.1.3 Forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^N$

1. **Esercizio.** Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo determinarne l'insieme delle primitive:

$$ydx + xdy + dz + 2tdt \ .$$

**Risoluzione.** Sia $\omega$ la forma differenziale. Il dominio di $\omega$ è $\mathbf{R}^4$. Posto $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z, t) \longrightarrow xy + z + t^2$, per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) = x,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = 2t \ ;$$

quindi $f$ è una primitiva di $\omega$. Quindi $\omega$ è esatta.

L'insieme delle primitive di $\omega$ è $\{f + c; c \in \mathbf{R}\}$.

## 15.2 Campi di vettori esatti

### 15.2.1 Campi di vettori esatti

1. **Esercizio** Dire se il seguente campo di vettori ammette potenziale:

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{yz}, -\frac{x}{zy^2}, -\frac{x}{yz^2}\right) \ ;$$

in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive.

**Risoluzione** Il dominio di $F$ è l'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; y \neq 0 \text{ e } z \neq 0\}$. Posto
$f : A \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow \frac{x}{yz}$, per ogni $(x, y, z) \in A$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{yz},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{zy^2},\ \frac{\partial}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{yz^2} \ ,$$

cioè $\operatorname{grad} f(x, y, z) = F(x, y, z)$; quindi $f$ è una primitiva di $F$. Quindi $F$ è esatto.

L'insieme delle primitive di $F$ è dato dall'insieme delle funzioni della forma $f + c$, dove $c$ è una funzione costante su ogni componente connessa di $A$, cioè su $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2; y > 0, z > 0\}$, su $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2; y > 0, z < 0\}$, su $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2; y < 0, z > 0\}$ e su $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2; y < 0, z < 0\}$.

# 15.3 Integrale di forme differenziali su traiettorie

## 15.3.1 Integrale di forme differenziali su traiettorie

1. **Esercizio** Calcolare il seguente integrale di forma differenziale su traiettoria

$$\int_\varphi xydx + xydy \ ,$$

dove

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (\cos t, \sin t) \ .$$

**Risoluzione** La funzione $\varphi$ si scrive

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ .$$

Si ha
$\int_\varphi xydx + xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t)\, dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t) + \cos^2 t \sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t) - \cos^2 t(-\sin t)\, dt =$
$\left[-\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left[\sin^3 t + \cos^3 t\right]_0^{\frac{pi}{2}} = -\frac{1}{3}(1-1) = 0.$

# Capitolo 16

# Equazioni implicite

## 16.1 Problema con equazione implicita

### 16.1.1 Problema con equazione implicita in $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Dire se il seguente problema implicito di incognita $y(x)$ ammette in un intorno di 0 una ed una sola soluzione $\varphi$:
$$\begin{cases} \sin(xy) + x + y + x^2 + y^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ;$$
in caso affermativo determinare $\varphi'(0)$.

   **Risoluzione.** Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \sin(xy) + x + y + x^2 + y^2 \ .$$
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy) + 1 + 2y$.

   Poichè $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$, esiste $I$ intervallo aperto contenente 0 tale che su $I$ il problema implicito assegnato ammette una ed una sola soluzione $\varphi$.

   Per ogni $x \in I$ si ha
$\sin(x\varphi(x)) + x + \varphi(x) + x^2 + (\varphi(x))^2 = 0$;
quindi, derivando, per ogni $x \in I$ si ha
$\cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)) + 1 + \varphi'(x) + 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$;
per $x = 0$ si ha $1 + \varphi'(0) = 0$; quindi $\varphi'(0) = -1$.

2. **Esercizio.** Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + e^x - e^y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$

(a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

(b) chiamata $\varphi$ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$.

**Risoluzione.**

(a) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^4 + y^4 + e^x - e^y \ .$$
Si ha $f(0, 0) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$.
Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - e^y$.
Si ha quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$.
Per il teorema di Dini, esiste $I$ intervallo aperto contenente 0 tale che su $I$ il problema implicito assegnato ammette una ed una sola soluzione $\varphi$.

(b) Per ogni $x \in I$ si ha
$x^4 + (\varphi(x))^4 + e^x - e^{\varphi(x)} = 0$;
quindi, derivando, per ogni $x \in I$ si ha
$4x^3 + 4(\varphi(x))^3 + e^x + e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = 0$;
per $x = 0$, essendo $\varphi(0) = 0$, si ha $0 + 0 + e^0 + e^9\varphi'(0) = 0$; quindi $1 - \varphi'(0) = 0$; quindi $\varphi'(0) = 1$.
Per ogni $x \in I$ si ha
$12x^2 + 12(\varphi(x))^2(\varphi'(x))^2 + 4(\varphi(x))3\varphi''(x) + e^x - e^{\varphi(x)}(\varphi'(x))^2 - e^{\varphi(x)}\varphi''(x) = 0$;
per $x = 0$, essendo $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ si ha $1 - 1 + 0 + \varphi''(0) = 0$; quindi $1 - \varphi''(0) = 0$.

### 16.1.2 Problema con una equazione implicita in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x, y)$
$$\begin{cases} x^2 + yz^3 - z = 0 \\ z(0, 2) = 0 \end{cases} ,$$

(a) provare che esiste un aperto connesso su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

(b) chiamata $\varphi$ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 2)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x}(0, 2)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 2)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 2)$.

**Risoluzione.**

(a) Sia
$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + yz^3 - z$.
Si ha $f(0, 2, 0) = 0$.
Si ha

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3yz^2 - 1$;
quindi si ha
$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 2, 0) = -1 \neq 0$;
per il teorema di Dini, esiste un aperto connesso $U$ su cui il problema ammette una ed una sola soluzione $\varphi$.

(b) Per ogni $(x, y) \in U$ si ha
$x^2 + y(\varphi(x, y))^3 - \varphi(x, y)$.
Si ha quindi
$2x + 3y(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0$;
quindi per $(x, y) = (0, 2)$ si ha
$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2) = 0$;
quindi
$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2) = 0$.
Per ogni $(x, y) \in U$ si ha
$(\varphi(x, y))^3 + 3y(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0$;
quindi per $(x, y) = (0, 2)$ si ha
$-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 2) = 0$;
quindi
$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 2) = 0$.
Per ogni $(x, y) \in U$ si ha
$2 + 6y\varphi(x, y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right)^2 + 3y(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = 0$;
quindi per $(x, y) = (0, 2)$ si ha
$2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 2) = 0$;
quindi
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 2) = 2$.
Per ogni $(x, y) \in U$ si ha
$3(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + 6y\varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + 3y(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y)$
$- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$;
quindi per $(x, y) = (0, 2)$ si ha
$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 2) = 0$;
quindi
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 2) = 0$.
Per ogni $(x, y) \in U$ si ha
$3(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + 3(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + 6y\varphi(x, y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right)^2 +$
$3y(\varphi(x, y))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$;
quindi per $(x, y) = (0, 2)$ si ha
$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 2) = 0$;
quindi
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 2) = 0$.

### 16.1.3 Problema con un sistema di due equazioni implicite in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $(y(x), z(x))$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy - z = 0 \\ x^3 - y^2 + xz - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases},$$

   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata $\varphi$ tale soluzione, calcolare $\varphi_1'(0)$ e $\varphi_2'(0)$.

   **Risoluzione.**

   (a) Sia
   $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + y^2 - xy - z, x^3 - y^2 + xz - y)$.
   Si ha $f(0, 0, 0) = (0, 0)$. Si ha
   $\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y - x & -1 \\ -2y - 1 & x \end{pmatrix}$;
   quindi si ha
   $\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
   si ha
   $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;
   per il teorema di Dini, esiste un intervallo aperto $I$ su cui il problema ammette una ed una sola soluzione $\varphi$.

   (b) Per ogni $x \in I$ si ha
   $\begin{cases} x^2 + (\varphi_1(x))^2 - x\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0 \\ x^3 - (\varphi_1(x))^2 + x\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = 0 \end{cases}$;
   quindi si ha
   $\begin{cases} 2x + 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)x\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = 0 \\ 3x^2 - 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) + \varphi_2(x) + x\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x) = 0 \end{cases}$;
   quindi per $x = 0$ si ha
   $\begin{cases} -\varphi_2(0) = 0 \\ -\varphi_1(0) = 0 \end{cases}$;
   quindi si ha $\varphi_1'(0) = 0$ e $\varphi_2'(0) = 0$.

# Capitolo 17

# Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$

## 17.1 Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$

### 17.1.1 Sottovarietà differenziale; spazio tangente, spazio normale, varietà lineare tangente, varietà lineare normale

1. **Esercizio.** Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y \sin(x + z) - x \cos y + \pi = 0\}\ ;$$

   (a) dimostrare che $V$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2;

   (b) dimostrare che $(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) \in V$;

   (c) determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a $V$ in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane;

   (d) determinare una base dello spazio tangente a $V$ in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$.

   **Risoluzione**

   (a) Sia
$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow y \sin(x + z) - x \cos y + \pi\ .$$

   Dimostriamo che $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
   Si ha $g$ di classe $C^1$ e

$$V = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ g(x, y, z) = 0\}\ .$$

   Si ha $g(\pi, 0, 0) = 0$; quindi $V \neq \emptyset$.

Si ha
$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y\cos(x+z) - \cos y$,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \sin(x+z) + x\sin y$,
$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(x+z)$.
Sia $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
La matrice jacobiana di $g$ in $(x, y, z)$ è

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos(x+z) - \cos y & \sin(x+z) + x\sin y & y\cos(x+z) \end{pmatrix}\ .$$

Si ha quindi $g'(x, y, z) = 0$ ($0$ è la matrice $1 \times 3$ nulla) se e solo se

$$\begin{cases} y\cos(x+z) - \cos y = 0 \\ \sin(x+z) + x\sin y = 0 \\ y\cos(x+z) = 0 \end{cases}\ .$$

Si ha

$$\text{rango} g'(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{per } g'(x, y, z) = 0 \\ 1 & \text{per } g'(x, y, x) \neq 0 \end{cases}\ .$$

Per provare che $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$ è quindi sufficiente provare che per ogni $(x, y, z) \in V$ si ha $g'(x, y, z) \neq 0$, cioè che il sistema

$$\begin{cases} y\cos(x+z) - \cos y = 0 \\ \sin(x+z) + x\sin y = 0 \\ y\cos(x+z) = 0 \\ y\sin(x+z) - x\cos y + \pi = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.
Si ha $y\cos(x+z) = 0$ se e solo se $y = 0$ o $\cos(x+z) = 0$.
Se $y = 0$, dalla prima equazione si ricava $-1 = 0$; ciò è assurdo.
Supponiamo $\cos(x+z) - 0$.
Dalla prima equazione si ricava $-\cos 0 = 0$; quindi $(\exists k \in \mathbf{Z})\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Essendo $\cos(x+z) = 0$, si ha $\sin(x+z) = \pm 1$.
Supponiamo $\sin(x+z) = 1$; dalla quarta equazione si ricava

$$\frac{\pi}{2} + k\pi + \pi = 0\ ;$$

quindi

$$\frac{1}{2} + k + 1 = 0\ ;$$

quindi $k = -\frac{3}{2}$; ciò è assurdo.
Supponiamo $\sin(x+z) = -1$; dalla quarta equazione si ricava

$$(\frac{\pi}{2} + k\pi)(-1) + \pi = 0\ ;$$

quindi
$$-\frac{1}{2} - k + 1 = 0\ ;$$
quindi $k = \frac{1}{2}$; ciò è assurdo.

Il sistema non ha dunque soluzioni; ciò prova l'affermazione.

(b) Si ha $g(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) = 0$; quindi $(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) \in V$.

(c) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$\operatorname{grad} g(x, y, z) = (y\cos(x+z) - \cos y, \sin(x+z) + x\sin y, y\cos(x+z))\ .$$
Si ha quindi
$$\operatorname{grad} g(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) = (-1, -1, 0)\ .$$
Una base di $N_{(\pi,0,\frac{\pi}{2})}(V)$ è quindi $(-1,-1,0)$; un'altra base è $(1,1,0)$.

Delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi
$$(x, y, z) = t(1, 1, 0), \quad t \in \mathbf{R}\ ,$$
cioè
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}\ .$$
Delle equazioni parametriche della retta normale sono
$$(x, y, z) = t(1, 1, 0) + (\pi, 0, \frac{\pi}{2}), \quad t \in \mathbf{R}\ ,$$
cioè
$$\begin{cases} x = t + \pi \\ y = t \\ z = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}\ .$$
Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono
$$\big((x, y, z)|(1, 1, 0)\big) = 0\ ,$$
cioè
$$x + y = 0\ .$$
Delle equazioni cartesiane del piano tangente sono
$$\big((x, y, z) - (\pi, 0, \frac{\pi}{2})|(1, 1, 0)\big) = 0\ ,$$
cioè
$$x - \pi + y = 0\ ,$$
cioè
$$x + y = \pi\ .$$

(d) Una base di $N_{(\pi,0,\frac{\pi}{2})}(V)$ è $(1,1,0)$.
I vettori $(1,-1,0)$ e $(0,0,1)$ sono ortogonali a $(1,1,0)$; quindi appartengono a $T_{(\pi,0,\frac{\pi}{2})}(V)$.
Si ha
$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \ .$$
Quindi I vettori $(1,-1,0)$ e $(0,0,1)$ sono linearmente indipendenti.
Quindi
$$((1,-1,0),(0,0,1))$$
è una base di $T_{(\pi,0,\frac{\pi}{2})}(V)$.

2. **Esercizio.** Sia
$$V = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x = 10 - y^2\} \ ;$$

(a) dimostrare che $V$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^2$ differenziale di dimensione 1;

(b) dimostrare che $(1,3) \in V$;

(c) determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, la retta tangente a $V$ in $(1,3)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane;

**Risoluzione**

(a) Sia
$g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x + y^2 - 10.$
Si ha $V \neq \emptyset$ e per ogni $(x,y) \in V$ si ha $\text{rango}(g'(x,y,z)) = \text{rango}\big(1, 2y\big) = 1$.
Quindi $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di equazioni cartesiane $g(x,y) = 0$.

(b) Si ha $g(1,3) = 0$; quindi si ha $(1,3) \in V$.

(c) Per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si ha $\operatorname{grad} g(x,y) = (1,2y)$; si ha quindi $\operatorname{grad} g(1,3) = (1,6)$.
Una base dello spazio normale a $V$ in $(1,3)$ è quindi
$$((1,6)) \ .$$
Delle equazioni parametriche dello spazio normale in forma vettoriale sono quindi
$$(x,y) = t(1,6), \quad t \in \mathbf{R} \ ;$$
in forma scalare sono
$$\begin{cases} x = t \\ y = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R} \ .$$

Delle equazioni parametriche della retta normale in forma vettoriale sono quindi

$$(x,y,z) = t(1,6) + (1,3), \quad t \in \mathbf{R} \; ;$$

in forma scalare sono

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 6t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R} \; .$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono quindi

$$((x,y)|(1,6) = 0 \; ,$$

cioè

$$x + 6y = 0 \; .$$

Delle equazioni cartesiane della retta tangente sono quindi

$$((x,y) - (1,3)|(1,6) = 0 \; ,$$

cioè

$$(x-1) + 6(y-3) = 0 \; ,$$

cioè

$$x + 6y - 19 = 0 \; .$$

3. **Esercizio.** Sia

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \; x^2 - xy + z^2 - 1 = 0, \; xz - 1 = 0\} \; ;$$

(a) dimostrare che $V$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;

(b) dimostrare che $(1,1,1) \in V$;

(c) determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a $V$ in $(1,1,1)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane;

(d) determinare una base dello spazio tangente a $V$ in $(1,1,1)$.

**Risoluzione**

(a) Sia

$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x^2 - xy + z^2 - 1, xz - 1) \; .$$

Dimostriamo che $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.

Si ha $g$ di classe $C^1$ e

$$V = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \; g(x,y,z) = 0\} \; .$$

Si ha $g(1,1,1) = (0,0)$; quindi $V \neq \emptyset$.

Si ha
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = (2xy - y, z)$,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (-x, 0)$,
$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (2z, x)$.
Sia $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
La matrice jacobiana di $g$ in $(x,y,z)$ è

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x & 2z \\ z & 0 & x \end{pmatrix} .$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -x & 2z \\ 0 & x \end{vmatrix} = -x^2 \ ;$$

si ha quindi

$$\begin{vmatrix} -x & 2z \\ 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

se e solo se $x = 0$.
Per $x \neq 0$ si ha quindi rango$g'(x,y,z) = 2$.
Per $x = 0$, si ha $g_2(x,y,z) = -1$; quindi si ha $(x,y,z) \notin V$.
Si ha quindi

$$(\forall (x,y,z) = inV) \ \text{rango} g'(x,y,z) = 2 \ .$$

Quindi $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.

(b) Si ha $g(1,1,1) = (0,0)$; quindi $(1,1,1) \in V$.

(c) Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
grad $g_1(x,y,z) = (2x - y, -x, 2z)$
e
grad $g_2(x,y,z) = (z, 0, x)$.
Si ha quindi grad $g_1(1,1,1) = (1,-1,2)$
e
grad $g_2(1,1,1) = (1,0,1)$.
Una base di $N_{(1,1,1)}(V)$ è quindi

$$((1,-1,1),(1,0,1)) \ .$$

Delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x,y,z) = u(1,-1,2) + v(1,0,1), \quad u,v \in \mathbf{R} \ ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = -u \\ z = 2u + v \end{cases} , \quad u,v \in \mathbf{R} \ .$$

Delle equazioni parametriche del piano normale sono quindi

$$(x,y,z) = u(1,-1,2) + v(1,0,1) + (1,1,1), \quad u,v \in \mathbf{R} \, ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = u + v + 1 \\ y = -u + 1 \\ z = 2u + v + 1 \end{cases} , \quad u,v \in \mathbf{R} \, .$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$\begin{cases} \big(x,y,z)|,(1,-1,2)\big) = 0 \\ \big(x,y,z)|,(1,0,1)\big) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} .$$

Delle equazioni cartesiane della retta tangente sono

$$\begin{cases} \big(x,y,z) - (1,1,1)|,(1,-1,2)\big) = 0 \\ \big(x,y,z) - (1,1,1)|,(1,0,1)\big) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x - 1 - (y-1) + 2(z-1) = 0 \\ x - 1 + z - 1 = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} .$$

(d) Una vettore non nullo ortogonale allo spazio tangente è dato da

$$(1,-1,2)\bar{\wedge}(1,0,1) \, ,$$

cioè

$$\left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \right) = (1,1,-1) \, .$$

Quindi una base per lo spazio tangente è $(1,1,-1)$.

4. **Esercizio.** Sia

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y\cos(xz + 2y) = 1,\ 2x^2y - xz^2 = 6\} \, ;$$

(a) dimostrare che $(-1,1,2) \in V$;

(b) dimostrare che esiste un intorno aperto $U$ di $(-1,1,2)$ tale che $V \cap U$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;

(c) determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a $V$ in $(-1,1,2)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane;

(d) determinare una base dello spazio tangente a $V$ in $(-1,1,2)$.

**Risoluzione**

(a) Si ha $1\cos((-1)\cdot 2+2\cdot 1) = \cos(-2+2) = \cos 0 = 1$ e $2(-1)^2\cdot 1-(-1)\cdot 2^2 = 2+4 = 6$.
Quindi $(-1,1,2) \in V$.

(b) Sia

$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (y\cos(xz+2y)-1, 2x^2y-xz^2-6)\ .$$

Si ha $g$ di classe $C^1$ e

$$V = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ g(x,y,z) = 0\}\ .$$

Si ha
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = (-yz\sin(xz+2y), 4xy-z^2)$,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (\cos(xz+2y)-2y\sin(xz+2y)x, 2x^2)$,
$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (-yz\sin(xz+2y), -2xz)$.
Sia $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
La matrice jacobiana di $g$ in $(x,y,z)$ è

$$g'(x,y,z) =$$

$$\left(\begin{array}{lll} -yz\sin(xz+2y) & \cos(xz+2y)-2y\sin(xz+2y) & -yx\sin(xz+2y) \\ 4xy-z^2 & 2x^2 & -2xz \end{array}\right).$$

Si ha quindi

$$g'(-1,1,2) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Si ha

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{array}\right| = 4 \neq 0\ .$$

La funzione

$$\alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(x,y,z) \longrightarrow \left|\begin{array}{ll} \cos(xz+2y)-2y\sin(xz+2y) & -yx\sin(xz+2y) \\ 2x^2 & -2xz \end{array}\right|$$

è continua e si ha

$$\alpha(-1,1,2) = \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{array} \neq 0\ .$$

Quindi esiste $U$ intorno aperto di $(-1, 1, 2)$ tale che per ogni $(x, y, z) \in U$ si ha $\alpha(x, y, z) =\neq 0$.
Per ogni $(x, y, z) = inU$ si ha quindi rango$g'(x, y, z) = 2$.
Sia $f = g|U$.
Si ha

$$V \cap U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ f(x, y, z) = (0, 0)\} .$$

Essendo $(-1, 1, 2) \in V \cap U$ si ha $V \cap U \neq \emptyset$.
$f$ è di classe $C^1$ e per ogni $(x, y, z) \in U$ si ha rango$f'(x, y, z) =$ rango$g'(x, y, z) = 2$.
Quindi $V \cap U$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $f(x, y, z) = 0$.

(c) Per ogni $(x, y, z) \in U$ si ha

$$\operatorname{grad} f_1(-1, 1, 2) = \operatorname{grad} g_1(-1, 1, 2) = (0, 1, 0)$$

e

$$\operatorname{grad} f_1(-1, 1, 2) = \operatorname{grad} 2_1(-1, 1, 2) = (-8, 2, 4) .$$

Una base di $N_{(-1,1,2)}(V \cap U)$ è quindi

$$((0, 1, 0), (-8, 2, 4)) .$$

Una altra base è quindi

$$((0, 1, 0), (-4, 1, 2)) .$$

Delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x, y, z) = u(0, 1, 0) + v(-4, 1, 2), \quad u, v \in \mathbf{R} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = -4v \\ y = u + v \\ z = 2v \end{cases} , \quad u, v \in \mathbf{R} .$$

Delle equazioni parametriche del piano normale sono quindi

$$(x, y, z) = u(0, 1, 0) + v(-4, 1, 2) + (-1, 1, 2), \quad u, v \in \mathbf{R} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = -4v - 1 \\ y = u + v + 1 \\ z = 2v + 2 \end{cases} , \quad u, v \in \mathbf{R} .$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$\begin{cases} \big(x, y, z)|, (0, 1, 0)\big) = 0 \\ \big(x, y, z)|, (-4, 1, 2)\big) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} y = 0 \\ -4x + y + 2z = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} .$$

Delle equazioni cartesiane della retta tangente sono

$$\begin{cases} \big(x, y, z) - (-1, 1, 2)|, (0, 1, 0)\big) = 0 \\ \big(x, y, z) - (-1, 1, 2)|, (-4, 1, 2)\big) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ -4(x + 1) + y - 1 + 2(z - 2) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2(x + 1) - (z - 2) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases} .$$

(d) Una vettore non nu;;o ortogonale allo spazio tangente è dato da

$$(0, 1, 0)\bar{\wedge}(-4, 1, 2) ,$$

cioè

$$\left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \right) = (2, 0, 4) .$$

Quindi una base per lo spazio tangente è $(2, 0, 4)$.
Un'altra base è $(1, 0, 2)$.

### 17.1.2 Spazio tangente, spazio normale, varietà lineare tangente, varietà lineare normale ad una sottovarietà in forma parametrica

1. **Esercizio.** Trovare delle equazioni parametriche **o** cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t^5 \\ y = 5t + 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases} , \qquad t \in \mathbf{R}$$

nel punto corrispondente a $t = 1$.

**Risoluzione** Sia $V$ la curva e sia $\varphi$ la parametrizzazione di $V$ assegnata.

Si ha $\varphi(1) = (3, 6, -1)$.

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $\varphi'(t) = (15t^4, 5, -3)$; si ha quindi $\varphi'(1) = (15, 5, -3)$.

Una base dello spazio tangente a $V$ in $(3, 6, -1)$ è quindi

$$((15, 5, -3)) .$$

Delle equazioni parametriche dello spazio tangente in forma vettoriale sono quindi

$$(x, y, z) = t(15, 5, -3), \quad t \in \mathbf{R} ;$$

in forma scalare sono

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 5t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R} .$$

Delle equazioni parametriche della retta tangente in forma vettoriale sono quindi

$$(x, y, z) = t(15, 5, -3) + (3, 6, -1), \quad t \in \mathbf{R} ;$$

in forma scalare sono

$$\begin{cases} x = 15t + 3 \\ y = 5t + 6 \\ z = -3t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R} .$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio normale sono quindi

$$((x, y, z)|(15, 5, -3) = 0 ,$$

cioè

$$15x + 5y - 3z = 0 .$$

Delle equazioni cartesiane del piano normale sono quindi

$$((x, y, z) - (3, 6, -1)|(15, 5, -3) = 0 ,$$

cioè

$$15(x - 3) + 5(y - 6) - 3(z + 1) = 0 ,$$

cioè

$$15x + 5y - 3z - 78 = 0 .$$

### 17.1.3 Sottovarietà e derivate direzionali

1. **Esercizio.**

Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + 6xy - z^3 ;$$

sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 3x^2 + 6xy^2 - z^3 = 1\} ;$$

(a) dimostrare che $V$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2;

(b) dimostrare che $(1,-1,2) \in V$;

(c) determinare lo spazio normale a $V$ in $(1,-1,2)$;

(d) determinare il versore normale a $V$ in $(1,-1,2)$ $\nu$ tale che $\nu_3 > 0$;

(e) calcolare $D_\nu f(1,-1,2)$.

**Risoluzione**

(a) Sia
$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 3x^2 + 6xy^2 - z^3 - 1 \; .$$
Si ha
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\; g(x,y,z) = 0\} \; .$$
La funzione $g$ è di classe $C^1$. Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, indicando con $g'(x,y,z)$ la matrice jacobiana, si ha
$$g'(x,y,z) = (6x + 6y^2, 12xy, -3z^2) \; ;$$
Si ha rango$(g'(x,y,z) = 0$ se e solo se
$$\begin{cases} 6x + 6y^2 = 0 \\ 12xy = 0 \\ -3z^2 = 0 \end{cases} \; ;$$
Dalla terza equazione si ricava $z = 0$; dalla seconda $x = 0$ o $y = 0$; se $x = 0$, dalla prima si ricava $y = 0$; se $y = 0$, dalla prima si ricava $x = 0$; il sistema è quindi soddisfatto se e solo se $(x,y,z) = (0,0,0)$.
Si ha quindi rango$(g'(x,y,z) = 0$ se e solo se $(x,y,z) = (0,0,0)$; per $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ si ha rango$(g'(x,y,z) = 1$.
Si ha $(0,0,0) \notin V$; per ogni $(x,y,z) \in V$ si ha quindi rango$(g'(x,y,z) = 1$.
Da ciò segue che $V$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.

(b) Si ha $g(1,-1,2) = 3 + 6 - 8 - 1 = 0$; quindi si ha $(1,-1,2) = inV$.

(c) Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha
$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (6x + 6y^2, 12xy, -3z^2) \; .$$
Si ha quindi
$$\operatorname{grad} g(1,-1,2) = (12, -12xy, -12) \; .$$
Quindi $((12,-12xy,-12))$ è una base dello spazio normale a $V$ in $(1,-1,2)$; un'altra base è $(1,-1,-1)$.
Lo spazio normale a $V$ in $(1,-1,2)$; è quindi
$$\{t(1,-1,-1);\; t \in \mathbf{R}\} \; .$$

(d) Si ha $\|(1,-1,-1)\| = \sqrt{3}$. i versori normali a $V$ in $(1,-1,-1)$ sono quindi

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\ .$$

Si ha quindi

$$\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

(e) Per ogni $(x,y,z)\mathbf{R}^3$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+6y$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 6x$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3z^3$.
Si ha quindi

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(2x+6y, 6x, -3z^2\right)\ .$$

Si ha quindi

$$\operatorname{grad} f(1,-1,2) = (-4,6,-12)\ .$$

Si ha quindi

$$df(1,-1,2) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (h_1,h_2,h_3) \longrightarrow -4h+1+6h_2-12h_3\ .$$

Si ha quindi

$$D_\nu f(1,-1,2) = df(1,-1,2)(\nu) = -4(\frac{1}{\sqrt{3}}) + 6\frac{1}{\sqrt{3}} - 12\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(4+6=12) = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\ .$$

## 17.2 Massimi e minimi

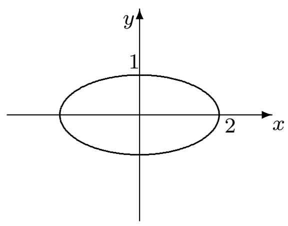
### 17.2.1 Massimi e minimi di funzioni di due variabili

1. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 2x - y$$

in caso affermativo, determinarli.

**Risoluzione** Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo



Sia $D$ il dominio di $f$.

Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.

Consideriamo $f$ su $\overset{\circ}{D}$.

Per ogni $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$.

Quindi $(x,y) \notin \overset{\circ}{D}$. Quindi $E \subset \mathrm{Fr}\,(D)$.

Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$. Quindi $\mathrm{Fr}\,(D)$ è una varietà $V$ di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1. Sia
$g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$;
la varietà $V$ ha equazione cartesiana $g(x,y) = 0$. Se $(x,y) \in \mathrm{Fr}\,(D)$ è un punto di massimo o di minimo di $f$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x,y) = \lambda \mathrm{grad}\, g(x,y)$;
si ha allora
$(2,-1) = \lambda(\frac{x}{2}, 2y)$;
quindi si ha

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{2}\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} .$$

Si ha $\frac{17}{4} = \lambda^2$; quindi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Per $\lambda = \frac{\sqrt{17}}{2}$ si ha $(x,y) = \left(\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ si ha $(x,y) = \left(-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) \right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{17}{\sqrt{17}}$,
$f\left(-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{17}{\sqrt{17}}$.
Quindi si ha $\max(f) = \frac{17}{\sqrt{17}}$ e $\min(f) = -\frac{17}{\sqrt{17}}$.

2. **Esercizio.** Data la funzione

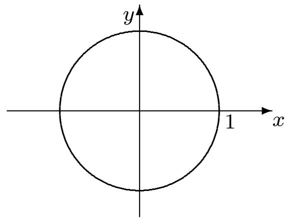
$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 3x^2 - 4xy ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo
Sia $D$ il dominio di $f$.




(b) Sia $E$ l'insieme degli estremanti di $f$.
Sia $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 4y$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x$.
Si ha $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$ se e solo se
$\begin{cases} 6x - 4y = 0 \\ -4x = 0 \end{cases}$;
quindi se e solo se $(x, y) = (0, 0)$.
Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} \subset \{(0, 0)\} .$$

Sia $(x, y) \in \operatorname{Fr}(D)$.
Si ha $\operatorname{Fr}(D) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.
Sia
$g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$.
Identifichiamo $f$ con la funzione
$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x^2 + 4xy$.
Se $(x, y) \in E \cap \operatorname{Fr}(D)$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} g(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y)$,
quindi tale che
$(6x - 4y, -4x) = \lambda(2x, 2y)$,
quindi tale che
$\begin{cases} 6x - 4y = 2\lambda x \\ -4x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
quindi tale che
$\begin{cases} 3x - 2y = \lambda x \\ -2x = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.
Si ha $x = -\frac{\lambda y}{2}$; quindi
$3(-\frac{\lambda y}{2}) - 2y = \lambda(-\frac{\lambda y}{2})$;

quindi
$3\lambda y + 4y = \lambda^2 y$;
quindi
$y(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$.
Se $y = 0$, si ha $x = 0$; ciò è incompatibile con la condizione $x^2 + y^2 = 1$; si ha quindi $y \neq 0$.
Si ha quindi
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
quindi
$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2}$
quindi
$\lambda = 4$ o $\lambda = -1$.
Per $\lambda = 4$, si ha $-2x = 4y$; quindi $x = -2y$; quindi $(-2y)^2 + y^2 = 1$; quindi $4y^2 + y^2 = 1$; quindi $5y^2 = 1$; quindi $y^2 = \frac{1}{5}$; quindi $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Per $y = \frac{\sqrt{5}}{5}$, si ha $x = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$; quindi $(x, y) = (-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$.
Per $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, si ha $x = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; quindi $(x, y) = (\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$.
Per $\lambda = -1$, si ha $-2x = -y$; quindi $y = 2x$; quindi $x^2 + (2x)^2 = 1$; quindi $x^2 + 4x^2 = 1$; quindi $5x^2 = 1$; quindi $x^2 = \frac{1}{5}$; quindi $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Per $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, si ha $y = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; quindi $(x, y) = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$.
Per $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, si ha $y = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$; quindi $(x, y) = (-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})$.
Si ha quindi

$$E \cap \mathrm{Fr}\,(D) \subset$$
$$\{(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}), (\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}), (-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})\}\ .$$

Si ha quindi

$$E \subset \{(0,0), (-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}), (\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}), (-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})\}\ .$$

Si ha
$f(0,0) = 0$,
$f(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}) = 3\frac{4}{5} + 4\frac{2}{5} = \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = 4$,
$f((\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5}) = 4$,
$f((\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}) = 3\frac{1}{5} - 4\frac{2}{5} = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$,
$f(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}) = 1$.
Si ha quindi

$$\max(f) = 4 \quad \min(f) = -1.$$

3. **Esercizio.** Data la funzione

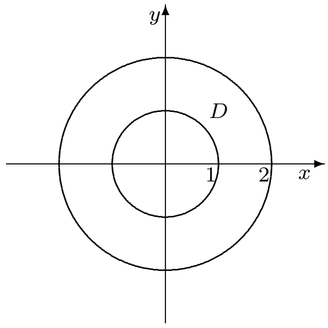
$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 2y\ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D$ il dominio di $f$.
Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo




(b) Sia $E$ l'insieme degli estremanti di $f$.
Sia $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \neq 0$.
Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset .$$

Sia
$F_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$,
$F_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2$.
Sia
$g_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 4$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g_1(x, y) = 0$.
Identifichiamo $f$ con la funzione
$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 2y$.
Se $(x, y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g_1(x, y)$, cioè tale che
$(5, -2) = \lambda(2x, 2y)$, cioè tale che
$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} .$$
Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{5}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$; quindi
$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4$; quindi
$29 = 16\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{29}{16}$; quindi $\lambda = \pm\frac{29}{4}$.

Per $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{4}$ si ha
$x = \frac{5}{2}\frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{10\sqrt{29}}{29}$ e
$y = -\frac{4}{\sqrt{29}} = -\frac{4\sqrt{29}}{29}$;
si ha quindi $(x, y) = \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right)$.
Per $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{4}$ si ha
$(x, y) = \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right)$.
Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right) \right\} .$$

Sia
$g_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$.
Se $(x, y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g_2(x, y)$, cioè tale che
$(5, -2) = \lambda(2x, 2y)$, cioè tale che
$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.
Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{5}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$; quindi
$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$; quindi
$29 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{29}{4}$; quindi $\lambda = \pm\frac{29}{2}$.
Per $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{2}$ si ha
$x = \frac{5}{2}\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ e
$y = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$;
si ha quindi $(x, y) = \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)$.
Per $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{2}$ si ha
$(x, y) = \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right)$.
Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right), \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right), \right.$$

$$\left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right)\right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right) = \frac{50\sqrt{29}}{20} + \frac{8\sqrt{29}}{29} = \frac{58\sqrt{29}}{29} = 2\sqrt{29}$,
$f\left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right) = -2\sqrt{29}$,
$f\left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = \frac{25\sqrt{29}}{20} + \frac{4\sqrt{29}}{29} = \sqrt{29}$,
$f\left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -\sqrt{29}$.
Si ha quindi

$$\max(f) = 2\sqrt{29} \quad \min(f) = -2\sqrt{29}.$$

4. **Esercizio.** Data la funzione

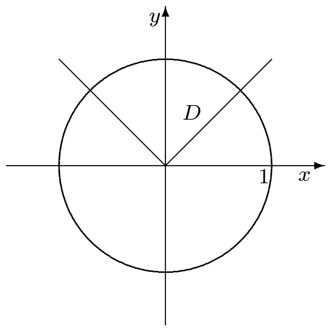
$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1,\ -y \le x \le y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 2x+3y ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D$ il dominio di $f$.
Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo




(b) Sia $E$ l'insieme degli estremanti di $f$.
Sia $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \ne 0$.
Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset .$$

La retta $y = x$ interseca la circonferenza $x^2+y^2 = 1$ nei punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

La retta $y = -x$ interseca la circonferenza $x^2+y^2 = 1$ nei punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Sia
$F_1 = ](0,0),(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})[$,
$F_2 = ](0,0),(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})[$,
$F_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2},\ y > 0\}$,
$F_4 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
$F_5 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5$.

Identifichiamo $f$ con la funzione
$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x + 3y$.

Sia
$g : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x - y$.

$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y) = 0$.

Se $(x, y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y)$, cioè tale che
$(2, 3) = \lambda(1, -1)$; si ha $2 = \lambda$ e $3 = -\lambda$; quindi $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$; ciò è assurdo.

Si ha quindi
$$E \cap F_1 = \emptyset\ .$$

Sia
$g : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x + y$.

$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y) = 0$.

Se $(x, y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y)$, cioè tale che
$(2, 3) = \lambda(1, 1)$; si ha $2 = \lambda$ e $3 = \lambda$; ciò è assurdo.

Si ha quindi
$$E \cap F_2 = \emptyset\ .$$

Sia
$g : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2},\ y > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$.

$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y) = 0$.

Se $(x, y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y)$, cioè tale che
$(2, 3) = \lambda(2x, 2)$ cioè tale che

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y > 0 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{1}{\lambda}$, $y = \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda}$; quindi
$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$; quindi
$13 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{\sqrt{13}}{4}$; quindi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$.
Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha
$x = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ e
$y = \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Si ha $\frac{2\sqrt{13}}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ se e solo se $\frac{4}{13} < \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $8 < 13$; quindi

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$$

soddisfa il sistema scritto sopra.
Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha
$y = -\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{13}} < 0$; non si ottiene quindi alcuna soluzione del sistema scritto sopra.
Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{ \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right), (0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{4\sqrt{13}}{13} + \frac{9\sqrt{13}}{13} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}$,
$f(0,0) = 0$,
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$,
$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Si ha $\sqrt{13} > \frac{5}{2}\sqrt{2}$ se e solo se $2\sqrt{13} > 5\sqrt{2}$; quindi se e solo se $4 \cdot 13 > 25 \cdot 2$; quindi se e solo se $52 > 50$; ciò è vero.
Si ha quindi

$$\max(f) = \sqrt{13} \quad \min(f) = 0 .$$

### 17.2.2 Massimi e minimi di funzioni di tre variabili

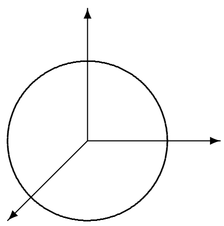
1. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 2x - y + z$$

in caso affermativo, determinarli.

**Risoluzione.** Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo

Sia $D$ il dominio di $f$.



Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.

Consideriamo $f$ su $\overset{\circ}{D}$.

Per ogni $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2$.

Quindi $(x, y, z) \notin \overset{\circ}{D}$. Quindi $E \subset \mathrm{Fr}\,(D)$.

Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Quindi $\mathrm{Fr}\,(D)$ è una varietà $V$ di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2. Sia
$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1$;
la varietà $V$ ha equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$. Se $(x, y, z) \in \mathrm{Fr}\,(D)$ è un punto di massimo o di minimo di $f$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda \mathrm{grad}\, g(x, y, z)$;
si ha allora
$(2, -1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z)$;
quindi si ha

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

Si ha $6 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Per $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $(x, y, z) = (\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}})$.

Per $\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $(x, y, z) = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}})$.

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left( \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \right), \left( -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\} .$$

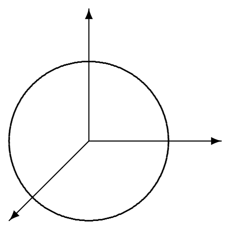
Si ha
$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$,
$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\sqrt{6}$.
Quindi si ha $\max(f) = \sqrt{6}$, $\min(f) = -\sqrt{6}$.

2. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x - y + z$$

in caso affermativo, determinarli.

**Risoluzione.** Sia $V$ il dominio di $f$. L'insieme $V$ è la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.



Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$. L'insieme $V$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2. Sia
$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1$;
la varietà $V$ ha equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se $(x, y, x) \in E$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$;
si ha allora
$(1, -1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z)$;
quindi si ha

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

Si ha $3 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} .$$

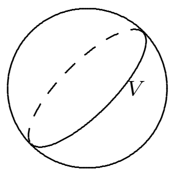
Si ha
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$,
$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}}$.
Quindi si ha $\max(f) = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\min(f) = -\frac{3}{\sqrt{3}}$.

3. **Esercizio.** Dire se esistono il massimo ed il minimo della seguente funzione:

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x+y+z = 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x-y+z$$

in caso affermativo, determinarli.

**Risoluzione.** Sia $V$ il dominio di $f$. L'insieme $V$ è il cerchio chiuso intersezione della sfera sferica $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con il piano $x+y+z = 0$. Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.




Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x + y + z = 0\}$ e $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$; si ha $V = S \cup \Gamma$.

Consideriamo $f$ su $S$. L'insieme $S$ è una sottovarietá di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2. Sia
$g : \{x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x + y + z$;
la varietà $S$ ha equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se $(x, y, x) \in E \cap S$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$;
si ha allora
$(1, -1, 1) = \lambda(1, 1, 1)$;
quindi si ha

$\begin{cases} 1 = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$;
ciò è assurdo; si ha quindi $E \cap S = \emptyset$.

Consideriamo $f$ su $\Gamma$. L'insieme $\Gamma$ è una sottovarietá di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1. Sia
$h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z)$;
la varietà $S$ ha equazione cartesiana $h(x, y, z) = 0$.

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se $(x, y, x) \in E \cap \Gamma$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} h_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} h_2(x, y, z)$;
si ha allora
$(1, -1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1, 1, 1)$;
quindi si ha

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ -1 = 2\lambda y + \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases};$$

si ha $\lambda \neq 0$ e
$\begin{cases} x = \frac{1-\mu}{2\lambda} \\ y = \frac{-1-\mu}{2\lambda} \\ z = \frac{1-\mu}{2\lambda} \end{cases}$;
sostituendo nella quinta equazione, si ha quindi
$\frac{1-\mu}{2\lambda} + \frac{-1-\mu}{2\lambda} + \frac{1-\mu}{2\lambda} = 0$;
quindi
$1 - \mu - 1 - \mu + 1 - \mu = 0$;
quindi
$-3\mu + 1 = 0$;
quindi
$\mu = \frac{1}{3}$; si ha quindi $x = \frac{1-\frac{1}{3}}{2\lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{2\lambda} = \frac{1}{3\lambda}$;
$y = \frac{-1-\frac{1}{3}}{2\lambda} = \frac{-\frac{4}{3}}{2\lambda} = -\frac{2}{3\lambda}$;
$z = \frac{1-\frac{1}{3}}{2\lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{2\lambda} = \frac{1}{3\lambda}$;
sostituendo nella quarta equazione sopra, si ha quindi
$\frac{1}{9\lambda^2} + \frac{4}{9\lambda} + \frac{1}{9\lambda} = 1$;
quindi
$6 = 9\lambda^2$;
quindi
$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;
per $\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$ si ha quindi
$x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$;
$y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{2\sqrt{6}}{6}$;

$z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$;
per $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ si ha quindi
$x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$;
$y = \frac{2\sqrt{6}}{6}$;
$z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$;
si ha quindi

$$E = E \cap \Gamma \subset \left\{ \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$,
$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}, 0\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{6}$

Quindi si ha $\max(f) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $\min(f) = -\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

4. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z^2 + 1,\ -1 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

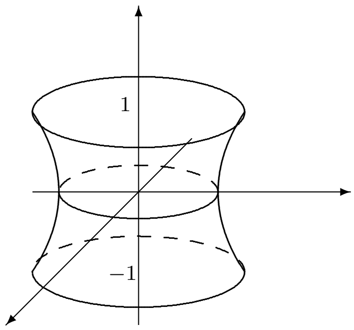
$$(x, y, z) \longrightarrow 5x - 2y + 3z\ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D$ il dominio di $f$. Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.




(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.

Sia $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}$.

Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 5 \neq 0$; si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset \,.$$

Sia
$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 = z^2+1,\ -1 < z < 1\}$,
$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 < 2,\ z = 1\}$,
$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 < 2,\ z = -1\}$,
$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 = z^2+1,\ z = 1\}$,
$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 = z^2+1,\ z = -1\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5$.
Sia
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ -1 < z < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x^2+y^2-z^2-1$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 5x - 2y + 3z$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \lambda \mathrm{grad}\, g(x,y,z)$,
cioè tale che $(5,-2,3) = \lambda(2x,2y,-2z)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2+1 \\ -1 < z < 1 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema sopra non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{5}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{3}{2\lambda} \,.$$

Quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + 1 \,;$$

quindi

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \,;$$

quindi $20 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = 5$; quindi $\lambda = \pm\sqrt{5}$.
Per $\lambda = \sqrt{5}$, si ha $x = \frac{5}{2\sqrt{5}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $z = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$.
Si ha $-1 < -\frac{3}{2\sqrt{5}}$ in quanto ciò equivale a $3 < 2\sqrt{5}$, ciè a $9 < 20$.
Si trova quindi

$$(x,y,z) = \left(\frac{5}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) \,.$$

Per $\lambda = -\sqrt{5}$, si ha $x = -\frac{5}{2\sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{3}{2\sqrt{5}}$.
Si ha $\frac{3}{2\sqrt{5}} < 1$ in quanto ciò equivale a $3 < 2\sqrt{5}$, ciè a $9 < 20$.
Si trova quindi

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) .$$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{5}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) \right\} .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 < 2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z - 1$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(5, -2, 3) = \lambda(0, 0, 1)$.
Si trova $5 = 0$; ciò è assurdo. Quindi si ha

$$E \cap F_2 = \emptyset .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 < 2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z + 1$.
$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_3$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(5, -2, 3) = \lambda(0, 0, 1)$.
Si trova $5 = 0$; ciò è assurdo. Quindi si ha

$$E \cap F_3 = \emptyset .$$

Sia ora
$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + y^2 - z^2 - 1, z - 1)$.
$F_4$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_4$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(5, -2, 3) = \lambda(2x, 2y, -2z) + \mu(0, 0, 1)$,
cioè tale che

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = -2\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ z = 1 \end{cases} ,$$

cioè tale che

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = -2\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema sopra non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{5}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda} .$$

Quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 2 ;$$

quindi $\frac{29}{4\lambda^2} = 2$; quindi $\lambda^2 = \frac{29}{8}$; quindi $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$.
Per $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$, si ha $x = 5\sqrt{\frac{2}{29}}$, $y = -2\sqrt{\frac{2}{29}}$, $z = 1$.
Si trova quindi

$$(x, y, z) = \left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right) .$$

Per $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$, si ha $x = -5\sqrt{\frac{2}{29}}$, $y = 2\sqrt{\frac{2}{29}}$, $z = 1$.
Si trova quindi

$$(x, y, z) = \left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right) .$$

Si ha quindi

$$E \cap F_4 \subset \left\{ \left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right), \left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right) \right\} .$$

Sia ora
$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + y^2 - z^2 - 1, z + 1)$.
$F_5$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_5$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda \mathrm{grad}\, g_1(x, y, z) + \mu \mathrm{grad}\, g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(5, -2, 3) = \lambda(2x, 2y, -2z) + \mu(0, 0, 1)$,
cioè tale che

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = -2\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ z = -1 \end{cases} ,$$

cioè tale che

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = -2\lambda z + \mu \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = -1 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema sopra non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{5}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda} .$$

Quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 2 ;$$

quindi $\frac{29}{4\lambda^2} = 2$; quindi $\lambda^2 = \frac{29}{8}$; quindi $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$.
Per $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$, si ha $x = 5\sqrt{\frac{2}{29}}$, $y = -2\sqrt{\frac{2}{29}}$, $z = -1$.
Si trova quindi

$$(x, y, z) = \left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right) .$$

Per $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}}$, si ha $x = -5\sqrt{\frac{2}{29}}$, $y = 2\sqrt{\frac{2}{29}}$, $z = -1$.
Si trova quindi

$$(x, y, z) = \left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right) .$$

Si ha quindi

$$E \cap F_4 \subset \left\{\left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right), \left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right)\right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{\left(\frac{5}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right),\right.$$

$$\left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right), \left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right), \left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right),$$

$$\left.\left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right)\right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{5}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5}$,

$f\left(-\frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) = -2\sqrt{5}$,
$f\left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right) = \sqrt{58} + 3$,
$f\left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, 1\right) = -\sqrt{58} + 3$,
$f\left(5\sqrt{\frac{2}{29}}, -2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right) = \sqrt{58} - 3$,
$f\left(-5\sqrt{\frac{2}{29}}, 2\sqrt{\frac{2}{29}}, -1\right) = -\sqrt{58} - 3$.
Si ha $2\sqrt{5} < \sqrt{58} + 3$: infatti ciò equivale a $20 < 58 + 6\sqrt{58} + 9$, e ciò è vero.
Quindi si ha $\max(f) = \sqrt{58} + 3$, $\min(f) = -\sqrt{58} - 3$.

5. **Esercizio.** Data la funzione

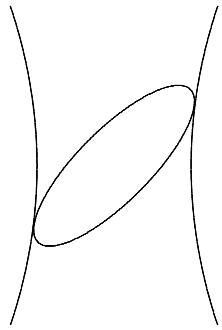
$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 \leq z^2 + 1,\ x + y + z = 0\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(x, y, z) \longrightarrow 2x - y + z\ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1,\ x + y + z = 0\}\ .$$
Essendo $C$ intersezione dell'iperboloide $4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1$ e del piano $x + y + z = 0$, $C$ è una conica.
Si ha $(x, y, z) \in C$ se e solo se
$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = (-x - y)^2 + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$,
cioè $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.
La conica $C$ è quindi l'intersezione del iperboloide $4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1$ e del piano $x + y + z = 0$.
Si ha $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$.
Quindi nel piano $xy$ la conica $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1$ è un'ellisse. Quindi nello spazio $xyz$ il cilindro $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1$ è un cilindro ellittico. Essendo il piano $x + y + z = 0$ non parallelo all'asse del cilindro, la conica $C$ è un'ellisse.
Sia $D$ il dominio di $f$; $D$ è la regione del piano $x + y + z = 1$ limitata dall'ellisse $C$. Quindi $D$ è compatto.
Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.



(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.
Svolgiamo la seconda parte dell'esercizio in due modi

i. $1^o$ modo.
Sia
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 < z^2 + 1,\ x + y + x = 0\}$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1,\ x + y + z = 0\}$.
Si ha $D = F_1 \cup F_2$.
Sia
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4x^2 + 4y^2 < z^2 + 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x + y + z$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 2x - y + z$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(2, -1, 1) = \lambda(1, 1, 1)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ -1 = \lambda \\ 1 = \lambda \end{cases} .$$

Ciò è assurdo. Si ha quindi

$$F_1 \cap E = \emptyset .$$

Sia
$h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1, x + y + z)$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $\begin{cases} h_g(x, y, z) = 0 \\ h_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} h_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} h_2(x, y, z)$,

cioè tale che $(2,-1,1)=\lambda(8x,8y,-2z)+\mu(1,1,1)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 2=8\lambda x+\mu \\ -1=8\lambda y+\mu \\ 1=-2\lambda z+\mu \\ 4x^2+4y^2=z^2+1 \\ x+y+z=0 \end{cases},$$

cioè tale che

$$\begin{cases} 2=8\lambda x+\mu \\ -1=8\lambda y+\mu \\ -4=-8\lambda z-4\mu \\ 4x^2+4y^2=z^2+1 \\ x+y+z=0 \end{cases},$$

Sommando i membri delle prime tre equazioni e tenendo conto che $x+y+z=0$, si trova $-3=-2\mu$; si ha quindi $\mu=\frac{3}{2}$.
Si ha quindi $2=8\lambda x+\frac{3}{2}$; quindi $8\lambda x=\frac{1}{2}$. Per $\lambda=0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda\neq 0$. Si ha $x=\frac{1}{16\lambda}$.
Si ha $-1=8\lambda y+\frac{3}{2}$; quindi $8\lambda y=-\frac{5}{2}$. quindi $y=-\frac{5}{16\lambda}$.
Si ha $1=-2\lambda z+\frac{3}{2}$; quindi $2\lambda z=\frac{1}{2}$. quindi $z=\frac{1}{4\lambda}$.
Si ha quindi

$$4\left(\frac{1}{16\lambda}\right)^2+4\left(-\frac{1}{16\lambda}\right)^2=\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2+1\,;$$

quindi

$$\frac{1}{64\lambda^2}+\frac{25}{64\lambda^2}=\frac{1}{16\lambda^2}+1\,;$$

quindi $26=4+64\lambda^2$; quindi $64\lambda^2=22$; quindi $\lambda^2=\frac{22}{64}$; quindi $\lambda=\pm\frac{\sqrt{22}}{8}$.
Per $\lambda=\frac{\sqrt{22}}{8}$, si ha

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\sqrt{22}},-\frac{5}{2\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}}\right)\,.$$

Per $\lambda=-\frac{\sqrt{22}}{8}$, si ha

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{22}},\frac{5}{2\sqrt{22}},-\frac{2}{\sqrt{22}}\right)\,.$$

Si ha quindi

$$E\cap F_2\subset\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{22}},-\frac{5}{2\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}}\right),\left(-\frac{1}{2\sqrt{22}},\frac{5}{2\sqrt{22}},-\frac{2}{\sqrt{22}}\right)\right\}\,.$$

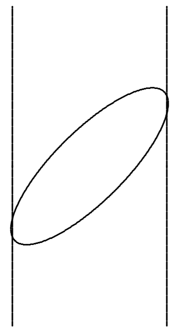
Si ha quindi

$$E\subset\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{22}},-\frac{5}{2\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}}\right),\left(-\frac{1}{2\sqrt{22}},\frac{5}{2\sqrt{22}},-\frac{2}{\sqrt{22}}\right)\right\}\,.$$

Si ha
$f\left(\frac{1}{2\sqrt{22}},-\frac{5}{2\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}}\right)=2\frac{1}{2\sqrt{22}}+\frac{5}{2\sqrt{22}}+\frac{1}{\sqrt{22}}=\frac{11}{2\sqrt{22}}=\frac{11\sqrt{22}}{2\cdot 22}=\frac{\sqrt{22}}{4}$,
$f\left(-\frac{1}{2\sqrt{22}},\frac{5}{2\sqrt{22}},-\frac{2}{\sqrt{22}}\right)=-\frac{\sqrt{22}}{4}$.
Quindi si ha $\max(f)=\frac{\sqrt{22}}{4}$, $\min(f)=-\frac{\sqrt{22}}{4}$.

ii. $2^o$ modo.
Per quando visto sopra si ha

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; 3x^2+3y^2-2xy\leq 1,\, x+y+z=0\}\ .$$



Sia
$F_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 3x^2+3y^2-2xy<1,\, x+y+x=0\}$,
$F_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 3x^2+3y^2-2xy=1,\, x+y+z=0\}$.
Si ha $D=F_1\cup F_2$.
Sia
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 3x^2+3y^2-2xy<1\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow x+y+z$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow 2x-y+z$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_1$, esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(2,-1,1)=\lambda(1,1,1)$, cioè tale che

$$\begin{cases}2=\lambda x\\ -1=\lambda y\\ 1=\lambda\end{cases}\ .$$

Ciò è assurdo. Si ha quindi

$$F_1\cap E=\emptyset\ .$$

Sia
$h:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(3x^2+3y^2-2xy,x+y+z)$.

$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $\begin{cases} h_g(x,y,z) = 0 \\ h_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_2$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} h_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} h_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(2,-1,1) = \lambda(6x-2y, 6y-2x, 0) + \mu(1,1,1)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 2 = 6\lambda x - 2\lambda y + \mu \\ -1 = 6\lambda y - 2\lambda x + \mu \\ 1 = \mu \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

cioè tale che

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ 6\lambda x - 2\lambda y = 1 \\ 6\lambda y - 2\lambda x = -2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

Si ha $3\lambda y - \lambda x = -1$; quindi $\lambda x = 3\lambda y + 1$; quindi $6(3\lambda y + 1) - 2\lambda y = 1$; quindi $18\lambda y + 6 - 2\lambda y = 1$; quindi $16\lambda = -5$.
Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha $y = -\frac{5}{16\lambda}$.
Si ha $6\lambda x - 2\lambda(-\frac{5}{16\lambda} = 1$; quindi $6\lambda x + \frac{5}{8} = 1$; quindi $6\lambda x = \frac{3}{8}$; quindi $x = \frac{1}{16\lambda}$.
Si ha quindi

$$3\left(\frac{1}{16\lambda}\right)^2 + 3\left(-\frac{5}{16\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{16\lambda}\right)\left(-\frac{5}{16\lambda}\right) = 1\,;$$

quindi

$$\frac{3}{256\lambda^2} + \frac{755}{256\lambda^2} + \frac{10}{256\lambda^2} = 1\,;$$

quindi $88 = 256\lambda^2$; quindi $64\lambda^2 = 22$; quindi $\lambda^2 = \frac{22}{64}$; quindi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{22}}{8}$.
Per $\lambda = \frac{\sqrt{22}}{8}$, si ha

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{22}}, -\frac{5}{2\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}\right)\,.$$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{22}}{8}$, si ha

$$(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{22}}, \frac{5}{2\sqrt{22}}, -\frac{2}{\sqrt{22}}\right)\,.$$

Poi si procede come nel primo modo.

6. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

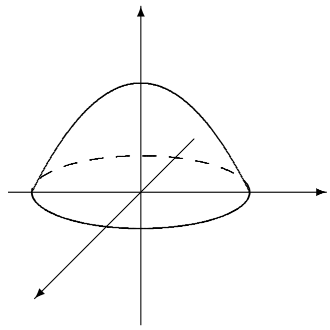
$$(x, y, z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z\ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.
Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.



(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.
Sia $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2 \neq 0$; si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset\ .$$

Sia
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$,
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.
Sia
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z - 1$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z$.

Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(2, -3, 4) = \lambda(2x, 2y, 1)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 4 = \lambda \\ z = 1 - x^2 - y^2 \\ z > 0 \end{cases} .$$

Si ha $\lambda = 4$; quindi $x = \frac{1}{4}$, $y == \frac{3}{8}$, $z = 1 - \frac{1}{16} - \frac{9}{64} = \frac{51}{64} > 0$.
Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left( \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{51}{64} \right) \right\} .$$

Sia
$h : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $h(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(2, -3, 4) = \lambda(0, 0, 1)$.
Si ha $2 = 0$; ciò è assurdo.
Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset .$$

Sia
$k : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + y^2 - 1, z)$.
$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $k(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_3$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} k_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} k_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(2, -3, 4) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0, 0, 1, 1)$, cioè tale che

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 4 = \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{3}{2\lambda}$; quindi si ha
$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$; quindi
$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$; quindi
$13 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{13}{4}$; quindi $\lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$, si ha $x = \frac{2}{13}\sqrt{13}$, $y = -\frac{3}{13}\sqrt{13}$, $z = 0$; quindi $(x,y,z) = (\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0)$.

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, si ha $x = -\frac{2}{13}\sqrt{13}$, $y = \frac{3}{13}\sqrt{13}$, $z = 0$; quindi $(x,y,z) = (-\frac{2}{13}\sqrt{13}, +\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0)$.

Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{ \left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right), \left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{51}{64}\right), \left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right), \left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) \right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{51}{64}\right) = 2\frac{1}{4} + 3\frac{3}{8} + 4\frac{51}{64} = \frac{8+18+51}{16} = \frac{77}{16}$;
$f\left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) - \sqrt{13}$;
$f\left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) - -\sqrt{13}$.

Si ha $\sqrt{13} < \frac{77}{16}$ se e solo se $13 \cdot 16^2 < 77^2$, cioè se e solo se $3328 < 5928$; ciò è vero. Si ha quindi $\sqrt{13} < \frac{77}{16}$.

Quindi si ha $\max(f) = \frac{77}{16}$, $\min(f) = -\sqrt{13}$.

7. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(x,y,z) \longrightarrow 3x - 4y + z ,$$

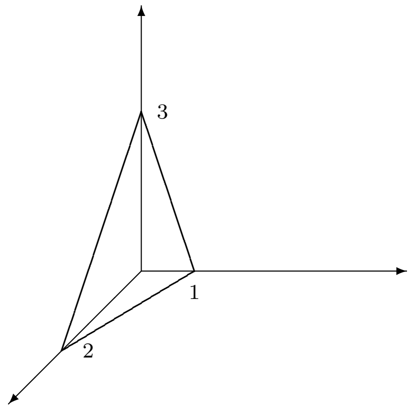
(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.

Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.




(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.
Sia $(x,y,z) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3 \neq 0$; si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset \; .$$

Sia
$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z=0,\ x>0,\ y>0,\ \frac{x}{2}+y<1\}$,
$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y=0,\ x>0,\ z>0,\ \frac{x}{2}+\frac{z}{3}<1\}$,
$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x=0,\ y>0,\ z>0,\ y+\frac{z}{3}<1\}$,
$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ \frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1,\}$,
$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y=0,\ z=0,\ 0<x<2\}$,
$F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x=0,\ z=0,\ 0<y<1\}$,
$F_7 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x=0,\ y=0,\ 0<z<3\}$,
$F_8 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z=0,\ \frac{x}{2}+y=1,\ x>0, y>0\}$,
$F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y=0,\ \frac{x}{2}+\frac{z}{3}=1,\ x>0, z>0\}$,
$F_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x=0,\ y+\frac{z}{3}=1,\ y>0, z>0\}$,
$F_{11} = \{(0,0,0)\}$,

$F_{12} = \{(2, 0, 0)\}$,
$F_{13} = \{(0, 1, 0)\}$,
$F_{14} = \{(0, 0, 3)\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14}$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x - 4y + z$.
Sia
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ \frac{x}{2} + y < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(0, 0, 1)$.
Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset\ .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0,\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow y$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(0, 1, 0)$.
Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset\ .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z > 0,\ y + \frac{z}{3} < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x$.
$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(1, 0, 0)$.
Si ha $-4 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_3 = \emptyset\ .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} - 1z$.
$F_4$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.

Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})$.
Si ha $3 = \frac{\lambda}{2}$ e $-4 = \lambda$; quindi $\lambda = 6$ e $\lambda = -4$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_4 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < x < 2\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (y, z)$.
$F_5$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$.
Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_5 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < y < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x, z)$.
$F_6$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1)$.
Si ha $-4 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_6 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < z < 3\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x, y)$.
$F_7$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(3, -4, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_7 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (z, \frac{x}{y} + y - 1)$.
$F_8$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.

Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(3,-4,1) = \lambda(0,0,1) + \mu(\frac{1}{2},1,0)$.
Si ha $3 = \frac{\mu}{2}$ e $-4 = \mu$; quindi $\mu = 6$ e $\mu = -4$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_8 = \emptyset \ .$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (y, \frac{x}{2} + \frac{z}{3} - 1)$.
$F_9$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(3,-4,1) = \lambda(0,1,0) + \mu(\frac{1}{2},0,\frac{1}{3})$.
Si ha $3 = \frac{\mu}{2}$ e $1 = \frac{\mu}{3}$; quindi $\mu = 6$ e $\mu = 3$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_9 = \emptyset \ .$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x, y + \frac{z}{3} - 1)$.
$F_{10}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(3,-4,1) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,\frac{1}{3})$.
Si ha $-4 = \mu$ e $1 = \frac{\mu}{3}$; quindi $\mu = -4$ e $\mu = 3$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_{10} = \emptyset \ .$$

Si ha quindi

$$E \subset F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14} = \{(0,0,0),\ (2,0,0),\ (0,1,0),\ ,(0,0,3)\} \ .$$

Si ha
$f(0,0,0) = 0$;
$f(2,0,0) = 6$;
$f(0,1,0) = -4$;
$f(0,0,3) = 3$.
Quindi si ha $\max(f) = 6$, $\min(f) = -4$.

8. **Esercizio.** Data la funzione

$$f : \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq 3x + 2y + z \leq 1\right\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

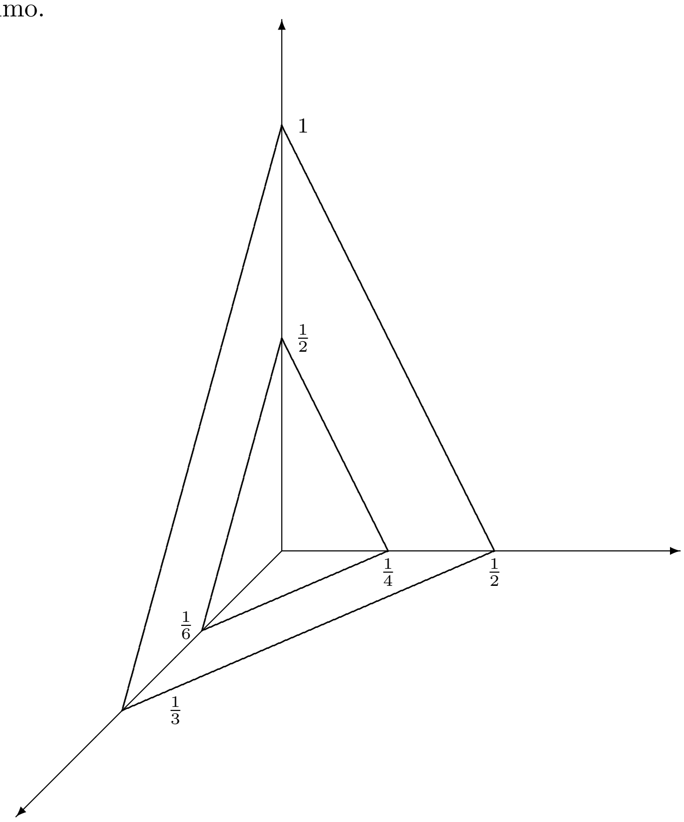
$$(x,y,z) \longrightarrow x - y + z + 3 \ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.
Essendo $f$ continua e definita su un compatto, $f$ ammette massimo e minimo.




(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.
Sia $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}$.
Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 \neq 0$; si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset \, .$$

Sia
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 3x + 2y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 3x + 2y + z = \frac{1}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$,
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 0,\ x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2} < 3x + 2y < 1\}$,
$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y = 0,\ x > 0,\ z > 0,\ \frac{1}{2} < 3x + 2y < 1\}$,

$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x = 0,\ y > 0,\ z > 0, \frac{1}{2} < 2y + z < 1\}$,
$F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 0,\ 3x + 2y = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$,
$F_7 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y = 0,\ 3x + z = 1,\ x > 0,\ z > 0\}$,
$F_8 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x = 0,\ 2y + z = 1,\ y > 0,\ z > 0\}$,
$F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 0,\ 3x + 2y = \frac{1}{2},\ x > 0,\ y > 0\}$,
$F_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y = 0,\ 3x + z = \frac{1}{2},\ x > 0,\ z > 0\}$,
$F_{11} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x = 0,\ 2y + z = \frac{1}{2},\ y > 0,\ z > 0\}$,
$F_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}\}$,
$F_{13} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x = 0,\ z = 0,\ \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$,
$F_{14} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x = 0,\ y = 0,\ \frac{1}{2} < z < 1\}$,
$F_{15} = \{(\frac{1}{3}, 0, 0)\}$,
$F_{16} = \{(\frac{1}{6}, 0, 0)\}$,
$F_{17} = \{(0, \frac{1}{2}, 0)\}$,
$F_{18} = \{(0, \frac{1}{4}, 0)\}$,
$F_{19} = \{(0, 0, 1)\}$,
$F_{20} = \{(0, 0, \frac{1}{2})\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14} \cup F_{15} \cup F_{16} \cup F_{17} \cup F_{18} \cup F_{19} \cup F_{20}$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x - y + z + 3$.
Sia
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 3x+2y+z-1$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1) = \lambda(3,2,1)$.
Si ha $1 = 3\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 3x+2y+z-\frac{1}{2}$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1) = \lambda(3,2,1)$.
Si ha $1 = 3\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset\,.$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2} < 3x + 2y < 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow z$.

$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_3$, esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(0,0,1)$.
Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_3=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x>0,\ z>0,\ \frac{1}{2}<3x+z<1\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow y$.
$F_4$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_4$, esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(0,1,0)$.
Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_4=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ y>0,\ z>0,\ \frac{1}{2}<2y+z<1\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow x$.
$F_5$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_5$, esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(1,0,0)$.
Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_5=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x>0,\ y>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(3x+2y-1,z)$.
$F_6$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_6$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(3,2,0)+\mu(0,0,1)$.
Si ha $1=3\lambda$ e $-1=2\lambda$; quindi $\lambda=\frac{1}{3}$ e $\lambda=-\frac{1}{2}$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_6=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x>0,\ z>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(3x+z-1,y)$.

$F_7$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_7$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(3,0,1)+\mu(0,1,0)$.
Si ha $1=3\lambda$ e $1=\lambda$; quindi $\lambda=\frac{1}{3}$ e $\lambda=1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_7=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ y>0,\ z>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(2y+z-1,x)$.
$F_8$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_8$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(0,2,1)+\mu(1,0,0)$.
Si ha $-1=2\lambda$ e $1=\lambda$; quindi $\lambda=-\frac{1}{2}$ e $\lambda=1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_8=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x>0,\ y>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(3x+2y-\frac{1}{2},z)$.
$F_9$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_9$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(3,2,0)+\mu(0,0,1)$.
Si ha $1=3\lambda$ e $-1=2\lambda$; quindi $\lambda=\frac{1}{3}$ e $\lambda=-\frac{1}{2}$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_9=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x>0,\ z>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(3x+z-\frac{1}{2},y)$.
$F_{10}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_{10}$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(3,0,1)+\mu(0,1,0)$.
Si ha $1=3\lambda$ e $1=\lambda$; quindi $\lambda=\frac{1}{3}$ e $\lambda=1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_{10}=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ y>0,\ z>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(2y+z-1,x)$.

$F_{11}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_{11}$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(0,2,1)+\mu(1,0,0)$.
Si ha $-1=2\lambda$ e $1=\lambda$; quindi $\lambda=-\frac{1}{2}$ e $\lambda=1$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_{11}=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ \frac{1}{6}<x<\frac{1}{3}\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(y,z)$.
$F_{12}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_{12}$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1)$.
Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_{12}=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ \frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(x,z)$.
$F_{13}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_{13}$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$.
Si ha $-1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_{13}=\emptyset\,.$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ \frac{1}{2}<z<1\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(x,y)$.
$F_{14}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_{14}$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,-1,1)=\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$.
Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E\cap F_{14}=\emptyset\,.$$

Si ha quindi

$$E\subset F_{15}\cup F_{16}\cup F_{17}\cup F_{18}\cup F_{19}\cup F_{20}=$$

$$\left\{(\frac{1}{3},0,0),\ (\frac{1}{6},0,0),\ (0,\frac{1}{2},0),\ ,(0,\frac{1}{4},0),\ (0,0,1),\ (0,0,\frac{1}{2}\right\}\ .$$

Si ha
$f(\frac{1}{3},0,0)=\frac{1}{3}$;
$f(\frac{1}{6},0,0)=\frac{1}{6}$;
$f(0,\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{2}$;
$f(0,\frac{1}{4},0)=-\frac{1}{4}$;
$f(0,0,1)=1$;
$f(0,0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.
Quindi si ha $\max(f)=1$, $\min(f)=-\frac{1}{2}$.

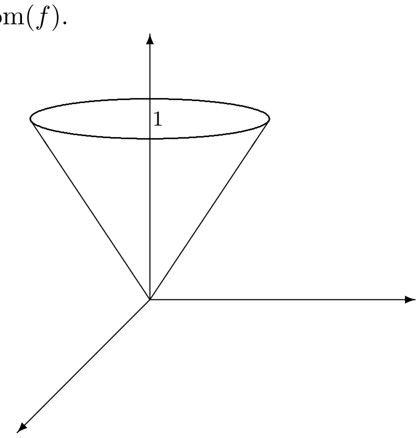
9. **Esercizio.** Data la funzione

$$f:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow xz-y^2\ ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

(a) Sia $D=\mathrm{dom}(f)$.




Essendo $D$ compatto ed essendo $f$ continua, per il teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo.

(b) Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f$.
Sia $(x,y,z)\in\overset{\circ}{D}$.
Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=z$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-2y$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x$.
Si ha quindi $\mathrm{grad}\,f(x,y,z)=(0,0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} z=0\\ -2y=0\\ x=0\end{cases}\ .$$

Quindi se e solo se $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Essendo $(0,0,0) \notin \overset{\circ}{D}$ si ha

$$E\cap \overset{\circ}{D} = \emptyset \,.$$

Sia
$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=z^2, 0<z<1\}$,
$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z=1,\ x^2+y^2<1\}$,
$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z=1,\ x^2+y^2=1\}$
. $F_4 = \{(0,0,0)\}$.

Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$.

Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow xz - y^2$.

Sia
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0<z<1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x^2+y^2-z^2$.

$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.

Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(z,-2y,x) = \lambda(2x,2y,-2z)$.

Si ha quindi

$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2 \\ 0<z<1 \end{cases} .$$

Si ha $z = 2\lambda x = 2\lambda(-2\lambda z) = -4\lambda^2 z$; essendo $z \neq 0$, si ha $1 = -4\lambda^2$; quindi $\lambda = -\frac{1}{4}$; ciò è assurdo; quindi il sistema sopra non ha soluzioni; si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset \,.$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2<1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow z-1$.

$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.

Se $(x,y,z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$,
cioè tale che $(z,-2y,x) = \lambda(0,0,1)$.

Si ha $z=0$ e $z=1$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_2 = \emptyset \,.$$

Sia ora
$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x^2+y^2-1, z-1)$.

$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_3$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(z,-2y,x)=\lambda(2x,2y,0)+\mu(0,0,1)$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} z=2\lambda x \\ -2y=2\lambda y \\ x=\mu \\ x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases} .$$

Si ha $-y=\lambda y$; quindi $y(\lambda+1)=0$; quindi $\lambda=0$ o $\lambda=-1$.
Per $y=0$ si ha $x^2=1$; quindi $x=\pm 1$; si trovano i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$.
Per $\lambda=-1$ si ha $1=2x$; quindi $x=\frac{1}{2}$; quindi $x=\frac{1}{2}$; si ha $\frac{1}{4}+y^2=1$; quindi $y^2=\frac{3}{4}$; quindi $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; si trovano i punti $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ e $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.
Si ha quindi

$$E\cap F_3\subset\left\{(1,0,1),\,(-1,0,1),\,\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right),\,\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\right\} .$$

Si ha quindi

$$E\subset\left\{(1,0,1),\,(-1,0,1),\,\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right),\,\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right),\,(0,0,0)\right\} .$$

Si ha
$f(0,0,0)=0$,
$f(1,0,1)=1$,
$f(-1,0,1)=-1$,
$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$,
$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)=-\frac{1}{4}$.
Si ha quindi $\max(f)=1$ e $\min(f)=-1$.

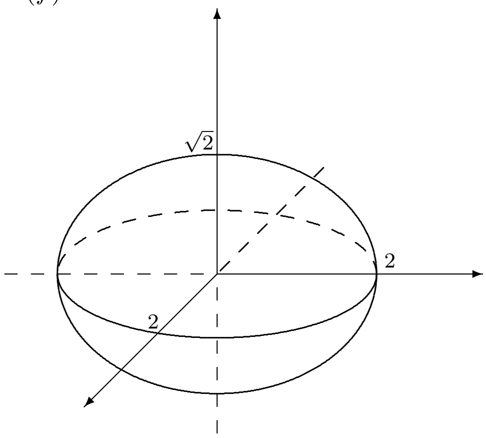
10. **Esercizio.** Data la funzione

$$f:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+2z^2\le 4\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow|x|+|y|+|z| ,$$

(a) dire se $f$ ammette massimo e se $f$ ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di $f$.

**Risoluzione.**

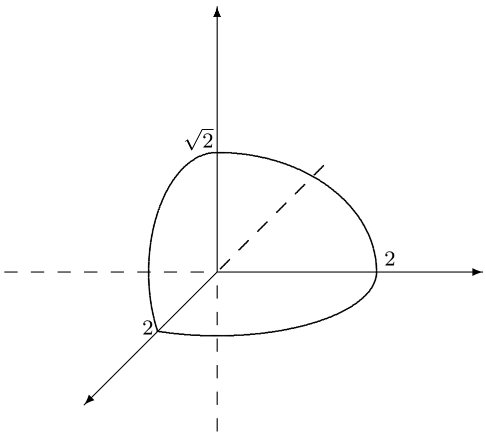
(a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.




Essendo $D$ compatto ed essendo $f$ continua, per il teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo.

(b) Sia

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\}\ .$$




Per ogni $(x, y, z) \in D$, si ha $(|x|, |y|, |z|) \in D_1$ e $f(x, y, z) = f(|x|, |y|, |z|)$. Da ciò segue che $f(D) = f(D_1)$; quindi $f|D_1$ ammette massimo e minimo e si ha $\max(f) = \max(f|D_1)$ e $\min(f) = \min(f|D_1)$. Possiamo quindi determinare il massimo ed il minimo di $f|D_1$.
Per ogni $(x, y, z) \in D_1$ si ha $f(x, y, z) = x + y + z$.
Sia $E$ l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f|D_1$.
Sia $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}_1$.
Si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 \neq 0$.
Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D}_1 = \emptyset\ .$$

Sia
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\}$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 4,\ z = 0\}$,
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0,\ x^2 + 2z^2 < 4,\ y = 0\}$,
$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z > 0,\ y^2 + 2z^2 < 4,\ x = 0\}$,
$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < x < 2,\ y = 0,\ z = 0\}$,
$F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < y < 2,\ x = 0,\ z = 0\}$,
$F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < z < \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0\}$,
$F_8 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\}$,
$F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z > 0,\ y^2 + 2z^2 = 4,\ x = 0\}$,
$F_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0,\ x^2 + 2z^2 = 4,\ y = 0\}$,
$F_{11} = \{(0, 0, 0)\}$,
$F_{12} = \{(2, 0, 0)\}$,
$F_{13} = \{(0, 2, 0)\}$,
$F_{14} = \{(0, 0, \sqrt{2})\}$.
Si ha $\mathrm{Fr}\,(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14}$.
Indichiamo ancora con $f$ la funzione
$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x + y + z$.
Sia
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$.
$F_1$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \lambda\, \mathrm{grad}\, g(x, y, z)$,
cioè tale che $(1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 4z)$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 4\lambda z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{1}{4\lambda}$.
Si ha quindi

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 4\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 4\ ;$$

si ha quindi $\frac{5}{8\lambda^2} = 4$; quindi $\lambda^2 = \frac{5}{32}$; quindi $\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Per $\lambda = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha $x = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$, $y = \frac{2}{5}\sqrt{10}$, $z = \frac{1}{5}\sqrt{10}$; quindi si trova il punto

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{10}\right) .$$

Per $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha $x < 0$; quindi nessuna soluzione del sistema.
Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{\left(\frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{10}\right)\right\} .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow z$.
$F_2$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(1, 1, 1) = \lambda(0, 0, 1)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_2 = \emptyset .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0,\ x^2 + 2z^2 < 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow y$.
$F_3$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(1, 1, 1) = \lambda(0, 1, 0)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_3 = \emptyset .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z > 0,\ y^2 + 2z^2 < 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x$.
$F_4$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z)$,
cioè tale che $(1, 1, 1) = \lambda(1, 0, 0)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_4 = \emptyset .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < x < 2\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (y, z)$.
$F_5$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.

Se $(x,y,z) \in E \cap F_5$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,1,1) = \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_5 = \emptyset \; .$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < y < 2\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x,z)$.
$F_6$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_6$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,1,1) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_6 = \emptyset \; .$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 < z < \sqrt{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x,y)$.
$F_7$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_7$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,1,1) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$.
Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo.

$$E \cap F_7 = \emptyset \; .$$

Sia ora
$g : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ y > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y,z) \longrightarrow (x^2 + y^2 - 4, z)$.
$F_8$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$.
Se $(x,y,z) \in E \cap F_8$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,1,1) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0,0,1)$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = \mu \\ x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$.
Si ha quindi

$$(\frac{1}{2\lambda})^2 + (\frac{1}{2\lambda})^2 = 4 \; ,$$

cioè
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=4\ ;$$
si ha quindi $\frac{1}{2\lambda^2}=4$; quindi $\lambda^2=\frac{1}{8}$; quindi $\lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Per $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ si ha $x=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$; quindi si trova il punto $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.
Per $\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ si ha $x<0$; quindi nessuna soluzione del sistema.
Si ha quindi
$$E\cap F_8\subset\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)\right\}\ .$$

Sia ora
$g:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ y>0,\ z>0\}\longrightarrow\mathbf{R}^2,(x,y,z)\longrightarrow(y^2+2z^2-4,x)$.
$F_9$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y,z)=0$.
Se $(x,y,z)\in E\cap F_9$, esistono $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad} g_1(x,y,z)+\mu\operatorname{grad} g_2(x,y,z)$,
cioè tale che $(1,1,1)=\lambda(0,2y,4z)+\mu(1,0,0)$.
Si ha quindi
$$\begin{cases}1=\mu\\ 1=2\lambda y\\ 1=4\lambda z\\ y^2+2z^2=4\\ x=0\\ y>0,\ z>0\end{cases}.$$
Per $\lambda=0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda\neq 0$.
Si ha $y=\frac{1}{2\lambda}$, $z=\frac{1}{4\lambda}$.
Si ha quindi
$$(\frac{1}{2\lambda})^2+2(\frac{1}{4\lambda})^2=4\ ,$$
cioè
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{8\lambda^2}=4\ ;$$
si ha quindi $\frac{3}{8\lambda^2}=4$; quindi $\lambda^2=\frac{3}{32}$; quindi $\lambda=\pm\sqrt{\frac{3}{32}}=\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Per $\lambda=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $y=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $z=\frac{1}{3}\sqrt{6}$; quindi si trova il punto $\left(0,\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$.
Per $\lambda=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $y<0$; quindi nessuna soluzione del sistema.
Si ha quindi
$$E\cap F_9\subset\left\{\left(0,\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\right\}\ .$$

Sia ora
$g : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x > 0,\ z > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 + 2z^2 - 4, y)$.
$F_{10}$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$.
Se $(x, y, z) \in E \cap F_{10}$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g_1(x, y, z) + \mu \operatorname{grad} g_2(x, y, z)$,
cioè tale che $(1, 1, 1) = \lambda(2x, 0, 4z) + \mu(0, 1, 0)$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = \mu \\ 1 = 4\lambda z \\ x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 0 \\ x > 0,\ z > 0 \end{cases} .$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.
Si ha $x = \frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{1}{4\lambda}$.
Si ha quindi

$$(\frac{1}{2\lambda})^2 + 2(\frac{1}{4\lambda})^2 = 4 ,$$

cioè

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 4 ;$$

si ha quindi $\frac{3}{8\lambda^2} = 4$; quindi $\lambda^2 = \frac{3}{32}$; quindi $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{32}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Per $\lambda = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $x = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; quindi si trova il punto $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$.
Per $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $x < 0$; quindi nessuna soluzione del sistema.
Si ha quindi

$$E \cap F_{10} \subset \left\{ \left( \frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{6} \right) \right\} .$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left( \frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{10} \right), \left( \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0 \right), \left( 0, \frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6} \right), \right.$$

$$\left. \left( \frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{6} \right), (0,0,0), (2,0,0), (0,2,0), (0,0,\sqrt{2}) \right\} .$$

Si ha
$f\left(\frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{10}\right) = \sqrt{10}$,
$f(\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) = 2\sqrt{2}$,
$f\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \sqrt{6}$,

$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \sqrt{6}$,
$f(0,0,0) = 0$,
, $f((2,0,0) = 2$,
$f(0,2,0) = 2$,
, $f(0,0,\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{10}$ e $\min(f) = 0$.

# Capitolo 18

# Equazioni differenziali

## 18.1 Equazioni del primo ordine

### 18.1.1 Problemi di Cauchy per equazioni del primo ordine

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \qquad (x, y) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[\ .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $D = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

L'equazione è equivalente a $y' = \sqrt{x}\sqrt{y}$; il problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ com soluzioni tali che $1 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_1^y \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^x \sqrt{t}\,dt, \quad x \geq 0,\ y > 0\ ,$$

cioè

$$\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^x, \quad x \geq 0,\ y > 0\ ,$$

cioè

$$2\sqrt{y} - 2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}, \quad x \geq 0,\ y > 0\ ,$$

cioè

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}, \quad x \geq 0,\ y > 0\ ,$$

cioè

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{3}, \quad x \geq 0,\ y > 0\ ,$$

cioè

$$y = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{3}\right)^2, \quad x \geq 0,\ y \in \mathbf{R}\ .$$

Si trova quindi la funzione

$$\varphi : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{3}\right)^2 .$$

2. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{x}{y}} \\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su

$$D = ]-\infty, 0] \times ]-\infty, 0[ \cup [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ .$$

Possiamo considerare il problema di Cauchy assegnato su $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$; l'equazione è equivalente a $y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; quindi è un'equazione a variabili separabili univoca.

Il problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ com soluzioni tali che $1 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_2^y \sqrt{t}\,dt = \int_1^x \sqrt{t}\,dt, \quad x \geq 0,\ y > 0 ,$$

cioè

$$\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^y = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^x, \quad x \geq 0,\ y > 0 ,$$

cioè

$$y^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} - 1, \quad x \geq 0,\ y > 0 ,$$

cioè

$$y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} - 1, \quad x \geq 0,\ y > 0 ,$$

cioè

$$y = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} - 1\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0,\ y > 0 ;$$

cioè

$$y = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} - 1\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0,\ y \in \mathbf{R} .$$

Si trova quindi la funzione

$$\varphi : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} - 1\right)^{\frac{2}{3}} .$$

3. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $D = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$.

La soluzione del problema di Cauchy è definita su un intervallo contenente 1; possiamo quindi supporre $x \in ]0, +\infty[$. L'equazione differenziale ammette la soluzione costante

$$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 0 \;;$$

la soluzione del problema di Cauchy assume in 1 un valore strettamente positivo; per il teorema sull'unicità della soluzione di un problema di Cauchy, la soluzione del problema di Cauchy è sempre strettamente positiva. Possiamo quindi supporre $y \in ]0, +\infty[$.

Il problema di Cauchy assegnato è quindi equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \qquad (x, y) \in ]0, +\infty[\times]0, +\infty[\;.$$

L'equazione è a variabili separabili univoca; il problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ com soluzioni tali che $1 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_1^y \frac{1}{t^2}\, dt = \int_1^x -\frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0,\ y > 0\;,$$

cioè

$$\left[-\frac{1}{t}\right]_1^y = [-\log t]_1^x\,, \quad x > 0,\ y > 0\;,$$

cioè

$$-\frac{1}{y} + 1 = -\log x, \quad x > 0,\ y > 0\;,$$

cioè

$$\frac{1}{y} = \log x + 1, \quad x > 0,\ y > 0\;.$$

La condizione $y > 0$ equivale a quindi $\frac{1}{y} > 0$; quindi a $\log x + 1 > 0$; quindi a $\log x > -1$; quindi a $x > \frac{1}{e}$.

Il problema di Cauchy sopra è quindi equivalente a

$$\frac{1}{y} = \log x + 1, \quad x > \frac{1}{e},\ y \in \mathbf{R}\;.$$

Per $x > \frac{1}{e}$ si ha $\log x + 1 \neq 0$.

Quindi il problema di Cauchy sopra è equivalente a

$$y = \frac{1}{\log x + 1}, \quad x > \frac{1}{e},\ y \in \mathbf{R}\ .$$

Si trova quindi la funzione

$$\varphi : \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\log x + 1}\ .$$

4. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin x\, e^y \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. L'equazione è a variabili separabili univoca; il problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ com soluzioni tali che $0 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_0^y e^{-t}\, dt = \int_0^x \sin t\, dt, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè

$$-\left[e^{-t}\right]_0^y = -\left[\cos t\right]_0^x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè

$$e^{-y} - 1 = \cos x - 1, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè

$$e^{-y} = \cos x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\ .$$

Essendo $e^{-y} = \cos x$, si ha $\cos x > 0$; ciò equivale a $\exists k \in \mathbf{Z}$ tale che $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; poichè si cercano soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \mathrm{dom}(y)$ la condizione sopra equivale a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$e^{-y} = \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè

$$-y = \log \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè

$$y = -\log \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbf{R}\ .$$

Si trova quindi la funzione

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -\log \cos x\ .$$

5. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (x+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. L'equazione è a variabili separabili univoca.

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = (x+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases} , \quad (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2+1} y' = x+1 \\ y(0) = 0 \end{cases} , \quad (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} .$$

Tale problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ com soluzioni tali che $0 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_0^y \frac{1}{t^2+1}\, dt = \int_0^x (t+1)\, dt, \quad (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioè

$$[\mathrm{Arctg}\, t]_0^y = \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^x, \quad (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioè

$$\mathrm{Arctg}\, y = \frac{1}{2}x^2 + x, \quad (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} .$$

Si ha

$\mathrm{Arctg}\, y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; quindi possiamo supporre $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + x < \frac{\pi}{2}$.

Si ha $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + x < \frac{\pi}{2}$ se e solo se $-\pi < x^2 + 2x < \pi$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2 + 2x - \pi < 0 \\ x^2 + 2x + \pi > 0 \end{cases}$.

Il polinomio $x^2+2x+\pi$ ha discriminante $\Delta$ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1-\pi < 0$; si ha quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 2x + \pi > 0$. Il sistema sopra è quindi equivalente a $x^2 + 2x - \pi < 0$; quindi a $-\sqrt{\pi+1} - 1 < x < \sqrt{\pi+1} - 1$.

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$\mathrm{Arctg}\, y = \frac{1}{2}x^2 + x, \quad -\sqrt{\pi+1} - 1 < x < \sqrt{\pi+1} - 1,\ y \in \mathbf{R} .$$

Per quanto visto sopra, la condizione $-\sqrt{\pi+1} - 1 < x < \sqrt{\pi+1} - 1$ implica $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + x < \frac{\pi}{2}$.

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right), \quad -\sqrt{\pi+1} - 1 < x < \sqrt{\pi+1} - 1,\ y \in \mathbf{R}\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : \left]-\sqrt{\pi+1} - 1, , \sqrt{\pi+1} - 1\right[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\,.$$

6. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin^2 x \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \sin^2 t\, dt$, con $a \neq 1$, o simili.

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. L'equazione è a variabili separabili univoca.

Si ha $\cos y = 0$ se e solo se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Per ogni $k \in \mathbf{Z}$

$$\varphi_k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$$

è soluzione dell'equazione differenziale $y' = \sin^2 x \cos^2 y$.

In particolare

$$\varphi_0 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

e

$$\varphi_{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin^2 x \cos^2 y$.

Per il teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy, se $\varphi$ è la soluzione del problema di Cauchy assegnato, essendo $\varphi(0) = 0 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, per ogni $x \in \operatorname{dom})\varphi$ si ha $\varphi(x) \in ]-\frac{p1}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \sin^2 x \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}$$

è quindi equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin^2 x \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,.$$

Tale problema di Cauchy è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 y} y' = \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ .$$

Tale problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ con soluzioni tali che $0 \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_0^y \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int_0^x \sin^2 t\, dt, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

cioè

$$[\mathrm{tg}\, t]_0^y = \int_0^x \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

cioè

$$\mathrm{tg}\, y = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^x dt, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

cioè

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x), \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

cioè

$$\mathrm{Arctg}\,\mathrm{tg}\, y = \mathrm{Arctg}\,\frac{2x-\sin(2x)}{4}, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

cioè

$$y = \mathrm{Arctg}\,\frac{2x-\sin(2x)}{4}, \quad x \in \mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ ,$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \mathrm{Arctg}\,\frac{2x-\sin(2x)}{4}\ .$$

7. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Si esprima la soluzione (massimale) $\varphi$ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi $U$ e $V$ e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. L'equazione è a variabili separabili.

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}^*$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ .$$

Tale problema di Cauchy è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ .$$

Tale problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ con soluzioni tali che $0 \in \operatorname{dom}(y)$,

$$\int_1^y \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = \int_0^x dt, \quad x \in \mathbf{R}, y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{2} \int_1^y (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} 2t\, dt = x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^y = x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè

$$\sqrt{y^2+1} - \sqrt{2} = x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè

$$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{2} + x, \quad x \in \mathbf{R},\ y \in ]0, +\infty[\ .$$

Se $y(x)$ è soluzione, si ha $\sqrt{2} + x \geq 0$; quindi $x \geq \sqrt{2}$.

Quindi l'equazione implicita sopra è equivalente a

$$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{2} + x, \quad x \in [-\sqrt{2}, +\infty[,\ y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè a

$$y^2 + 1 = (\sqrt{2} + x)^2, \quad x \in [-\sqrt{2}, +\infty[,\ y \in ]0, +\infty[\ ,$$

cioè a cioè a

$$y^2 = (\sqrt{2} + x)^2 - 1, \quad x \in [-\sqrt{2}, +\infty[,\ y \in ]0, +\infty[\ .$$

Se $y(x)$ è soluzione, si ha $(\sqrt{2} + x) - 1 > 0$. L'equazione si secondo grado $(\sqrt{2} + x) - 1 = 0$ è equivalente a $\sqrt{2} + x = \pm 1$; ha quindi soluzioni $-\sqrt{2} - 1$ e $-\sqrt{2} + 1$. Si ha quindi $x < -\sqrt{2} - 1$ o $x > -\sqrt{2} + 1$. Essendo $x \geq -\sqrt{2}$, si ha $x > -\sqrt{2} + 1$.

Quindi l'equazione implicita sopra è equivalente a

$$y^2 = (\sqrt{2} + x)^2 - 1, \quad x \in ]-\sqrt{2}+1, +\infty[, \ y \in ]0, +\infty[ \ ,$$

cioè a

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \quad x \in ]-\sqrt{2}+1, +\infty[, \ y \in ]0, +\infty[ \ ,$$

cioè, essendo $y > 0$ a

$$y = \sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \quad x \in ]-\sqrt{2}+1, +\infty[, \ y \in ]0, +\infty[ \ ,$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : ]-\sqrt{2}+1, +\infty[, \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \ .$$

8. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) $\varphi$ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi $U$ e $V$ e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $(\mathbf{R}-\{1\}) \times \mathbf{R}^*$. L'equazione è a variabili separabili.

Si ha $1 - e < 1$; essendo il dominio della soluzione un intervallo e dovendo tale intervallo contenere $1 - e$, possiamo supporre $x < 1$.

Dovendo essere la soluzione sempre diversa da 0 e assumendo il valore $-\sqrt{2} < 0$, possiamo supporre $y < 0$.

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} , \quad x \in \mathbf{R}-\{1\}, \ y \in \mathbf{R}^*$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} , \quad x < 1, \ y < 0 \ .$$

Tale problema di Cauchy è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = \frac{1}{x-1} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} , \quad x < 1, \ y < 0 \ .$$

Tale problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ con soluzioni tali che $1-e \in \operatorname{dom}(y)$,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{y} t\,dt = \int_{1-e}^{x} \frac{1}{t-1}\,dt, \quad x<1,\, y<0\ ,$$

cioè

$$\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\sqrt{2}}^{y} = [\log|t-1|]_{1-e}^{x}\,, \quad x<1,\, y<0\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{2}(y^2-2) = \log(1-x) - \log e, \quad x<1,\, y<0\ ,$$

cioè

$$y^2 - 2 = 2\log(1-x) - 2, \quad x<1,\, y<0\ ,$$

cioè

$$y^2 = 2\log(1-x), \quad x<1,\, y<0\ ,$$

Se $y(x)$ è soluzione, si ha $\log(1-x)>0$; quindi $1-x>1$; quindi $x<0$.

Quindi l'equazione implicita sopra è equivalente a

$$y^2 = 2\log(1-x), \quad x<0,\, y<0\ ,$$

cioè a

$$y = \pm\sqrt{2\log(1-x)}, \quad x<0,\, y<0\ ,$$

cioè a

$$y = -\sqrt{2\log(1-x)}, \quad x<0,\, y<0\ .$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : ]-\infty, 0[, \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -\sqrt{2\log(1-x)}\ .$$

9. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) $\varphi$ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi $U$ e $V$ e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è di tipo normale ed è assegnata su $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. L'equazione è a variabili separabili.

Si ha $1>0$; essendo il dominio della soluzione un intervallo e dovendo tale intervallo contenere 1, possiamo supporre $x>0$.

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \frac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} , \quad x \in \mathbf{R}^*,\ y \in \mathbf{R}$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} , \quad x > 0,\ y \in \mathbf{R} .$$

L'equazione differenziale $y' = \frac{3(1-y^2)}{x}$ ha le soluzioni costanti
$\varphi_1 : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 1$
e
$\varphi_2 : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -1$.

Dal teorema di unicità della soluzione di un problema di Cauchy, segue subito che il problema di Cauchy sopra è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} , \quad x > 0,\ -1 < y < 1 ,$$

cioè a

$$\begin{cases} \frac{1}{1-y^2} y' = \frac{3}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} , \quad x > 0,\ -1 < y < 1 .$$

Tale problema di Cauchy equivale all'equazione implicita di incognita $y(x)$ con soluzioni tali che $1 - e \in \mathrm{dom}(y)$,

$$\int_0^y \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0, -1 < y < 1 ,$$

cioè a

$$-\int_0^y \frac{1}{t^2-1}\, dt = 3 \left[\log t\right]_1^x , \quad x > 0, -1 < y < 1 .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che
$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$.
Si ha $1 = A(t+1) + B(t-1)$.

Per $t = 1$ si ha $1 = 2A$; quindi $A = \frac{1}{2}$. Per $t = -1$ si ha $1 = -2B$; quindi $B = -\frac{1}{2}$.

Quindi
$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$.
L'equazione implicita sopra diventa

$$-\int_0^y \left( \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} \right) dt = 3 \left[\log t\right]_1^x , \quad x > 0, -1 < y < 1 ,$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\left[\log|t-1|-\log|t+1|\right]_0^y = 3\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ,$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_0^y = 3\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ,$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 3\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

essendo $-1<y<1$, si ha $\frac{y-1}{y+1}<0$; quindi l'equazione implicita sopra diventa

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1-y}{1+y} = 3\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

quindi equivalente a

$$-\log\frac{1-y}{1+y} = 6\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$\log\frac{1+y}{1-y} = 6\log x, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$\log\frac{1+y}{1-y} = \log x^6, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$\frac{1+y}{1-y} = x^6, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$1+y = x^6 - x^6 y, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$y(1+x^6) = x^6-1, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

cioè a

$$y = \frac{1-x^6}{1+x^6}, \quad x>0,\ -1<y<1\ ;$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1-x^6}{1+x^6}\ .$$

## 18.2 Equazioni di ordine superiore al primo

### 18.2.1 Problemi di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = {y'}^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** Poniamo

$$z = y' .$$

Se la funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy assegnato, allora la funzione $z(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^2 + 1 \\ z(0) = 1 \end{cases} (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioé

$$\begin{cases} \frac{1}{z^2+1} z' = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases} (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} .$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $z(x)$ tali che $0 \in \mathrm{dom}(z)$,

$$\int_1^z \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = \int_0^x dt \ (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioè

$$[\mathrm{Arctg}\, t]_1^z = [y]_0^x \ (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioè

$$\mathrm{Arctg}\, z - \mathrm{Arctg}\, 1 = x \ (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ,$$

cioè

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{\pi}{4} + x \ (x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} .$$

Se $z(x)$ è soluzione, si ha

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + x < \frac{pi}{2} ,$$

cioè

$$-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4} .$$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{\pi}{4} + x \ -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}, \ z \in \mathbf{R} ,$$

cioè a

$$z = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + x) \ \ -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4},\ z \in \mathbf{R}\ .$$

Si ha quindi

$$z : ]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + x)\ .$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy assegnato se e solo se è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + x) \\ y(0) = 0 \end{cases},\ -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4},\ y \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $x \in ]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[$, si ha quindi

$$y(x) = \int_0^x \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + t)\, dt = \int_0^x \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t)}{\cos(\frac{\pi}{4} + t)}\, dt =$$

$$-\int_0^x \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4} + t)}(-\sin(\frac{\pi}{4} + t)) = -\Big[\log|\cos(\frac{\pi}{4} + t)|\Big]_0^x =$$

$$-\log\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \log\cos\frac{\pi}{4} = -\log\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \log\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$-\log\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\log 2\ .$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi : ]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow -\log\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\log 2\ .$$

# Capitolo 19

# Equazioni differenziali lineari

## 19.1 Equazioni del primo ordine

### 19.1.1 Problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x+1} + x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad , \ x > -1 \ .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale si può scrivere

$$y' = -\frac{1}{x+1}y + x^3, \ x > -1 \ .$$

Si tratta quindi di una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $]-1, +\infty[$.
Una primitiva della funzione $\frac{1}{x+1}$ è la funzione

$$\alpha(x) = -\log(x+1) \ .$$

Si ha
$e^{\log(x+1)}x^3 = (x+1)x^3 = x^4 + x^3$.
Si ha
$\int (x^4 + x^3)\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + c$.
Una primitiva della funzione $e^{\log(x+1)}x^3$ è quindi la funzione

$$\beta(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \ .$$

Per ogni $c \in \mathbf{R}$ si ha
$e^{-\log(x+1)}\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + c\right) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + c\right) = c\frac{1}{x+1} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{x+1}$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = c\frac{1}{x+1} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{x+1}, \quad c \in \mathbf{R}\,.$$

Si ha $y(0) = 0$; quindi $c = 0$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{4x^3 + 5x^4}{20(x+1)}\,.$$

2. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy - x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $\mathbf{R}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, con
$\varphi(x) = e^{\int_0^x 2t\,dt}\left(\int_0^x e^{-\int_0^u 2t\,dt}(-u)\,du + 1\right) = e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-u^2}(-u)\,du + 1\right) =$
$e^{x^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^x e^{-u^2}(-2u)\,du + 1\right) = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}\left[e^{-u^2}\right]_0^x + 1\right) = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}(e^{-x^2} - 1) + 1\right) =$
$e^{x^2}\left(\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

3. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y + \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $\mathbf{R}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, con
$\varphi(x) = e^{\int_0^x \sin t\,dt}\left(\int_0^x e^{-\int_0^u \sin t\,dt}\sin u\,du + 1\right) =$
$e^{-\cos x+1}\left(\int_0^x e^{\cos u-1}\sin u\,du + 1\right) = e^{-\cos x+1}\left(-\int_0^x e^{\cos u-1}(-\sin u)\,du + 1\right) =$
$e^{-\cos x+1}\left(-\left[e^{\cos u-1}\right]_0^x + 1\right) = e^{-\cos x+1}\left(-e^{\cos x-1} + 1 + 1\right) = 2e^{-\cos x+1} - 1$.

4. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y\sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $\mathbf{R}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, con
$\varphi(x) = 1 \cdot e^{\int_0^x \sin t\,dt} = e^{[\cos t]_0^x} = e^{1-\cos x}$.

5. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $\mathbf{R}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, con
$\varphi(x) = e^{\int_0^x 2t\,dt} = e^{x^2}$.

6. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 y + 2x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è una equazione differenziale lineare del primo ordine assegnata su $\mathbf{R}$.

Una primitiva di $x^2$ è la funzione

$$\alpha(x) = \frac{1}{3}x^3 .$$

Si ha

$$\int e^{-\frac{1}{3}x^3} 2x^2\,dx = -2 \int e^{-\frac{1}{3}x^3}(-x^2)\,dx = -2e^{-\frac{1}{3}x^3} + c .$$

una primitiva della funzione $e^{-\frac{1}{3}x^3}2x^2$ è quindi la funzione

$$\beta(x) = -2e^{-\frac{1}{3}x^3} .$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = x^2y + 2x^2$ è quindi

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}\left(e^{-\frac{1}{3}x^3} + c\right) = ce^{\frac{1}{3}x^3} - 2 ,$$

al variare di $c$ in $\mathbf{R}$.

Per la soluzione del problema di cauchy, si ha $c - 2 = 0$;quindi $c = 2$.

la soluzione del problema di cauchy è quindi

$$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2e^{\frac{1}{3}x^3} - 2 .$$

## 19.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari

### 19.2.1 Integrale generale per i sistemi di due equazioni

1. **Esercizio.** Determinare un integrale generale reale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari di incognita $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = t \end{cases} .$$

**Risoluzione.** Si tratta di un sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti.

Le soluzioni di $y' = t$ sono

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 \quad c_1 \in \mathbf{R} .$$

Si ha quindi $x' = x - y$ se e solo se

$$x' = x - \frac{1}{2}t^2 - c_1 .$$

Una primitiva di 1 è la funzione $\alpha(t) = t$.

Si ha
$\int e^{-t} \left(-\frac{1}{2}t^2 - c_1\right)\, dt = -\frac{1}{2} \int t^2 e^{-t}\, dt - c_1 \int e^{-t}\, dt.$

Si ha
$\int t^2 e^{-t}\, dt = \left(-t^2 e^{-t} + c\right) - \int (-e^{-t}) 2t\, dt = \left(-t^2 e^{-t} + c\right) + 2 \int te^{-t})\, dt =$
$\left(-t^2 e^{-t} + c\right) + 2 \left(((-te^{-t} + c) - \int -e^{-t})\, dt\right) =$
$\left(-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + c\right) + 2 \int e^{-t})\, dt = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + c.$

Si ha
$\int e^{-t}\, dt = -e^{-t} + c.$

Si ha quindi
$\int e^{-t} \left(-\frac{1}{2}t^2 - c_1\right)\, dt = -\frac{1}{2} \left(-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + c\right) - c_1 \left(-e^{-t} + c\right) =$
$\frac{1}{2}t^2 e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} + c_1 e^{-t} + c = e^{-t} \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1 + c_1\right) + c.$

Una primitiva di $e^{-t} \left(-\frac{1}{2}t^2 + c_1\right)$ è quindi
$\beta(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1 + c_1\right).$

Le soluzioni di $x' = x - \frac{1}{2}t^2 - c_1$ sono quindi
$x(t) = e^t \left(e^{-t} \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1 + c_1\right) + c_2\right) = c_2 e^t + \frac{1}{2}t^2 + t + 1 + c_1, \quad c_2 \in \mathbf{R}.$

Un integrale generale del sistema è quindi

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^t + \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ y(t) = c_1 + \frac{1}{2}t^2 \end{cases} , \; c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

### 19.2.2 Autovettori e integrale generale per i sistemi di due equazioni

[1]

1. **Esercizio.** Determinare un integrale generale reale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + y \end{cases} .$$

**Risoluzione.** Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti.

La matrice del sistema omogeneo associato è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$

Gli autovalori sono
$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Per $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gli autovettori associati sono le soluzioni di
$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}A + B = 0.$

Per $A = 1$ si ha $B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Un autovettore non nullo associato a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è quindi $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$

Si ottiene la soluzione

$$\varphi_1(t) = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) .$$

Per $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gli autovettori associati sono le soluzioni di
$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A + B = 0.$

Per $A = 1$ si ha $B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Un autovettore non nullo associato a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è quindi $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

[1]Non in programma

Si ottiene la soluzione

$$\varphi_2(t) = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) .$$

$(\varphi_1, \varphi_2)$ è un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Siano $A, B, C, D \in \mathbf{R}$; sia

$$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (A + Bt, C + Dt) .$$

Si ha
$\begin{cases} \bar{x}(t) = A + Bt \\ \bar{y}(t) = C + Dt \end{cases} .$

Quindi si ha
$\begin{cases} \bar{x}'(t) = B \\ \bar{y}'(t) = D \end{cases} .$

$(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$\begin{cases} B = C + Dt + t \\ D = A + Bt + C + Dt \end{cases} ;$
quindi se e solo se
$\begin{cases} D + 1 = 0 \\ B = C \\ B + D = 0 \\ D = A + C \end{cases} ,$
cioè
$\begin{cases} D = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ A = -2 \end{cases} .$

La funzione

$$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (-2 + t, 1 - t)$$

è quindi soluzione dell'equazione non omogenea.

Un integrale generale del sistema è quindi

$$(x(t), y(t)) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) +$$

$$+(-2 + t, 1 - t), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

### 19.2.3 Problema di Cauchy per i sistemi di due equazioni

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y + 1 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Una primitiva di 1 è la funzione $\alpha(t) = t$.

Una primitiva di $e^{-t} \cdot 1$ è la funzione $\beta(t) = -e^{-t}$.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y + 1$ è quindi

$$y(t) = e^t(e^{-t} + c) = ce^t + 1 ,$$

al variare di $c$ in $\mathbf{R}$.

Per $t = 0$ si ha $c + 1 = 0$; quindi $c = -1$.

La soluzione del problema di Cauchy sopra è quindi

$$y(t) = e^t - 1 .$$

La funzione $x(t)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2x - e^t + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases} .$$

Una primitiva di 2 è la funzione $\alpha(t) = 2t$.

Una primitiva di

$$e^{-2t}(-e^t + 1) - -e^{-t} + e^{-2t}$$

è la funzione $\beta(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $x' = 2x - e^t + 1$ è quindi

$$x(t) = e^{2t}(e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + c) = ce^{2t} + e^t - \frac{1}{2} ,$$

al variare di $c$ in $\mathbf{R}$.

Per $t = 0$ si ha $c + 1 - \frac{1}{2} = 0$; quindi $c = -\frac{1}{2}$.

La soluzione del problema di Cauchy sopra è quindi

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - \frac{1}{2} \, .$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato è quindi

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - \frac{1}{2} \\ y(t) = e^t - 1 \end{cases} \, .$$

2. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy, di funzione incognita $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x \\ x(0) = 0, \; y(0) = 0 \end{cases} \, .$$

**Risoluzione.** Si tratta di un sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti.

Le soluzioni di $x' = 1$ sono

$$x(t) = t + c_1 \quad c_1 \in \mathbf{R} \, .$$

Si ha quindi

$$y' = t + c_1 \quad c_1 \in \mathbf{R} \, .$$

Un integrale generale del sistema è quindi

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + t \\ y(t) = c_1 t + c_2 + \frac{1}{2}t^2 \end{cases} , \; c_1, c_2 \in \mathbf{R} \, .$$

Imponendo le condizioni iniziali, si trova $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \; \mathbf{R} \, ,$$

cioè

$$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (t, \frac{1}{2}t^2) \, .$$

### 19.2.4 Autovettori e problema di Cauchy per i sistemi di due equazioni

[2]

[2] Non in programma

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti di matrice

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè $(-1-\lambda)^2 = 1$; si ha quindi $-1-\lambda = \pm 1$; quindi $-\lambda = 1 \pm 1$; quindi $\lambda = -1 \pm 1$; quindi $\lambda = 0$ o $\lambda = -2$.

Gli autovettori di $a$ corrispondenti a $\lambda = 0$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} ,$$

cioè di $A - B = 0$; si trova

$$\begin{cases} A = t \\ B = t \end{cases} , \text{ per un } t \in \mathbf{R} .$$

Una base dell'autospazio è $(1, 1)$. Si trova la soluzione del sistema differenziale

$$(x_1(t), y_1(t)) = (1, 1),\ t \in \mathbf{R} .$$

Gli autovettori di $a$ corrispondenti a $\lambda = -2$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} ,$$

cioè di $A + B = 0$; si trova

$$\begin{cases} A = t \\ B = -t \end{cases} , \text{ per un } t \in \mathbf{R} .$$

Una base dell'autospazio è $(1, -1)$. Si trova la soluzione del sistema differenziale

$$(x_1(t), y_1(t)) = (1, -1)e^{-2t},\ t \in \mathbf{R} .$$

L'integrale generale del sistema differenziale è quindi

$$(x(t), y(t)) = c_1(1,1) + c_2(1,-1)e^{-2t},\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}\ .$$

La funzione $(x(t), y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases},$$

cioè se e solo se $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)e^{-2t},\ t \in \mathbf{R}\ .$$

### 19.2.5 Problema di Cauchy per i sistemi di tre equazioni

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + z \\ z' = 2x + t \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** Da $x' = x$ e $x(0) = 0$ si trova
$x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}$.
Si ha $\begin{cases} z' = t \\ z(0) = 0 \end{cases}$ quindi si ha
$z(t) = \frac{t^2}{2},\ t \in \mathbf{R}$.
Si ha $\begin{cases} y' = \frac{t^2}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ quindi si ha
$y(t) = \frac{t^3}{6},\ t \in \mathbf{R}$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \frac{t^3}{6} \\ z(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases},\ t \in \mathbf{R}\ .$$

## 19.3 Equazioni differenziali lineari di ordine superiore al primo

### 19.3.1 Integrale generale di un'equazioni differenziale lineare

1. **Esercizio.** Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+$; trovare in funzione di $\alpha$, in forma reale, tutte le soluzioni di

$$y'' + \alpha y = e^{\alpha x}\ .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$$\lambda^2 + \alpha = 0 .$$

Supponiamo $\alpha > 0$.

L'equazione caratteristica ha due soluzioni semplici date da $\lambda = \pm\sqrt{\alpha}i$.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x), \quad y_2(x) = \sin(\sqrt{\alpha}x) .$$

Non essendo $\alpha$ soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbf{R}$ tali che

$$\psi(x) = Ae^{\alpha x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha
$\psi'(x) = \alpha Ae^{\alpha x}$,
$\psi''(x) = \alpha^2 Ae^{\alpha x}$.

Quindi $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$\alpha^2 e^{\alpha x} + \alpha Ae^{\alpha x} = e^{\alpha x}$,
cioè se e solo se
$A(\alpha^2 + \alpha) = 1$.

Si ha $\alpha^2 + \alpha > 0$; quindi si ha $A(\alpha^2 + \alpha) = 1$ se e solo se
$A = \frac{1}{\alpha^2+\alpha}$.

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} e^{\alpha x} .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}x) + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} e^{\alpha x} ,$$

al variare di $c_1$ e di $c_2$ in $\mathbf{R}$.

Supponiamo $\alpha = 0$.

Si ottiene l'equazione

$$y'' = 1 .$$

La funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se esiste $c_1 \in \mathbf{R}$ tale che

$$y'(x) = x + c_1 ;$$

quindi se e solo se esiste $c_2 \in \mathbf{R}$ tale che

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2 .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_2 + c_1 x + \frac{1}{2}x^2 \ ,$$

al variare di $c_1$ e di $c_2$ in $\mathbf{R}$.

2. **Esercizio.** Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+$; trovare, in funzione di $\alpha$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - \alpha y = e^{\alpha x} \ .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti.

Supponiamo $\alpha = 0$.

Si ottiene l'equazione

$$y'' = 1 \ .$$

La funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se esiste $c_1 \in \mathbf{R}$ tale che

$$y'(x) = x + c_1 \ ;$$

quindi se e solo se esiste $c_2 \in \mathbf{R}$ tale che

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2 \ .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_2 + c_1 x + \frac{1}{2}x^2 \ ,$$

al variare di $c_1$ e di $c_2$ in $\mathbf{R}$.

Supponiamo $\alpha > 0$.

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$$\lambda^2 - \alpha = 0 \ .$$

L'equazione caratteristica ha due soluzioni semplici date da $\lambda = \pm\sqrt{\alpha}$.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^{\sqrt{\alpha}x}, \quad y_2(x) = e^{-\sqrt{\alpha}x} \ .$$

Essendo $\alpha > 0$, $\alpha$ è soluzione dell'equazione se e solo se $\alpha = \sqrt{\alpha}$, cioè se e solo se $\alpha^2 = \alpha$, cio e , essendo $\alpha \neq 0$ se e solo se $\alpha = 1$.

Supponiamo $\alpha \neq 1$.

Non essendo $\alpha$ soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbf{R}$ tali che

$$\psi(x) = Ae^{\alpha x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha
$\psi'(x) = \alpha A e^{\alpha x}$,
$\psi''(x) = \alpha^2 A e^{\alpha x}$.

Quindi $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$\alpha^2 e^{\alpha x} - \alpha A e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$,
cioè se e solo se
$A(\alpha^2 - \alpha) = 1$.

Si ha $\alpha^2 - \alpha \neq 0$; quindi si ha $A(\alpha^2 - \alpha) = 1$ se e solo se
$A = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}$.

Si ha quindi
$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} e^{\alpha x} \ .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da
$$y(x) = c_1 e^{(\sqrt{\alpha} x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha} x} + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} e^{\alpha x} \ ,$$
al variare di $c_1$ e di $c_2$ in $\mathbf{R}$.

Supponiamo $\alpha = 1$.

Si ottiene l'equazione
$$y'' - y = e^x \ .$$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi
$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x} \ .$$

Essendo 1 soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbf{R}$ tali che
$$\psi(x) = Axe^x$$
è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha
$\psi'(x) = Ae^x + Axe^x$,
$\psi''(x) = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$.

Quindi $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$,
cioè se e solo se
$2A = 1$, cioè $A = \frac{1}{2}$.

Si ha quindi
$$\psi(x) = \frac{1}{2} x e^x \ .$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \ ,$$
al variare di $c_1$ e di $c_2$ in $\mathbf{R}$.

### 19.3.2 Problema di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo a coefficienti costanti

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è
$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$; le soluzioni sono $\lambda = -2 \pm \sqrt{9}$; quindi $\lambda = -5$ e $\lambda = 1$.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^{-5x}, \quad y_2(x) = e^x .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A + Bx$$

è soluzione dell'equazione non omogenea. Si ha $z'(x) = B$ e $z''(x) = 0$; quindi $z(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$4B - 5(A + Bx) = x$,
cioè
$-5Bx + 4A - 5B = x$
cioè
$\begin{cases} -5B = 1 \\ 4B - 5A = 0 \end{cases}$;
si ha $B = -\frac{1}{5}$ e $-\frac{4}{5} - 5A = 0$; quindi $5A = -\frac{4}{5}$; quindi $A = -\frac{4}{25}$. Si ha quindi

$$z(x) = -\frac{4}{25} - \frac{1}{5}x .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^x - \frac{4}{25} - \frac{1}{5}x,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -5c_1 e^{-5x} + c_2 e^x - \frac{1}{5}$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{4}{25} \\ -5c_1 + c_2 = \frac{1}{5} \end{cases} ;$$

Si ha $6c_1 = -\frac{1}{25}$; quindi $c_1 = -\frac{1}{150}$; quindi $c_2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -\frac{1}{150}e^{-5x} + \frac{1}{6}e^x - \frac{4}{25} - \frac{1}{5}x,\ x \in \mathbf{R} .$$

2. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 3y'' + 2y = x + 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = 0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm\sqrt{2}i$ e $\pm i$; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = \cos(\sqrt{2}x),\ y_2(x) = \sin(\sqrt{2}x),\ y_3(x) = \cos x,\ y_4(x) = \sin x\ .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A + Bx$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = B$, $z''(x) = z'''(x) = z^{(4)}(x) = 0$;
la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se $2Bx + 2A = x + 1$, cioè se e solo se $A$ e $B$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ 2A = 1 \end{cases} ;$$

si ha $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$;
si ha quindi

$$z(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{2}x) + c_2\sin(\sqrt{2}x) + c_3\cos x + c_4\sin x\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -c_1\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + c_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) - c_3\sin x + c_4\cos x + \frac{1}{2}$,
$y''(x) = -c_1 2\cos(\sqrt{2}x) + c_2 2\sin(\sqrt{2}x) - c_3\cos x + c_4\sin x$,
$y'''(x) = c_1 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) - c_2 2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) + c_3\sin x - c_4\cos x$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} {}_1 + c_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{2}c_2 + c_4 + \frac{1}{2} = 0 \\ -2c_1 - c_3 = 0 \\ -2\sqrt{2}c_2 - c_4 = 0 \end{cases} ;$$

si ha quindi $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$, $c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c_4 = -1$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x) - \cos x - \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \ .$$

3. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' + 3y = x^2 - x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono $\frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2}$; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x),\ y_2(x) = e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x) \ .$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A + Bx + Cx^2$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = B + 2Cx,\ z''(x) = 2C$;
la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$2C - (B + 2Cx) + 3(A + Bx + Cx^2) = x^2 - x + 3$
cioè se e solo se
$3Cx^2 + (-2C + 3B)x + 2C - B + 3A = x^2 - x + 3$,
cioè se e solo se $A$, $B$, $C$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 3C = 1 \\ -2C + 3B = -1 \\ 2C - B + 3A = 3 \end{cases} ;$$

si trova $C = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{9}$, $A = \frac{20}{27}$;
si ha quindi

$$z(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{20}{27} \ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x) + c_2 e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x) + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{20}{27},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} \ .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) =$

$c_1e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)\frac{1}{2}+c_1e^{\frac{x}{2}}(-\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)\frac{\sqrt{11}}{2}+c_2e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)\frac{1}{2}+$
$c_2e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)\frac{\sqrt{11}}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1+\frac{20}{27}=0 \\ \frac{1}{2}c_1-\frac{\sqrt{11}}{2}c_2-\frac{1}{9}=0 \end{cases};$$

si trova $c_1=-\frac{20}{27}$, $c_2=\frac{26}{27\sqrt{11}}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x)=-\frac{20}{27}e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+\frac{26}{27\sqrt{11}}e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{20}{27},\ x\in\mathbf{R}\ .$$

4. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''+y''+y'+y=x+3 \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$, cioè $(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono $-1$ e $\pm i$; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x)=e^{-x},\ y_2(x)=\sin x,\ y_3(x)=\cos x\ .$$

Esistono $A,B\in\mathbf{R}$ tali che

$$z(x)=A+Bx$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x)=B$, $z''(x)=z'''(x)=0$;

la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se $B+Bx+A=x+3$ cioè se e solo se

$$\begin{cases} B=1 \\ B+A=0 \end{cases};$$

si trova $B=1$, $A=2$; si ha quindi

$$z(x)=x+2\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2\sin x+c_3\cos x+x+2,\ c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 \cos x - c_3 \sin x + 1$,
$y''(x) = c_1 e^{-x} - c_2 \sin x - c_3 \cos x$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 + 2 = 0 \\ -c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases} ;$$

si trova $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -e^{-x} - 2\sin x - \cos x + x + 2,\ x \in \mathbf{R} .$$

5. **Esercizio.**

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = 2 \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 .$$

L'equazione si scrive
$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$,
cioè
$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$.

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ semplice, $\lambda = -1$ doppia.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = xe^{-x} .$$

Poichè 0 è radice semplice del polinomio caratteristico, esiste $A \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = Ax$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = A$, $z''(x) = z'''(x) = 0$.

La funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se $A = 2$.

Sii ha quindi

$$z(x) = 2x .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + 2x,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -c_2e^{-x} + c_3e^{-x} - c_3xe^{-x} + 2 = (-c_2 + c_3)e^{-x} - c_3xe^{-x} + 2$,
$y''(x) = (c_2 - c_3)e^{-x} - c_3e^{-x} + c_3xe^{-x} = (c_2 - 2c_3)e^{-x} + c_3xe^{-x}$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se
$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_2 + c_3 + 2 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_2 + c_3 = -2 \\ c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} -c_3 = -1 \\ c_2 = 2c_3 + 1 \\ c_1 = -c_2 \end{cases}$,
cioè $\begin{cases} c_3 = 1 \\ c_2 = 3 \\ c_1 = -3 \end{cases}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -3 + 3e^{-x} + xe^{-x} + 2x,\ x \in \mathbf{R}\ .$$

6. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' + 6y = e^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, cioè $(\lambda^2 + 2)(\lambda + 3) = 0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm\sqrt{2}i$ e $-3$; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = \cos(\sqrt{2}x),\ y_3(x) = \sin(\sqrt{2}x)\ .$$

Esiste $A \in \mathbf{R}$ tale che

$$z(x) = Ae^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = z''(x) = z'''(x) = Ae^x$;
la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x + 3Ae^x = e^x$, cioè $9A = 1$, cioè $A = \frac{1}{12}$;
si ha quindi

$$z(x) = \frac{1}{12}e^x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2\cos(\sqrt{2}x) + c_3\sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{12}e^x,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -3c_1 e^{-3x} - \sqrt{2}c_2 \sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}c_3 \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{12}e^x$,
$y''(x) = 9c_1 e^{-3x} - 2c_2 \cos(\sqrt{2}x) - 2c_3 \sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{12}e^x$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{12} = 0 \\ -3c_1 + \sqrt{2}c_3 + \frac{1}{12} = 0 \\ 9c_1 - 2c_2 + \frac{1}{12} = 0 \end{cases} ;$$

si trova $c_1 = -\frac{1}{44}$, $c_2 = -\frac{2}{33}$, $c_3 = -\frac{5}{33\sqrt{2}}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -\frac{1}{44}e^{-3x} - \frac{2}{33}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{5}{33\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{12}e^x,\ x \in \mathbf{R} .$$

7. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \frac{1}{4},\ y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 .$$

L'equazione è equivalente a

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 ;$$

le soluzioni sono 1 e $-1$, doppie.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^x,\ \varphi_2(x) = xe^x,\ \varphi_3(x) = e^{-x},\ \varphi_4(x) = xe^{-x} .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo 1 soluzione soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbf{R}$ tale che

$$\psi(x) = Ax^2 e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea assegnata.

Si ha
$\psi'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x$,
$\psi''(x) = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x = 2Ae^x + 4Axe^z + Ax^2e^x$,
$\psi'''(x) = 2Ae^x + 4Ae^x + 4Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x = 6Ae^x + 6Axe^z + Ax^2e^x$,
$\psi^{(4)}(x) = 6Ae^x + 6Ae^x + 6Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x = 12Ae^x + 8Axe^z + Ax^2e^x$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$12Ae^x + 8Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x) + Ax^2e^x = e^x\ ;$$

quindi se e solo se

$$8Ae^x = e^x\ ;$$

quindi se e solo se $A = \frac{1}{8}$.
Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{8}x^2e^x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} + \frac{1}{8}x^2e^x\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x - c_3e^{-x} + c_4e^{-x} - c_4xe^{-x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x =$
$(c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x + (-c_3 + c_4)e^{-x} - c_4xe^{-x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x,$
$y''(x) = (c_1 + c_2)e^x + c_2e^x + c_2xe^x + (c_3 - c_4)e^{-x} - c_4e^{-x} + c_4xe^{-x} +$
$\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x + +\frac{1}{4}xe^x\frac{1}{8}x^2e^x =$
$(c_1 + 2c_2)e^x + c_2xe^x + (c_3 - 2c_4)e^{-x} + c_4xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x,$
$y'''(x) = (c_1 + 2c_2)e^x + c_2e^x + c_2xe^x + (-c_3 + 2c_4)e^{-x} + c_4e^{-x} - c_4xe^{-x} +$
$\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + +\frac{1}{4}xe^x\frac{1}{8}x^2e^x =$
$(c_1 + 3c_2)e^x + c_2xe^x + (-c_3 + 3c_4)e^{-x} - c_4xe^{-x} + \frac{3}{4}e^x + \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x.$
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 - 2c_4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ c_1 + 3c_2 - c_3 + 3c_4 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ -c_3 + c_2 - c_3 + c_4 = 0 \\ -c_3 + 2c_2 + c_3 - 2c_4 = 0 \\ -c_3 + 3c_2 - c_3 + 3c_4 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 - 2c_3 + c_4 = 0 \\ c_2 - c_4 = 0 \\ 3c_2 - 2c_3 + 3c_4 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = c_4 \\ c_4 - 2c_3 + c_4 = 0 \\ 3c_4 - 2c_3 + 3c_4 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = c_4 \\ c_3 = c_4 \\ 4c_4 = -\frac{3}{4} \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} c_4 = -\frac{3}{16} \\ c_3 = -\frac{3}{16} \\ c_2 = -\frac{3}{16} \\ c_1 = \frac{3}{16} \end{cases} .$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{3}{16}e^x - \frac{3}{16}xe^x - \frac{3}{16}e^{-x} - \frac{3}{16}xe^{-x} + \frac{1}{8}x^2e^x .$$

8. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 3y'' - 4y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$, cioè $(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e $-2$; la radice 1 è semplice, la radice 2 è doppia; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-2x},\ y_3(x) = xe^{-2x} .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A\sin x + B\cos x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = A\cos x - B\sin x$,
$z''(x) = -A\sin x - B\cos x$,
$z'''(x) = -A\cos x + B\sin x$;
la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$-A\cos x + B\sin x + 3(-A\sin x - B\cos x) - 4(A\sin x + B\cos x) = \sin x$,
cioè se e solo se
$(-A - 7B)\cos x + (B - 7A)\sin x = \sin x$,
cioè se e solo se $A$ e $B$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} -A - 7B = 0 \\ B - 7A = 1 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a

$$\begin{cases} A=-7B \\ B+49B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50B=1 \\ A=-7B \end{cases} \qquad \begin{cases} B=\frac{1}{50} \\ A=-\frac{7}{50} \end{cases} ;$$

si ha quindi

$$z(x)=-\frac{7}{50}\sin x+\frac{1}{50}\cos x\,.$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}-\frac{7}{50}\sin x+\frac{1}{50}\cos x,\ c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}\,.$$

Per ogni $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$ e per ogni $x\in\mathbf{R}$ si ha
$y'(x)=c_1e^x-2c_2e^{-2x}+c_3e^{-2x}-2c_3xe^{-2x}-\frac{7}{50}\cos x-\frac{1}{50}\sin x$,
$y''(x)=c_1e^x+4c_2e^{-2x}-2c_3e^{-2x}-2c_3e^{-2x}+4c_3xe^{-2x}+\frac{7}{50}\sin x-\frac{1}{50}\cos x=$
$c_1e^x+4c_2e^{-2x}-4c_3e^{-2x}+4c_3xe^{-2x}+\frac{7}{50}\sin x-\frac{1}{50}\cos x$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1+c_2+\frac{1}{50}=0 \\ c_1-2c_2+c_3-\frac{7}{50}=0 \\ c_1+4c_2-4c_3-\frac{1}{50}=0 \end{cases} ;$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 50c_1+50c_2=-1 \\ 50c_1-100c_2+50c_3=7 \\ 50c_1+200c_2-200c_3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50c_1=-1-50c_2 \\ -1-50c_2-100c_2+50c_3=7 \\ -1-50c_2+200c_2-200c_3=1 \end{cases} ;$$

si ha $\begin{cases} -150c_2+50c_3=8 \\ 150c_2-200c_3=2 \end{cases}$ ; quindi $-150c_3=10$; quindi $c_3=-\frac{1}{15}$; si ha $75c_2+100\frac{1}{15}=1$; quindi $225c_2+20=3$; quindi $c_2=-\frac{17}{225}$; si ha $c_1=-c_2-\frac{1}{50}=\frac{17}{225}-\frac{1}{50}=\frac{25}{450}=\frac{1}{18}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x)=\frac{1}{18}e^x-\frac{17}{225}e^{-2x}-\frac{1}{15}xe^{-2x}-\frac{7}{50}\sin x+\frac{1}{50}\cos x,\ x\in\mathbf{R}\,.$$

9. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''+2y'=\sin x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^2+2\lambda=0$, cioè $\lambda(\lambda+2)$;

le radici dell'equazione caratteristica sono 0 e $-2$ entrambe semplici; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = e^{-2x}\ .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A \sin x + B \cos x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = A \cos x - B \sin x$,
$z''(x) = -A \sin x - B \cos x$;

la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$-A \sin x - B \cos x + 2(A \cos x - B \sin x) = \sin x$,
cioè se e solo se
$(-A - 2B - 1) \sin x + (-B + 2A) \cos x = 0$,
cioè se e solo se $A$ e $B$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} -A - 2B - 1 = 0 \\ -B + 2A = 0 \end{cases} ;$$

il sistema equivale a

$$\begin{cases} B = 2A \\ -A - 4A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = -\frac{2}{5} \end{cases} ;$$

si ha quindi

$$z(x) = -\frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$;
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{2}{5} = 0 \\ -2c_2 - \frac{1}{5} = 0 \end{cases} ;$$

quindi $c_2 = -\frac{1}{10}$; quindi $c_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x,\ x \in \mathbf{R}\ .$$

10. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 9y' = \sin x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^3 + 9\lambda = 0$, cioè $\lambda(\lambda^2 + 9) = 0$;
le radici dell'equazione caratteristica sono 0 e $\pm 3i$; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = \cos(3x),\ y_3(x) = \sin(3x)\ .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z(x) = A\cos x + B\sin x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea; si ha
$z'(x) = -A\sin x + B\cos x$,
$z''(x) = -A\cos x - B\sin x$,
$z'''(x) = A\sin x - B\cos x$;
la funzione $z(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$A\sin x - B\cos x + 9(-A\sin x + B\cos x) = \sin x$,
cioè se e solo se
$-8A\sin x + 8B\cos x = \sin x$,
cioè se e solo se $-8A = 1$ e $8B = 0$, cioè se e solo se $A = -\frac{1}{8}$ e $B = 0$.
Si ha quindi

$$z(x) = -\frac{1}{8}\cos x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x) - \frac{1}{8}\cos x,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -3c_2\sin(3x) + 3c_3\cos(3x) + \frac{1}{8}\sin x$,
$y''(x) = -9c_2\cos(3x) - 9c_3\sin(3x) + \frac{1}{8}\cos x$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{8} = 0 \\ 3c_3 = 0 \\ -9c_2 + \frac{1}{8} = 0 \end{cases} ;$$

si trova $c_3 = 0$, $c_2 = \frac{1}{72}$ $c_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{72} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}\cos(3x) - \frac{1}{8}\cos x,\ x \in \mathbf{R}\ .$$

11. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = x + \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, cioè $(\lambda + 2)^2 = 0$;
l'equazione caratteristica ha per radice solo $-2$ che è doppia; un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^{-2x},\ y_2(x) = xe^{-2x} .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z_1(x) = A + Bx$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + 4y' + 4y = x .$$

Si ha
$z_1'(x) = A$,
$z_1''(x) = 0$.
La funzione $z_1(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea $y''+4y'+4y = x$ se e solo se
$4B + 4(A + Bx) = x$,
cioè se e solo se
$A$, $B$ soddisfano il sistema
$\begin{cases} 4B = 1 \\ 4B + 4A = 0 \end{cases} .$
Si trova $B = \frac{1}{4}$, $A = -\frac{1}{4}$.
Si ha quindi

$$z_1(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x .$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$z_2(x) = A\cos x + B\sin x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + 4y' + 4y = \sin x .$$

Si ha
$z_2'(x) = -A\sin x + B\cos x$,
$z_2''(x) = -A\cos x - B\sin x$.

La funzione $z_2(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea $y''+4y'+4y = \sin x$ se e solo se
$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\sin x) = \sin x$,
cioè se e solo se
$A$, $B$ soddisfano il sistema
$\begin{cases} -A + 4B + 4A = 0 \\ -B - 4A + 4B = 1 \end{cases}$,
cioè
$\begin{cases} 3A + 4B = 0 \\ -4A + 3B = 1 \end{cases}$,
cioè
$\begin{cases} A = -\frac{4}{3}B \\ -4(-\frac{4}{3}B + 3B = 1 \end{cases}$,
cioè
$\begin{cases} A = -\frac{4}{3}B \\ \frac{25}{3}B = 1 \end{cases}$,
cioè
$\begin{cases} B = \frac{3}{25} \\ A = -\frac{4}{25} \end{cases}$.
Si ha quindi

$$z_2(x) = -\frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x \ .$$

Una soluzione dell'equazione non omogenea assegnata è quindi

$$z(x) = z_1(x) + z_2(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x \ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x \ .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -2c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x} - 2xc_2e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{4}{25}\sin x + \frac{3}{25}\cos x$.
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{4} - \frac{4}{25} = 0 \\ -2c_1 + c_2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{25} = 0 \end{cases} ;$$

si ha quindi $c_1 = \frac{41}{100}$ e $c_2 = 2\frac{41}{100} - \frac{1}{4} - \frac{3}{25} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{41}{100}e^{-2x} + \frac{9}{20}xe^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x \ .$$

12. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^2 + 1 = 0$;
le soluzioni sono $\lambda = \pm i$.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos x,\ \varphi_2(x) = \sin x .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo $i$ soluzione dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\psi(x) = x(A\cos x + B\sin x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y''' + y = \cos x .$$

Si ha
$\psi(x) = Ax\cos x + Bx\sin x$,
$\psi'(x) = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$,
$\psi''(x) = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$Ax\cos x + Bx\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\cos x = \cos x$,
cioè se e solo se
$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$;
quindi se e solo se $\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $A - 0$ e $B = \frac{1}{2}$.

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x\sin x .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} ;$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x \sin x \ .$$

13. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è
$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$;
le soluzioni sono $\lambda = 1 \pm i$.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^x \cos x,\ \varphi_2(x) = e^x \sin x \ .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo $1 + i$ soluzione dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\psi(x) = xe^x(A \cos x + B \sin x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x \ .$$

Si ha
$\psi(x) = Axe^x \cos x + Bxe^x \sin x$,
$\psi'(x) = Ae^x \cos x + Axe^x \cos x - Axe^x \sin x + Be^x \sin x + Bxe^x \sin x + Bxe^x \cos x$
$= Ae^x \cos x + (A + B)xe^x \cos x + Be^x \sin x + (B - A)xe^x \sin x$,
$\psi''(x) =$
$Ae^x \cos x - Ae^x \sin x + (A + B)e^x \cos x + (A + B)xe^x \cos x - (A + B)xe^x \sin x +$
$Be^x \sin x + Be^x \cos x + (B - A)e^x \sin x + (B - A)xe^x \sin x + (B - A)xe^x \cos x$
$= (2A + 2B)e^x \cos x + 2Bxe^x \cos x + (2B - 2A)e^x \sin x - 2Axe^x \sin x$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se
$(2A + 2B)e^x \cos x + 2Bxe^x \cos x + (2B - 2A)e^x \sin x - 2Axe^x \sin x$
$-2(Ae^x \cos x + (A + B)xe^x \cos x + Be^x \sin x + (B - A)xe^x \sin x)$
$+2(Axe^x \cos x + Bxe^x \sin x) = e^x \sin x$,
cioè se e solo se

$2Be^x \cos x - 2Ae^x \sin x = e^x \sin x$;
quindi se e solo se $B - 0$ e $-2A = 1$, cioè se e solo se $B - 0$ e $A = -\frac{1}{2}$.

Si ha quindi

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}xe^x \cos x \; .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x - \frac{1}{2}xe^x \cos x \; .$$

Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = c_1 e^x \cos x - c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x - \frac{1}{2}e^x \cos x - \frac{1}{2}xe^x \cos x + \frac{1}{2}xe^x \sin x$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} ;$$

si ha quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{2}$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}xe^x \cos x \; .$$

14. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + y'' = 1 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \; .$$

L'equazione è equivalente a

$$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \; ;$$

le soluzioni sono 0 doppia e $\pm i$ semplici.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1, \; \varphi_2(x) = x, \; \varphi_3(x) = \cos x, \; \varphi_4(x) = \sin x \; .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo 0 soluzione soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbf{R}$ tale che

$$\psi(x) = Ax^2$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(4)} + y'' = 1 \; .$$

Si ha
$\psi'(x) = 2Ax$,
$\psi''(x) = 2A$,
$\psi'''(x) = 0$,
$\psi^{(4)}(x) = 0$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$2A = 1 \, ;$$

cioè se e solo se $A = \frac{1}{2}$.

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 \; .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{2}x^2 \; .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = c_2 - c_3 \sin x + c_4 \cos x + x$,
$y''(x) = -c_3 \cos x - c_4 \sin x + 1$,
$y'''(x) = c_3 \sin x - c_4 \cos x$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ -c_3 = 1 \\ -c_2 = 0 \end{cases} \; .$$

si ha quindi $c_2 = 0$, $c_4 = 0$, $c_3 = 1$, $c_1 = -1$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = -1 + \cos x + \frac{1}{2}x^2 \; .$$

15. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 2y'' = x^2 + x + 1 \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 0,\, y''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 .$$

L'equazione è equivalente a

$$\lambda^2(\lambda + 2) = 0 ;$$

le soluzioni sono 0 doppia e $-2$ semplice.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = x,\ \varphi_3(x) = e^{-2x} .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo 0 soluzione soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\psi(x) = x^2(A + Bx + Cx^2)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y''' + 2y'' = x^2 + x + 1 .$$

Si ha

$\psi(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$,
$\psi'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$,
$\psi''(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2$,
$\psi'''(x) = 6B + 24Cx$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$6B + 24Cx + 2(2A + 6Bx + 12cx^2) = x^2 + x + 1 ;$$

cioè se e solo se

$$st24C = 124C + 12B = 16B + 4A = 1 ,$$

cioè se e solo se

$$stC = \frac{1}{24}1 + 12B = 16B + 4A = 1 ,$$

cioè se e solo se

$$stC = \frac{1}{24}B = 0A = \frac{1}{4} .$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = x^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{24}x^2) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4 .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4 .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = c_2 - 2c_3e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3$,
$y''(x) = 4c_3e^{-2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ 4c_3 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} c_3 = -\frac{1}{8} \\ c_1 = \frac{1}{8} \\ c_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} ,$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4 .$$

16. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 4y' = \sin(2x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 .$$

L'equazione è equivalente a

$$\lambda(\lambda^2 + 4) = 0 ;$$

le soluzioni sono 0 e $\pm 2i$, tutte se0mplici.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = \cos(2x),\ \varphi_3(x) = \sin(2x) .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo $2i$ soluzione soluzione semplice dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tale che

$$\psi(x) = x(A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y''' + 4y' = \sin(2x)\ .$$

Si ha
$\psi(x) = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$,
$\psi'(x) = A\cos(2x) - Ax\sin(2x)\cdot 2 + B\sin(2x) + Bx\cos(2x)\cdot 2 =$
$A\cos(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x) - 2Ax\sin(2x)$,
$\psi''(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + 2B\cos(2x)$
$-\,4Bx\sin(2x) - 2A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) =$
$4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$,
$\psi'''(x) = -8B\sin(2x) - 8A\cos(2x) - 4A\cos(2x) +$
$8Ax\sin(2x) - 4B\sin(2x) - 8Bx\cos(2x) =$
$-12A\cos(2x) - 12B\sin(2x) - 8Bx\cos(2x) + 8Ax\sin(2x)$.
La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-12A\cos(2x) - 12B\sin(2x) - 8Bx\cos(2x) + 8Ax\sin(2x)+$$

$$4\,(A\cos(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x) - 2Ax\sin(2x)) = \sin(2x)\,;$$

quindi se e solo se

$$-8A\cos(2x) - 8B\sin(2x) = \sin(2x)\ ;$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} -8A = 0 \\ -8B = 1 \end{cases}$$

cioè se e solo se $A = 0$ e $B = -\frac{1}{8}$.
Si ha quindi

$$\psi(x) = -\frac{1}{8}x\sin(2x)\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) - \frac{1}{8}x\sin(2x)\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -2c_2\sin(2x) + 2c_3\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$,
$y''(x) = -4c_2\cos(2x) - 4c_3\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x\sin(2x) =$
$-\,4c_2\cos(2x) - 4c_3\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}x\sin(2x)$.

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -2c_3 = 0 \\ -4c_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} .$$

si ha quindi $c_3 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, $c_1 = \frac{1}{8}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{8}x\sin(2x) .$$

17. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 .$$

L'equazione è equivalente a

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0 ;$$

le soluzioni sono $i$ e $-i$, doppie.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos x,\ \varphi_2(x) = \sin x,\ \varphi_3(x) = x\cos,\ \varphi_4(x) = x\sin x .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Essendo $i$ soluzione sdoppia dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tale che

$$\psi(x) = x^2(A\cos x + B\sin x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea assegnata.

Si ha
$\psi(x) = Ax^2\cos x + Bx^2\sin x$,
$\psi'(x) = 2Ax\cos x - Ax^2\sin x + 2Bx\sin x + Bx^2\cos x$,
$\psi''(x) = 2A\cos x - 2Ax\sin x - 2Ax\sin x - Ax^2\cos x +$
$2B\sin x + 2Bx\cos x + 2Bx\cos x - Bx^2\sin x =$
$Ax^2\cos x - Bx^2\sin x + 4Bx\cos x - 4Ax\sin x + 2A\cos x + 2B\sin x$,
$\psi'''(x) = -2Ax\cos x + Ax^2\sin x - 2Bx\sin x - Bx^2\cos x + 4B\cos x +$
$-\ 4Bx\sin x - 4A\sin x - 4Ax\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x =$
$-\ Bx^2\cos x + Ax^2\sin x - 6Ax\cos x - 6Bx\sin x + 6B\cos x - 6A\sin x$,

$\psi(4)(x) = -2Bx\cos x + Bx^2 \sin x - 2Ax\sin x + Ax^2\cos x - 6A\cos x +$
$+ 6Ax\sin x - 6B\sin x - 6Bx\cos x - 6B\sin x - 6A\cos x =$
$Ax^2\cos x + Bx^2\sin x - 8Bx\cos x + 8Ax\sin x - 12A\cos x - 12B\sin x.$

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-Ax^2\cos x + Bx^2\sin x - 8Bx\cos x + 8Ax\sin x - 12A\cos x - 12B\sin x+$$

$$2(-Ax^2\cos x - Bx^2\sin x + 4Bx\cos x - 4Ax\sin x + 2A\cos x + 2B\sin x)+$$

$$Ax^2\cos x + Bx^2\sin x = \sin x\,;$$

quindi se e solo se

$$-8A\cos x - 8B\sin x = \sin x\ ;$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} -8A = 0 \\ -8B = 1 \end{cases}$$

cioè se e solo se $A = 0$ e $B = -\frac{1}{8}$.

Si ha quindi

$$\psi(x) = -\frac{1}{8}x^2\sin x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x - \frac{1}{8}x^2\sin x\ .$$

Per ogni $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x + c_3\cos x - c_3x\sin x + c_4\sin x$
$+ c_4x\cos x - \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{8}x^2\cos x =$
$(c_2 + c_3)\cos x + (-c_1 + c_4)\sin x + c_4x\cos x - c_3x\sin x - \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{8}x^2\cos x,$
$y''(x) = -(c_2 + c_3)\sin x + (-c_1 + c_4)\cos x + c_4\cos x - c_4x\sin x$
$- c_3\sin x - c_3x\cos x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{8}x^2\sin x =$
$(-c_1 + 2c_4)\cos x + (-c_2 - 2c_3)\sin x - c_3x\cos x - c_4x\sin x$
$- \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{8}x^2\sin x,$
$y'''(x) = -(c_1 + 2c_4)\sin x + (-c_2 - 2c_3)\cos x - c_3\cos x + c_3x\sin x$
$-c_4\sin x - c_4x\cos x - c_4x\cos x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{4}x\sin x + \frac{1}{8}x^2\cos x =$
$(-c_2 - 3c_3)\cos x + (c_1 - 3c_4)\sin x - c_4x\cos x + c_3x\sin x$
$- \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}x\sin x + \frac{1}{8}x^2\cos x.$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_4 = 0 \\ -c_2 - 3c_3 - \frac{3}{4} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = -\frac{3}{4} \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_3 = -\frac{3}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \end{cases} .$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{3}{8}\sin x - \frac{3}{8}x\cos x - \frac{1}{8}x^2\sin x \ .$$

### 19.3.3 Problema di Cauchy per equazioni di ordine superiore al primo a coefficienti costanti con parametri

1. **Esercizio.** Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; risolvere in funzione di $\alpha$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = (1 - \alpha + x)e^x \\ y(\alpha) = 0,\ y'(\alpha) = e^\alpha \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \ .$$

Le soluzioni sono $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, semplici.

Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x),\ \varphi_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \ .$$

Troviamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Poichè 1 non è soluzione dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tale che

$$\psi(x) = (A + Bx)e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea assegnata.

Si ha
$\psi'(x) = Be^x + (A + Bx)e^x = (A + B + Bx)e^x$,
$\psi''(x) = Be^x + (A + B + Bx)e^x = (A + 2B + Bx)r^x$.

La funzione $\psi(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$(A+2B+Bx)e^x-(A+B+Bx)e^x+(A+Bx)e^x=(1-\alpha+x)e^x\,;$$

quindi se e solo se

$$A+B+Bx=1-\alpha+x\,;$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} B=1 \\ A+B=1-\alpha \end{cases}$$

cioè se e solo se $A=-\alpha$ e $B=1$.
Si ha quindi

$$\psi(x)=(-\alpha+x)e^x\ .$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+(-\alpha+x)e^x\ .$$

Per ogni $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ e per ogni $x\in\mathbf{R}$ si ha

$$y'(x)=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+-\frac{\sqrt{3}}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+$$

$$\frac{1}{2}c_2e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+e^{\alpha}+(-\alpha+x)e^x\ .$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+c_2e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)=0 \\ \frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)-c_1\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+ \\ \qquad c_2e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+c_2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+e^{\alpha}=e^{\alpha} \end{cases}\ ,$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} c_1e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+c_2e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)=0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\alpha}(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha))-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}\alpha} \\ \qquad (c_1\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)-c_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha))=0 \end{cases}\ ,$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} c_1e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)+c_2e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)=0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}\alpha}(c_1\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha)-c_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha))=0 \end{cases}\ .$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{2}\alpha}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha) + c_2 e^{\frac{1}{2}\alpha}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha) = 0 \\ c_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha) - c_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha) = 0 \end{cases} .$$

Si ha un sistema linere omogeneo; si ha quindi $c_1 = c_2 = 0$.
[3]

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = (-\alpha + x)e^x .$$

### 19.3.4 Problema di Cauchy per equazioni lineari a coefficienti non costanti

1. **Esercizio.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x}y' - 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** L'equazione differenziale è un'equazione differenziale del secondo ordine di forma normale definita su $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Per ogni $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$ derivabile due volte poniamo $\alpha(\varphi) = \varphi'$; chiamata $\psi = \alpha(\varphi)$, si ha $\psi = \varphi'$; quindi $\psi' = \varphi''$; la funzione $\varphi$ è soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x}y' - 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} ; (x, y, y') \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

se e solo se esiste $\psi$ soluzione massimale del problema di Cauchy univoco

$$\begin{cases} z' = \frac{1}{x}z - 1 \\ z(1) = 0 \end{cases} \quad (x, z) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} .$$

Tale problema di Cauchy è equivalente a

$$\begin{cases} z' = \frac{1}{x}z - 1 \\ z(1) = 0 \end{cases} \quad (x, z) \in ]0, +\infty[* \times \mathbf{R}.$$

Si ottiene un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare sull'intervallo $]0, +\infty[$; la soluzione è la funzione $\psi : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che $(\forall x \in$

[3] Il sistema ha una ed una sola solucione $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ in quanto il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione; si verifica facilmente che il determinante della matrice del sistema è uguale a $-1$, a conferma che il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$

$]0,+\infty[$) si ha
$\psi(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt} \int_1^x e^{-\int_1^u \frac{1}{t}\,dt}(-1)\,du =$
$-\,e^{\log x} \int_1^x e^{-\log u}\,du = -x\int_1^x \frac{1}{u}\,du =$
$-\,x\,[\log u]_1^x = -x\log x.$

Si ha $\alpha(\varphi) = \psi$ se e solo se $\varphi$ è soluzione dell'equazione $y' = \psi(x)$.

La funzione $\varphi$ è quindi soluzione del problema di Cauchy assegnato se e solo se è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -x\log x \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in ]0,+\infty[\times \mathbf{R}\ ;$$

la soluzione è la funzione $\varphi : ]0,+\infty \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che $(\forall x \in ]0,+\infty[)$ si ha
$\varphi(x) = \int_1^x -t\log t\,dt = -\left(\left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt\right) =$
$-\left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x\right) =$
$-\,\frac{x^2}{2}\log x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}.$

# Capitolo 20

# Integrale di Riemann

## 20.1 Integrale di Riemann per funzioni di 1 variabile

### 20.1.1 Calcolo di derivate

1. **Esercizio.** Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin e^t \, dt \; .$$

**Risoluzione.** Si ha
$f'(x) = \sin e^{x^3} 3x^2 - \sin e^{x^2} 2x = 3x^2 \sin e^{x^3} - 2x \sin e^{x^2}$.

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{\sin^2 x}^{\sin x^2} e^{(x+t)^2} \, dt \; ,$$

calcolare la derivata di $f$.

**Risoluzione.** Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha
$f'(x) = e^{(x+\sin x^2)^2} \cos x^2 2x - e^{(x+\sin^2 x)^2} 2 \sin x \cos x + \int_{\sin^2 x}^{\sin x^2} e^{(x+t)^2} 2(x+t) \, dt =$
$2x \cos x^2 e^{(x+\sin x^2)^2} - 2 \sin x \cos x e^{(x+\sin^2 x)^2} + \left[ e^{(x+t)^2} \right]_{\sin^2 x}^{\sin x^2} =$
$2x \cos x^2 e^{(x+\sin x^2)^2} - 2 \sin x \cos x e^{(x+\sin^2 x)^2} + e^{(x+\sin^2 x)^2} - e^{(x+\sin x^2)^2} =$
$e^{(x+\sin^2 x)^2} (2x \cos x^2 + 1) - e^{(x+\sin x^2)^2} (2 \sin x \cos x + 1)$.

3. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \int_{\operatorname{Arctg} y^2}^{\operatorname{Arctg} x^2} \sqrt{1 + t^4} \, dt \; ;$$

calcolare le derivate parziali di $f$.

**Risoluzione.** Per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{1 + (\operatorname{Arctg} x^2)^4}\,\frac{1}{1+x^4}\,2x = \frac{2x}{1+x^4}\sqrt{1 + (\operatorname{Arctg} x^2)^4}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sqrt{1 + (\operatorname{Arctg} y^2)^4}\,\frac{1}{1+y^4}\,2y = -\frac{2y}{1+y^4}\sqrt{1 + (\operatorname{Arctg} y^2)^4}$.

# Capitolo 21

# Integrale di Lebesgue

## 21.1 Integrali multipli

### 21.1.1 Integrali doppi

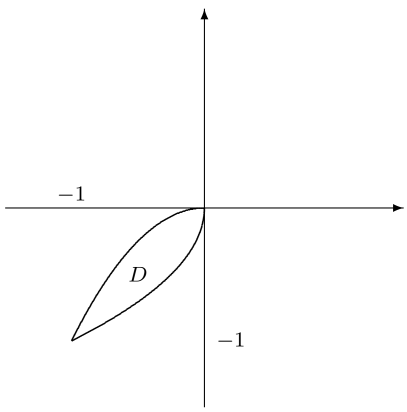
1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \leq -x^2, x \leq -y^2\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [-1,0]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [-\sqrt{-x}, -x^2]$; si ha quindi



$\int\int_D x\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{-x}}^{-x^2} x\,dy\right) dx = \int_{-1}^{0} x(-x^2+\sqrt{-x})\,dx =$
$\int_{-1}^{0}(-x^3+x\sqrt{-x})\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{4} + \int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} =$
$-\frac{3}{20}$.

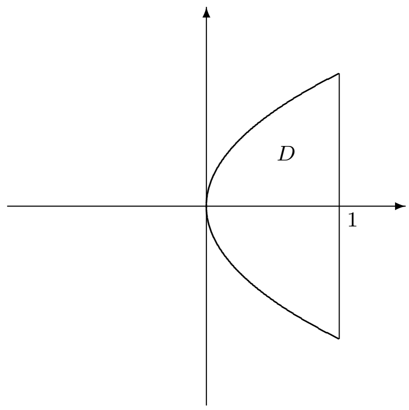
2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y^2\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \le x \le 1\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$; si ha quindi




$\int\int_D y^2\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,dx =$
$\frac{2}{3}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

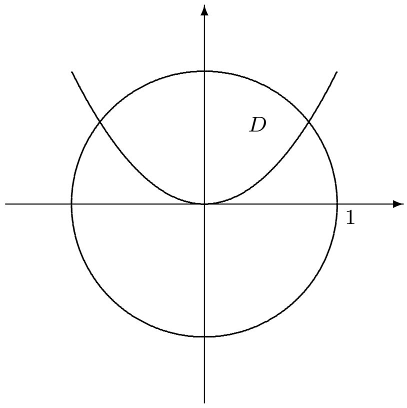
dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 \le 1, y \ge x^2\}\ .$$

**Risoluzione.** I punti intersezione della circonferenza $x^2+y^2=1$ e della parabola $y = x^2$ sono le soluzioni del sistema
$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = x^2 \end{cases}$ .

Per tali punti si ha $x^2 + x^4 = 1$; quindi $x^4 + x^2 - 1 = 0$; quindi $x^2 = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; essendo $x^2 \geq 0$, si ha $x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; si ha quindi $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Quindi si ha $p_1(D) = [-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$.
Per ogni $x \in p_1(D)$ si ha poi $D(x) = [x^2, \sqrt{1-x^2}]$.




(È possibile determinare $p_1(D)$ e $D(x)$ prescindendo dal disegno, basandosi cioè solo sulla definizione di $D$.

Si ha $x \in p_1(D)$ se e solo se esiste $y \in \mathbf{R}$ tale che $y \geq x^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$; si ha quindi $x^2 \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$; un tale $y$ esiste se e solo se $x^4 \leq 1 - x^2$, cioè se e solo se
$x^4 + x^2 - 1 \leq 0$,
cioè se solo se $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x^2 \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
cioè se e solo se
$x^2 \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
cioè se e solo se
$-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
Si ha quindi
$p_1(D) = [-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$.
Per ogni $x \in p_1(D)$ si ha poi $D(x) = [x^2, \sqrt{1-x^2}]$.)

Si ha quindi
$\int\int_D y\,dxdy = \int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right) dx =$
$\int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$
$\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (1 - x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} =$

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 =$
$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{6} - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{20}\right) =$
$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{30-5\sqrt{5}+5-9+3\sqrt{5}}{30} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{26-2\sqrt{5}}{30} =$
$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{13-\sqrt{5}}{15}$.

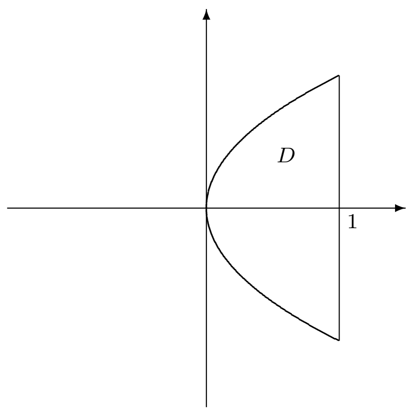
4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \le x \le 1\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha
$p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(y) = [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$.




Si ha quindi
$\int\int_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}\,dx =$
$\int_0^1 2x\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$.

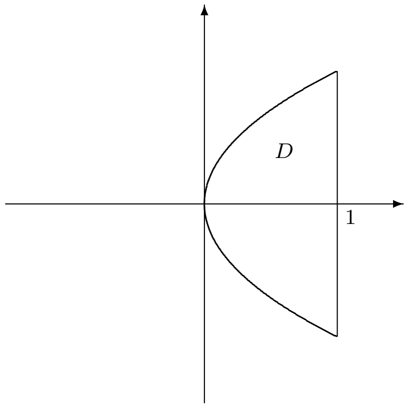
5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1, y^2 \le x\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha
$p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(y) = [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$.




Si ha quindi
$\int\int_D x\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x\,dy\right)\,dx = \int_0^1 x \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\right)\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{x}\,dx =$
$2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$.

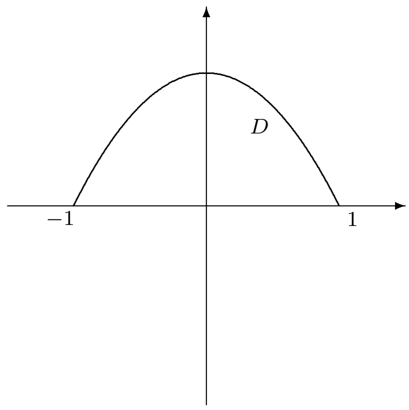
6. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le y \le 1 - x^2\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [-1,1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [0, -x^2+1]$.




Si ha quindi
$\int\int_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{-x^2+1} y\,dy\right)\,dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=-x^2+1}\,dx =$
$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} =$
$\frac{1}{2}2(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1) = \frac{8}{15}$.

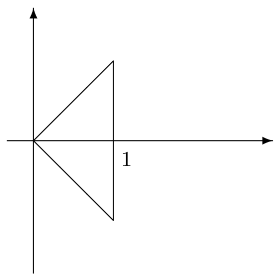
7. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1, |y| \le x\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [-x,x]$.




Si ha quindi
$\int\int_D x^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x^2\,dy\right)\,dx = \int_0^1 x^2\left(\int_{-x}^{x}\,dy\right)\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx =$
$2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

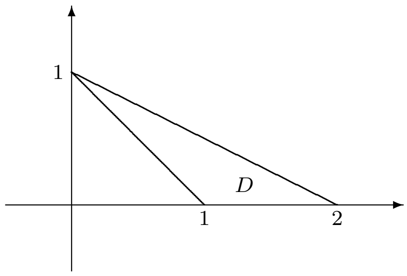
8. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (2x+y)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0,\ x+y \geq 1,\ x+2y \leq 2\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $p_2(D) = [0,1]$ e per ogni $y \in p_2(D)$ si ha $D(y) = [1-y, 2-y]$.




Si ha quindi

$$\int\int_D (2x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{2-2y} (2x+y)\,dx\right)\,dy = \int_0^1 \left[x^2+xy\right]_{1-y}^{2-2y}\,dy =$$

$$\int_0^1 \left((2-2y)^2 + (2-2y)y - (1-y)^2 - (1-y)y\right)\,dy =$$

$$\int_0^1 \left(4 - 8y + 4y^2 + 2y - 2y^2 - 1 + 2y - y^2 - y + y^2\right)\,dy =$$

$$\int_0^1 \left(2y^2 - 5y + 3\right)\,dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{5}{2}y + 3y\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{7}{6}\ .$$

9. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

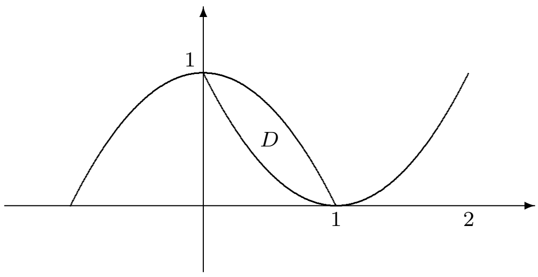
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-1)^2 \leq y \leq 1-x^2\}\ .$$

**Risoluzione.** Le parabole $y = 1-x^2$ e $y = (x-1)^2$ si intersecano nei punti soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \text{, cioè } \begin{cases} 1 - x^2 = (x-1)^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \text{, cioè}$$
$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \text{, cioè } \begin{cases} x = 0 \text{ o } x = 1 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} .$$

Per $x = 0$, si ha $y = 1$; per $x = 1$, si ha $y = 0$.

Le parabole si intersecano quindi nei punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$.




Si ha $p_1(D) = [0, 1]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [(x-1)^2, 1 - x^2]$.

Si ha quindi

$$\int\int_D y\,dxdy = \int_0^1 \left( \int_{(x-1)^2}^{1-x^2} y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{(x-1)^2}^{1-x^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( (1-x^2)^2 - (x-1)^4 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - 2x^2 + x^4 - (x-1)^4 \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[ x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{5} (x-1)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} .$$

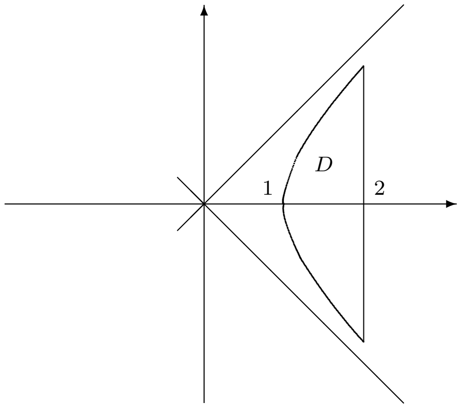
10. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\, x^2 - y^2 \ge 1 \right\} .$$

**Risoluzione.** Si ha




Si ha $p_1(D) = [1, 2]$ e per ogni $x \in p_1(D)$ si ha $D(x) = [-\sqrt{x^2-1}, \sqrt{x^2-1}]$.
Si ha quindi

$$\int\int_D x\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} x\,dy\right) dx = \int_1^2 x2\sqrt{x^2-1}\,dx =$$

$$\int_1^2 (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \left[\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{27} = \frac{2}{3}3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,.$$

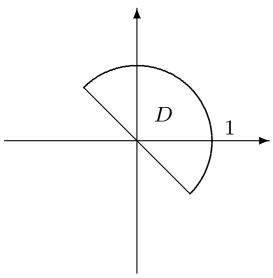
11. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\,,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}\,.$$

**Risoluzione.** Si ha




$\int\int_D x\,dxdy = \int\int_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]} \rho\cos t\rho\,d\rho dt = \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos t\,dt =$
$\frac{1}{3}\left[\sin t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 2\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

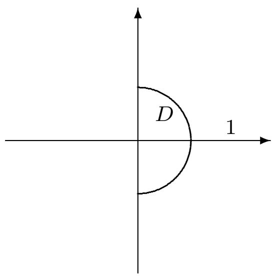
12. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}\ .$$

**Risoluzione.**




Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}\ ,\ (\rho,t) \in [0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ ;$$

si ha quindi
$\int\int_D x^2\,dxdy = \int_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{pi}{2}]} \rho^2\cos^2 t\rho\,d\rho dt =$
$\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\right) =$
$\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{8}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\pi.$

13. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

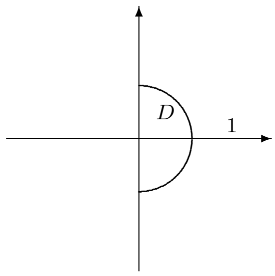
$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}\ ,\ (\rho,t) \in [0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ ;$$




per ogni $(\rho, t) \in [0,3] \times [0,\pi]$ si ha $|\det \varphi'(\rho,t)| = \rho$; si ha quindi $\int\int_D x\, dxdy = \int_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \rho \cos t \rho\, d\rho dt = \left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt\right) = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 [\sin t]_0^1 = \frac{2}{3}$.

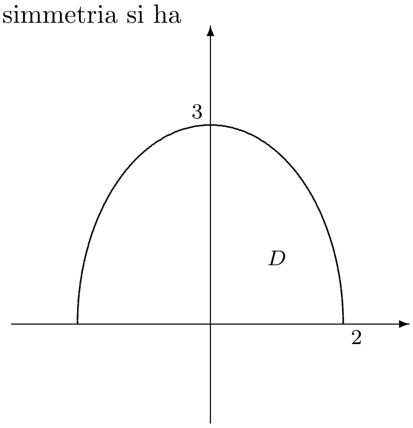
14. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x+y)\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, y \ge 0\} \ .$$

**Risoluzione.** Per simmetria si ha




$\int\int_D (x+y)\, dxdy = \int\int_D x\, dxdy + \int\int_D y\, dxdy = \int\int_D y\, dxdy$.
Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos t \\ y = 3\rho \sin t \end{cases} \ , \ (\rho,t) \in [0,1] \times [0,\pi] \ ;$$

per ogni $(\rho, t) \in [0,1] \times [0,\pi]$ si ha $|\det \varphi'(\rho,t)| = 6\rho$;

si ha quindi
$\int\int_D y\,dxdy = \int_{[0,1]\times[0,\pi]} 3\rho(\sin t)\cdot 6\cdot\rho\,d\rho dt = 18\left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin t\,dt\right) =$
$18\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1[-\cos t]_0^1 = 18\frac{1}{3}2 = 12.$

15. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\le 9\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}\ ,\ (\rho,t)\in[0,3]\times[0,2\pi]\ ;$$

per ogni $(\rho,t)\in[0,3]\times[0,\pi]$ si ha $|\det\varphi'(\rho,t)| = \rho$;
si ha quindi
$\int\int_D x^2\,dxdy = \int_{[0,3]\times[0,2\pi]} \rho^2\cos^2 t\rho\,d\rho dt =$
$\left(\int_0^3 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right) = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{81}{4}\pi.$

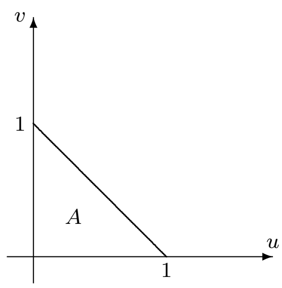
16. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2\,dxdy\ ,$$

dove $D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-2,1)$, $(-1,-1)$.

**Risoluzione.** Sia

$$A = \{(u,v)\in\mathbf{R}^2;\ u\ge 0,\ v\ge 0,\ u+v\le 1\}\ .$$




Sia $T:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2$ la trasformazione lineare tale che $T(1,0) = (-2,1)$ e $T(0,1) = (-1,-1)$.

Si ha $T(A) = D$.

La matrice di $T$ è

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Quindi $T$ è la funzione

$$\begin{cases} x = -2u - v \\ y = u - v \end{cases} , \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2 .$$

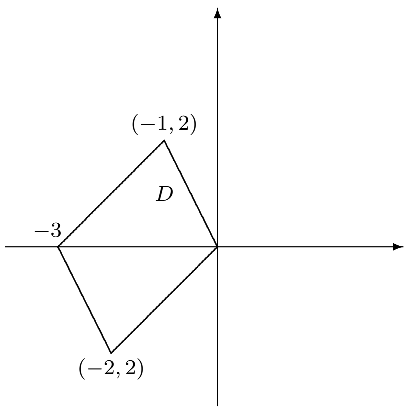
La matrice jacobiana di $T$ è la matrice di $T$; si ha quindi
$\int\int_D x^2 \, dxdy = \int\int_A (-2u-v)^2 | \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} | \, dudv =$
$\int\int_A (4u^2 + 4uv + v^2) 3 \, dudv = 3 \int\int_A (4u^2 + 4uv + v^2) \, dudv.$
Si ha $p_1(A) = [0, 1]$ e $(\forall u \in [0, 1])$ $A(u) = 1 - u$. Si ha quindi
$3 \int\int_A (4u^2 + 4uv + v^2) \, dudv = 3 \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} (4u^2 + 4uv + v^2) \, dv \right) du =$
$3 \int_0^1 \left[ 4u^2 v + 2uv^2 + \frac{1}{3} v^3 \right]_0^{1-u} du =$
$3 \int_0^1 \left( 4u^2(1-u) + 2u(1-u)^2 + \frac{1}{3}(1-u)^3 \right) du =$
$3 \int_0^1 \left( 4u^2 - 4u^3 + 2u - 4u^2 + 2u^3 + \frac{1}{3} - u + u^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) du =$
$3 \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + u + u^2 - \frac{7}{3} u^3 \right) du = 3 \left[ \frac{1}{3} u + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{7}{12} u^4 \right]_0^1 =$
$3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \right) = 3 \frac{7}{12} = \frac{7}{4}.$

17. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x^2 + y) \, dxdy ,$$

dove $D$ è il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(-1, 2)$, $(-3, 0)$, $(-2, -2)$.

**Risoluzione.**




Si ha $(-1, 2) + (-2, 2) = (-3, 0)$.

Sia $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la trasformazione lineare tale che $T(1, 0) = (-1, 2)$ e $T(0, 1) = (-2, -2)$.

Si ha $T([0,1]\times[0,1]) = D$.

La matrice di $T$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Una parametrizzazione di $D$ è quindi

$$\begin{cases} x = -2 - 2v \\ y = 2u - 2v \end{cases} , \quad (u,v) \in [0,1]\times[0,1] .$$

La matrice jacobiana di $T$ è la matrice di $T$; per ogni $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ si ha quindi

$$|\det T'(u,v)| = |\det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}| = 6 .$$

Si ha quindi

$$\int\int_D (x^2 + y)\,dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} \big((-u-2v)^2 + 2u - 2v\big)\,6\,dudv =$$

$$6\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \left(u^2 + 4uv + 4v^2 + 2u - 2v\right)\,dudv =$$

$$6\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(u^2 + 4uv + 4v^2 + 2u - 2v\right)\,dv\right) du =$$

$$6\int_0^1 \left[u^2 v + 2uv^2 + \frac{4}{3}v^3 + 2uv - v^2\right]_0^1 du =$$

$$6\int_0^1 \left(u^2 + 2u + \frac{4}{3} + 2u - 1\right) du = 6\int_0^1 \left(u^2 + 4u + \frac{1}{3}\right) du =$$

$$6\left[\frac{1}{3}u^3 + 2u^2 + \frac{1}{3}u\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3}\right) = 6\cdot\frac{8}{3} = 16 .$$

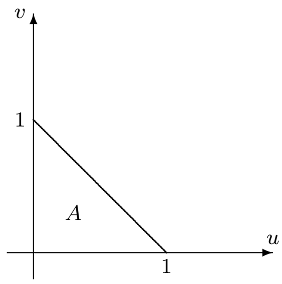
18. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x + 2y)\,dxdy ,$$

dove $D$ è il triangolo di vertici $(1,2)$, $(3,1)$, $(4,-2)$.

**Risoluzione.** Sia

$$T = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \leq 1\} .$$




Una parametrizzazione di $D$ è data dalla funzione $\varphi$

$$(x,y) = u(1,2) + v(3,1) + (1-u-v)(4,-2),\ (u,v) \in T\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = -3u - v + 4 \\ y = 4u + 3v - 2 \end{cases}\ ,\ (u,v) \in T\ .$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$|\det \varphi'(u,v)| = |\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = |-9+4| = |=5| = 5\ .$$

Si ha quindi

$$\int\int_D (x+2y)\, dxdy = \int\int_T (-3u - v + 4 + 2(4u+3v-2)5\, dxdy =$$

$$5\int\int_T (5u+5v)\, dxdy = 25\int\int_T (u+v)\, dxdy\ .$$

Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e $(\forall u \in [0,1])\ T(u) = 1-u$. Si ha quindi

$$25\int\int_T (u+v)\, dxdy = 25\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (u+v)\, dv\right)\, du =$$

$$25\int_0^1 \left[uv + \frac{1}{2}v^2\right]_0^{1-u}\, du = 25\int_0^1 \left(u(1-u) + \frac{1}{2}(1-u)^2\right)\, du =$$

$$25\int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{1}{2} - u + \frac{1}{2}u^2\right)\, du = 25\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u^2\right)\, du =$$

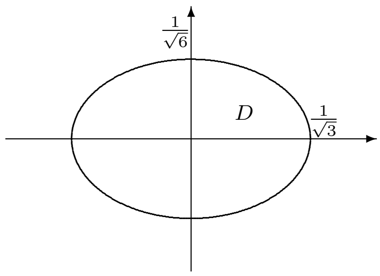
$$\frac{25}{2}\left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{25}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{2}\frac{2}{3} = \frac{25}{3}\ .$$

19. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D \sqrt{1 + (x+2y)^2 + 2(x-y)^2}\, dxdy\ ,$$

dove
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + 2y^2 \leq \frac{1}{3}\right\} .$$

**Risoluzione.** Sia $(x,y) \in \mathbf{R}^2$; si ha $x^2 + 2y^2 \leq \frac{1}{3}$ se e solo se
$3x^2 + 6y^2 \leq 1$, se e solo se
$\frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\sqrt{6}}}$.
$D$ è quindi il dominio limitato dall'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{6}}$.




Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}\rho\sin t \end{cases} ,\ (\rho, t) \in [0,1] \times [0, 2\pi] .$$

Per ogni $(\rho, t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ si ha $|\det \varphi'(\rho,t)| = \frac{1}{\sqrt{18}}\rho = \frac{1}{3\sqrt{2}}\rho$.
Posto $R = [0,1] \times [0,2\pi]$, si ha quindi
$$\int\int_D \sqrt{1 + (x+2y)^2 + 2(x-y)^2}\, dxdy =$$
$$\int\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos t + \frac{2}{\sqrt{6}}\rho\sin t\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\rho\sin t\right)^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\rho\, d\rho dt =$$
$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\int\int_R$$
$$\sqrt{1 + \tfrac{1}{3}\rho^2\cos^2 t + \tfrac{4}{\sqrt{18}}\rho^2\cos t\sin t + \tfrac{2}{3}\rho^2\sin^2 t + \tfrac{2}{3}\rho^2\cos^2 t - \tfrac{4}{\sqrt{18}}\rho^2\cos t\sin t + \tfrac{1}{3}\rho^2\sin^2 t}\cdot$$
$$\rho\, d\rho dt =$$
$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\int\int_R \sqrt{1 + \rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t}\cdot\rho\, d\rho dt = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int\int_R \sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\, d\rho dt =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} dt\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}(2\rho)\,d\rho dt =$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\left[\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{(4-\sqrt{2})\pi}{9}\ .$$

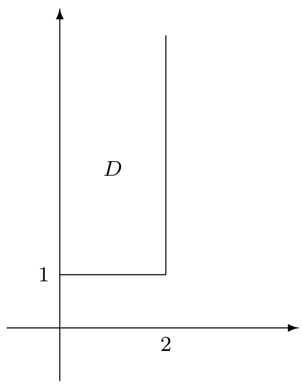
### 21.1.2 Convergenza di integrali doppi

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di funzioni misurabili positive:

$$\int\int_D \frac{1}{y^2}\,dxdy\ ,$$

dove $D = [0,2]\times[1,+\infty[$; dire se l'integrale è convergente o divergente positivamente.

**Risoluzione.** Si ha $p_2(D) = [1,+\infty[$ e $(\forall y \in [1,+\infty[\ D(x) = [0,2]$.




Si ha
$\int\int_D \frac{1}{y^2}\,dxdy = \int_1^{+\infty}\left(\int_0^2 \frac{1}{y^2}\,dx\right)dy = \int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\left(\int_0^2 dx\right)dy = \int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2}\,dy =$
$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{2}{y^2}\,dy = 2\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{y}\right]_1^t = 2\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 2.$

Quindi l'integrale improprio è convergente e ha valore 2.

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di funzioni misurabili positive:

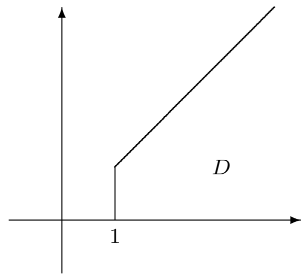
$$\int\int_D \frac{1}{x^2}\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x\}\ ;$$

dire se l'integrale è convergente o divergente positivamente.

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [1, +\infty[$ e $(\forall x \in [1, +\infty[\ D(x) = [0, x]$.




Si ha
$\int\int_D \frac{1}{x^2}\, dxdy = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{x^2}\, dy\right)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x\ dy\right)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} x\, dx =$
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} [\log x]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \log t = +\infty.$

Quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

### 21.1.3 Integrali tripli

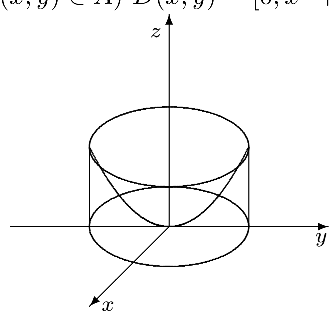
1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\, dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1\,, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}\ .$$

**Risoluzione.** Sia
$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;
si ha $p_{1,2}(D) = A$ e $(\forall (x, y) \in A)\ D(x, y) = [0, x^2 + y^2]$.



Si ha quindi
$\int\int\int_D z^2\,dxdydz = \int\int_A \left(\int_0^{x^2+y^2} z^2 dz\right)\,dxdy = \int\int_A \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{x^2+y^2}\,dxdy =$
$\frac{1}{3}\int\int_A (x^2+y^2)^3\,dxdy.$
Una parametrizzazione in misura di $A$ è data dalla funzione $\alpha$
$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}$, $(\rho,t)\in[0,1]\times[0,2\pi]$;
per ogni $(\rho,t)\in \mathrm{dom}\alpha$ si ha $|\det(\alpha'(\rho,t)| = \rho$.
Si ha quindi
$\frac{1}{3}\int\int_A (x^2+y^2)^3\,dxdy = \frac{1}{3}\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]}(\rho^2)^3\rho\,d\rho dt =$
$\frac{1}{3}\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]}\rho^7\,d\rho dt = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \rho^7\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} dt\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{1}{8}\rho^8\right]_0^1 \frac{2}{3}\pi\frac{1}{8} = \frac{1}{12}\pi.$

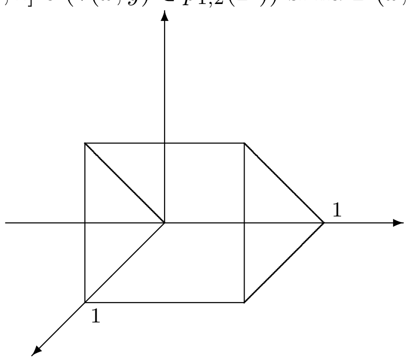
2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D x\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\,, 0\le z\le x\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha
$p_{1,2}(D) = [0,1]\times[0,1]$ e $(\forall (x,y)\in p_{1,2}(D))$ si ha $D(x,y) = [0,x]$.



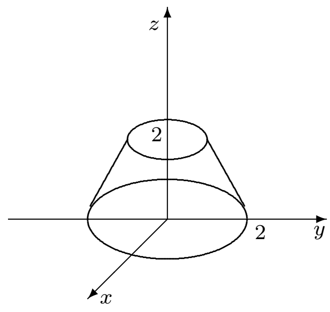

Si ha quindi
$\int\int\int_D x\,dxdydz = \int\int_{[0,1]\times[0,1]}\left(\int_0^x xdz\right)\,dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} x^2\,dxdy =$
$\int_0^1\left(\int_0^1 x^2\,dy\right)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

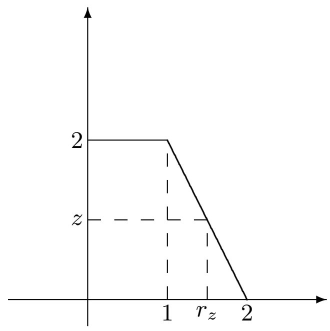
$$\int\int\int_D (x+y+z^2)\,dxdydz\ ,$$

dove $D$ è il tronco di cono di basi i cerchi $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ z=0, x^2+y^2\le 4\}$ e $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ z=2, x^2+y^2\le 1\}$.

**Risoluzione.** Per simmetria si ha
$\int\int\int_D (x+y+z^2)\,dxdydz = \int\int\int_D z^2\,dxdydz.$




Si ha $p_3(D) = [0,2]$; per $z \in [0,2]$, $D(z)$ è un cerchio di centro $(0,0)$. Se $r_z$ è il raggio di $D(z)$, si ha
$(2-z) : (r_z - 1) = 2 : 1$;
quindi si ha
$r_z - 1 = \frac{2-z}{2}$;
quindi
$r_z = 2 - \frac{z}{2}$.




Si ha quindi
$\int\int\int z^3 \, dxdydz = \int_0^2 \left( \int\int_{D(z)} z^2 \, dxdy \right) dz = \int_0^2 z^2 \text{mis}(D(z)) \, dz =$
$\int_0^2 z^2 \pi \left(2 - \frac{z}{2}\right)^2 dz = \pi \int_0^2 z^2 \left(4 - 2z + \frac{z^2}{4}\right) dz = \pi \int_0^2 \left(4z^2 - 2z^3 + \frac{1}{4} z^4\right) dz =$
$\pi \left[\frac{4}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{20} z^5\right]_0^2 = \pi \left(\frac{4}{3} 8 - \frac{1}{2} 16 + \frac{1}{20} 32\right) = \pi \left(\frac{32}{3} - 8 + \frac{8}{5}\right) =$
$\pi \frac{160 - 120 + 24}{15} = \frac{64}{15}\pi$.

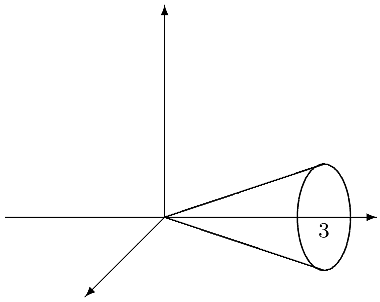
4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x+y+z) \, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^2; \ x^2 + z^2 \leq \frac{1}{9} y^2, \ 0 \leq y \leq 3\} \ ,$$

**Risoluzione.** Per simmetria si ha
$\int\int\int_D (x+y+z) \, dxdydz = \int\int\int_D x \, dxdydz + \int\int\int_D y \, dxdydz + \int\int\int_D z \, dxdydz.$




Per la simmetria rispetto al piano $yz$ si ha $\int\int\int_D x\,dxdydz = 0$.
Per la simmetria rispetto al piano $xy$ si ha $\int\int\int_D z\,dxdydz = 0$.
Si ha quindi
$\int\int\int_D (x+y+z)\,dxdydz = \int\int\int_D z\,dxdydz$.
Si ha $p_2(D) = [0,3]$ e per ogni $y \in [0,3]$ $D(y)$ è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{3}y$.
Si ha quindi
$\int\int\int_D z\,dxdydz = \int_0^3 \left(\int_{D(y)} y\,dxdz\right)\,dy = \int_0^3 y \left(\int_{D(y)}\,dxdz\right)\,dy =$
$\int_0^3 y\mathrm{mis}(D(y))\,dy = \int_0^3 y\pi\frac{y^2}{9}\,dy = \frac{\pi}{9}\int_0^3 y^3\,dy = \frac{\pi}{9}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{4}\pi$.

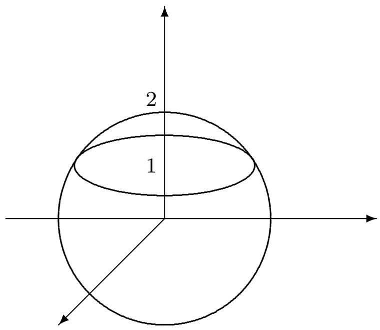
5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 1\}\ .$$

**Risoluzione.**




Si ha $p_3(D) = [1,2]$ e per ogni $z \in [1,2]$ si ha

$$D(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4 - z^2\}\ .$$

$D(z)$ è quindi il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{4-z^2}$; si ha quindi $\text{mis}(D(z)) = \pi(4-z^2)$.

Si ha quindi
$\int\int\int_D z\,dxdydz = \int_1^2 \left(\int_{D(z)} z\,dxdy\right) dz = \int_1^2 z \left(\int_{D(z)} dxdy\right) dz =$
$\int_1^2 z\text{mis}(D(z))\,dz = \int_1^2 z\pi(4-z^2)\,dz = \pi \int_1^2 (4z-z^3)\,dz = \pi \left[2z^2 - \frac{z^4}{4}\right]_1^2 =$
$\pi(8-4-2+\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}\pi$.

6. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz\ ,$$

dove $D$ è l'intersezione del toro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse $z$ il cerchio di centro $(3,0,0)$ e raggio 1 con $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0\}$.

**Risoluzione.** Sia $A$ il cerchio di $\mathbf{R}^2$ di centro $(3,0)$ e raggio 1 e sia

$$B = \{(x',\theta,z') \in \mathbf{R}^3; (x',z') \in A, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}\ .$$

Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\varphi$:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta \\ y = x'\sin\theta \\ z = z' \end{cases} ,\ (x',\theta,z') \in B\ ;$$

per ogni $(x',\theta,z') \in B$ si ha $|\det\varphi'(x,\theta,z')| = |x'| = x'$; quindi si ha
$\int\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz = \int\int\int_B \frac{1}{x'}x'\,dx'd\theta dz' = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int\int_A dx'dz'\right) =$
$\frac{\pi}{2}\text{mis}(A) = \frac{pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}$.

7. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x+y+z)\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}\ .$$

**Risoluzione.** Tenendo conto della simmetria di $D$ si ha
$\int\int\int_D (x+y+z)\,dxdydz = \int\int\int_D z\,dxdydz$.

Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\alpha$:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = 3\rho\cos\varphi \end{cases} ,\ (\rho,\theta,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]\ ;$$

per ogni $(\rho,\theta,\varphi) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho,\theta,\varphi)| = 6\rho^2 \sin\varphi$; quindi si ha $\int\int\int_D z\,dxdydz = \int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 3\rho\cos\varphi 6\rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi =$
$18\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) = 18\frac{1}{4}2\pi\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\pi.$

8. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D x^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\alpha$:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = 3\rho\cos\varphi \end{cases},\ (\rho,\theta,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\ ;$$

per ogni $(\rho,\theta,\varphi) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho,\theta,\varphi)| = 6\rho^2 \sin\varphi$; quindi si ha $\int\int\int_D x^2\,dxdydz = \int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta 6\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi =$
$6\left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi\right) =$
$\frac{6}{5}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\right)\left(\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right) =$
$\frac{6}{5}\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi (\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi)\,d\varphi\right) =$
$\frac{3}{5}2\pi\left[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^\pi = \frac{6}{5}\pi(2-\frac{2}{3}) = \frac{6}{5}\pi\frac{4}{3}) = \frac{8}{5}\pi.$

9. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 4\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione in misura di $D$ è data dalla funzione $\alpha$:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},\ (\rho,\theta,\varphi) \in [0,2]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\ ;$$

per ogni $(\rho,\theta,\varphi) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \sin\varphi$; quindi si ha $\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int\int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \rho^2\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi =$
$\left(\int_0^2 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\right) = \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^2 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = \frac{32}{5}2\pi 2 = \frac{128}{5}\pi.$

10. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x-y)\,dxdydz\ ,$$

dove $D$ è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,2,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,0,2)$.

**Risoluzione.** Sia $T:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$, $T(0,0,1) = (-1,0,2)$.

Posto

$$E = \{t,u,v) \in \mathbf{R}^3;\ t \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ t+u+v \leq 1\}$$

si ha $T(E) = D$.

La trasformazione lineare $T$ ha matrice

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Quindi $T$ si scrive

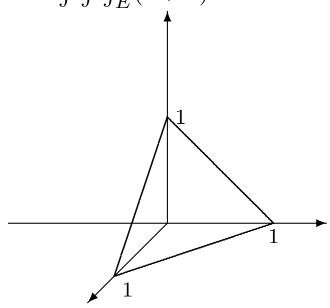
$$\begin{cases} x = t+u-v \\ y = 2t+u \\ z = t+u+2v \end{cases} \quad , \quad (t,u,v) \in \mathbf{R}^3\ .$$

Si ha

$\det(a) = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 + 3 = -3.$

Si ha

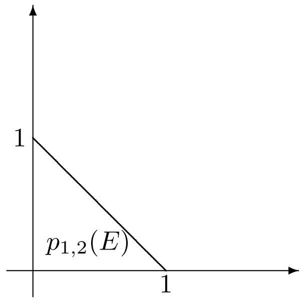
$\int\int\int_D (x-y)\,dxdydz = \int\int\int_E (t+u-v-2t-u)|\det(a)|\,dtdudv =$
$\int\int\int_E (-t-v)3\,dtdudv - 3\int\int\int_E (t+v)\,dtdudv.$




Si ha

$$p_{1,2}(E) = \{(t,u);\ t \geq 0,\ u \geq 0, t+u \leq 1\}$$

e per ogni $(t,u) \in p_{1,2}(E)$ si ha $E(t,u) = [0, 1-t-u]$.




Si ha
$-3\int\int\int_E (t+v)\,dtdudv = -3\int\int_{p_{1,2}(E)}\left(\int_0^{1-t-u}(t+v)\,dv\right)dtdu =$
$-3\int\int_{p_{1,2}(E)}\left[tv+\frac{1}{2}v^2\right]_0^{1-t-u} dtdu =$
$-3\int\int_{p_{1,2}(E)}\left(t(1-t-u)+\frac{1}{2}(1-t-u)^2\right) dtdu =$
$-3\int\int_{p_{1,2}(E)}\left(t-t^2-tu)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}u^2-t-u+tu\right) dtdu =$
$-3\int\int_{p_{1,2}(E)}\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2}\right) dtdu =$
$-3\int_0^1\left(\int_0^{1-t}\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2}\right) du\right) dt =$
$-3\int_0^1\left[-\frac{1}{2}t^2u+\frac{1}{6}u^3-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u\right]_0^{1-t} dt =$
$-3\int_0^1\left(-\frac{1}{2}t^2(1-t)+\frac{1}{6}(1-t)^3-\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}(1-t)\right) dt =$
$-3\int_0^1\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right) dt =$
$-3\int_0^1\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}\right) dt = -3\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{6}t\right]_0^1 = -3\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4}.$

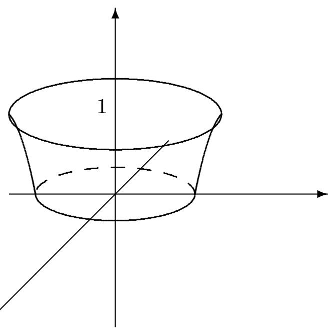
11. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2\le 1+z^2,\ 0\le z\le 1\}\ .$$

**Risoluzione.**

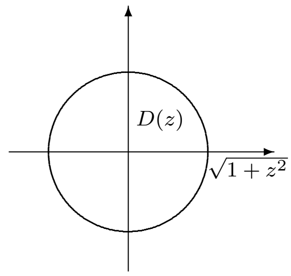



Si ha $p_3(D)=[0,1]$.

Per ogni $z \in p_3(D)$ si ha

$$D(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le z^2 + 1\}\ .$$

Quindi $D(z)$ è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{z^2+1}$.




Si ha quindi

$$\int\int\int_D z^2\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{D(z)} z^2\, dxdy\right) dz = \int_0^1 z^2 \left(\int_{D(z)} dxdy\right) dz =$$

$$\int_0^1 z^2 \mathrm{mis}(D(z))\, dz = \int_0^1 z^2 \pi (1 + z^2)\, dz = \pi \int_0^1 (z^2 + z^4)\, dz =$$

$$\pi \left[\frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5\right]_0^1 = \pi \left(13 + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi\ .$$

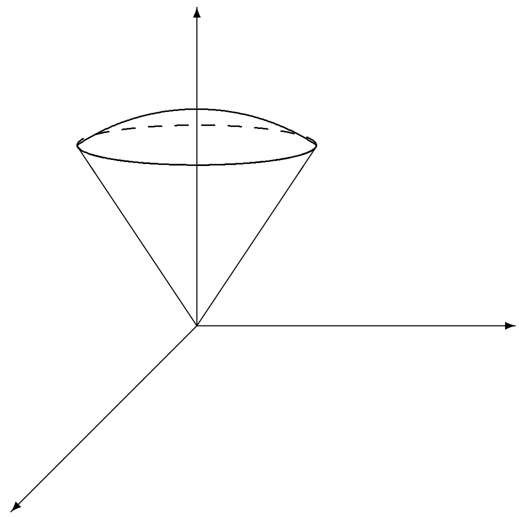
12. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z\, dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}\ .$$

**Risoluzione.**



L'insieme $D$ è il settore sferico di asse il semiasse positivo delle $z$ e ampiezza $\frac{\pi}{4}$ della palla di cento $(0,0,0)$ e raggio 2.

Una parametrizzazione in misura di $D$ è quindi la funzione $\alpha$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} , \quad (\rho, \varphi, \theta) \in [0,2] \times [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi] \ .$$

Per ogni $(\rho, \varphi, \theta) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin\varphi$.

Si ha quindi

$$\int\int\int_D z \, dxdydz = \int\int\int_{[0,2]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]} \rho \cos\varphi \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$\left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) =$$

$$\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi = 2\pi \cdot 4 \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi \ .$$

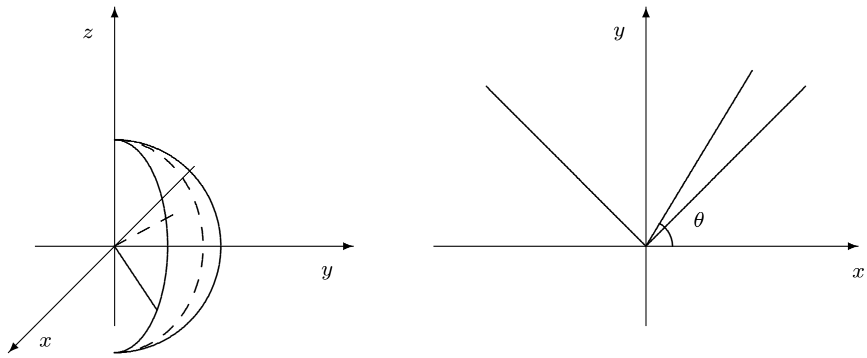
13. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D y \, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 + x^2 \leq 4, -y \leq x \leq y\} \ .$$

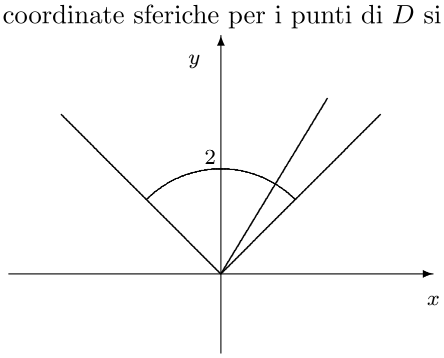
**Risoluzione.**




Tenendo conto che la proiezione di $D$ sul piano $xy$ è

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$$

e che quindi nelle coordinate sferiche per i punti di $D$ si ha $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3}{4}\pi$,




una parametrizzazione in misura di $D$ è la funzione $\alpha$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad , \quad (\rho,\varphi,\theta)\in[0,2]\times[0,\pi]\times[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\ .$$

Per ogni $(\rho,\varphi,\theta)\in\mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det\alpha'(\rho,\varphi,\theta)|=\rho^2\sin\varphi$.
Si ha quindi

$$\int\int\int_D y\,dxdydz=\int\int\int_{[0,2]\times[0,\pi]\times[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]}\rho\sin\varphi\sin\theta\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\theta=$$

$$\left(\int_0^2 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta\right) =$$

$$\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 \left(\int_0^\pi \frac{1-\sin(2\varphi)}{2}\, d\varphi\right)[-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$4\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^\pi \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi\ .$$

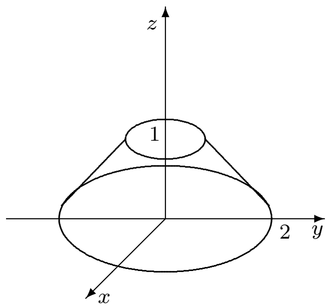
14. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x-y+3z)\, dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \leq (2-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}\ .$$

**Risoluzione.**




Si ha

$$\int\int\int_D (x-y+3z)\, dxdydz = \int\int\int_D x\, dxdydz - \int\int\int_D y\, dxdydz +$$

$$3\int\int\int_D z\, dxdydz\ .$$

Per la simmetria rispetto al piano yz, si ha $\int\int\int_D x\, dxdydz = 0$.
Per la simmetria rispetto al piano xz, si ha $\int\int\int_D y\, dxdydz = 0$.
Si ha quindi

$$\int\int\int_D (x-y+3z)\, dxdydz = 3\int\int\int_D z\, dxdydz\ .$$

Si ha $p_3(D) = [0,1]$ e per ogni $z \in [0,1]$ si ha $D(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq (2-z)^2\}$.

Si ha quindi

$$3\int\int\int_D z\,dxdydz = 3\int_0^1 \left(\int\int_{D(z)} z\,dxdy\right) dz =$$

$$3\int_0^1 \left(z\int\int_{D(z)} dxdy\right) dz = 3\int_0^1 z\text{mis}(D(z))\,dz = 3\int_0^1 z\pi(2-z)^2\,dz =$$

$$3\pi\int_0^1 z(4-4z+z^2)\,dz = 3\pi\int_0^1 (4z-4z^2+z^3)\,dz =$$

$$3\pi\left[2z^2-\frac{4}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4\right]_0^1 = 3\pi\left(2-\frac{4}{3}3+\frac{1}{4}\right) = 3\pi\frac{24-16+3}{12} = 3\pi\frac{11}{12} = \frac{11}{4}\pi\ .$$

## 21.2 Misure di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$

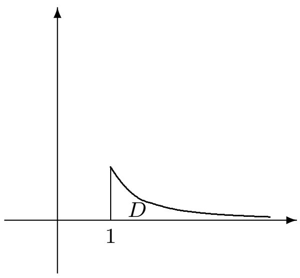
### 21.2.1 Misure di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Calcolare l'area del seguente insieme:

$$D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x\geq 1,\ 0\leq y\leq \frac{1}{x^2}\};$$

dire se l'insieme $D$ è integrabile.

**Risoluzione.** Si ha $p_1(D) = [1,+\infty[$ e $(\forall x\in[1,+\infty[)\ D(x) = [0,\frac{1}{x^2}]$.




Si ha quindi

$\text{mis}(D) = \int\int_D dxdy = \int_1^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{x^2}} dy\right) dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx =$

$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)_0^t = 1.$

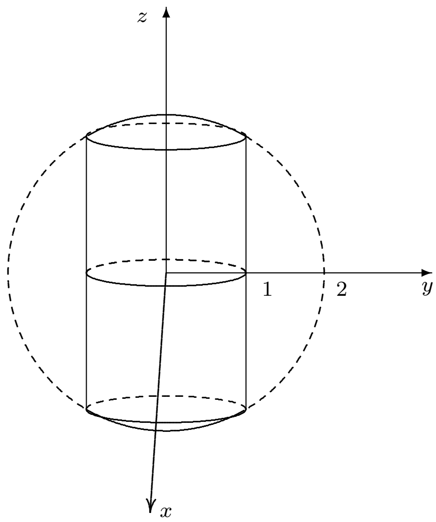
L'insieme è quindi integrabile.

### 21.2.2 Misure di sottoinsiemi di $\mathrm{R}^3$

1. **Esercizio.** Determinare la misura dell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 1\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha




$p_{\{1,2\}}(D) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 \le 1\}$ e per ogni $(x,y) \in p_{\{1,2\}}(D)$ si ha $D(x,y) = [-\sqrt{4-x^2-y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}]$; si ha quindi
$\text{mis}(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int\int_{p_{\{1,2\}}(D)} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dxdy =$
$2\int\int_{p_{\{1,2\}}(D)} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy.$
Una parametrizzazione in misura di $p_{\{1,2\}}(D)$ è

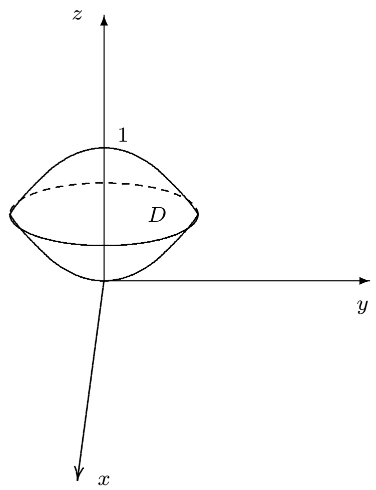
$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases} ,\ (\rho,t) \in [0,1]\times[0,2\pi]\ ;$$

quindi si ha
$2\int\int_{p_{\{1,2\}}(D)} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy = 2\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4-\rho^2}\rho\, d\rho dt =$
$4\pi\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = -2\pi\int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}(-2\rho)\, d\rho = -2\pi\left[(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\right]_0^1 =$
$\frac{32}{3}\pi - 4\pi\sqrt{3}.$

2. **Esercizio.** Determinare la misura del seguente insieme:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \le z \le 1-x^2-y^2\}\ .$$

**Risoluzione.** Si ha $(x,y) \in p_{\{1,2\}}(D)$ se e solo se esiste $z \in \mathbf{R}$ tale che $x^2+y^2 \le z \le 1-x^2-y^2$;




quindi se e solo se
$x^2 + y^2 \leq 1 - x^2 - y^2$
cioè se e solo se
$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$;
quindi $p_{\{1,2\}}(D)$ è un cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Per ogni $(x,y) \in p_{\{}1,2\}(D)$ si ha poi $D(x,y) = [x^2 + y^2, 1 - x^2 + y^2]$.
Si ha quindi
$\text{mis}(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int\int_{p_{\{1,2\}}} \left(\int_{x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dz\right) dxdy =$
$\int\int_{p_{\{1,2\}}} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy = \int_{[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\times[0,2\pi]} (1 - 2\rho^2)\rho\, d\rho d\theta =$
$2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\rho - 2\rho^3)\, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - 2\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

3. **Esercizio.** Determinare la misura del seguente insieme:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}\ .$$

**Risoluzione.** L'intersezione del paraboloide

$$z = 2x^2 + 2y^2$$

con il paraboloide

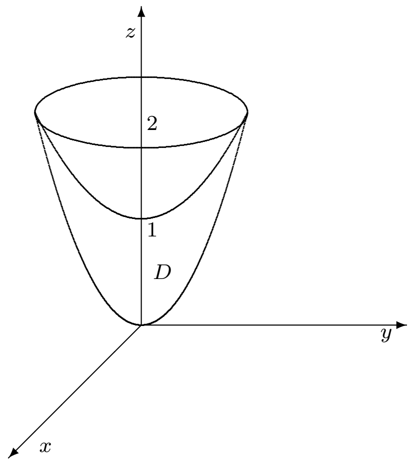
$$z = 1 + x^2 + y^2$$

è data dagli $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{cioè tali che} \begin{cases} z = 2x^2 + 2y^2 \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{cases}$$

cioè tali che

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2 \end{cases} .$$




Si ha quindi

$$p_{1,2}(D)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$$

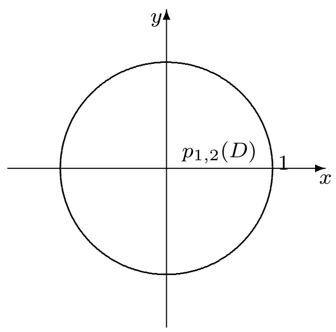
e per ogni $(x,y)\in p_{1,2}(D)$ si ha

$$D(x,y)=[2x^2+2y^2, 1-x^2-y^2] .$$

Si ha quindi

$$\mathrm{mis}(D)=\int\int\int_D dxdydz=\int\int_{p_{1,2}(D)}\left(\int_{2x^2+2y^2}^{1-x^2-y^2} dz\right) dxdy =$$

$$\int\int_{p_{1,2}(D)}(1-x^2-y^2)\,dxdy .$$




Una parametrizzazione in misura di $p_{1,2}(D)$ è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x=\rho\cos t \\ \rho\sin t \end{cases} \quad (\rho,t)\in[0,1]\times[0,2\pi] .$$

Per ogni $(\rho, t) \in \mathrm{dom}(\varphi)$ si ha $|det\varphi'(\rho, t)| = \rho$.

Si ha quindi

$$\int\int_{p_{1,2}(D)} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1 - \rho^2)\rho\, d\rho dt =$$

$$\left(\int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} dt\right) = 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

4. **Esercizio.** Calcolare il volume del tetraedro $D$ di vertici $(3, 2, -1)$, $(1, -1, 2)$, $(3, -2, 1)$, $(1, 3, 2)$. Si chiede di non usare formule che diano direttamente il volume di un tetraedro, ma di calcolare il corrispondente integrale triplo.

   **Risoluzione.** Sia

$$T = \{(t, u, v) \in \mathbf{R}^3;\ t \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ t + u + v \leq 1\}\ .$$

I punti $(x, y, z) \in D$ sono dati da

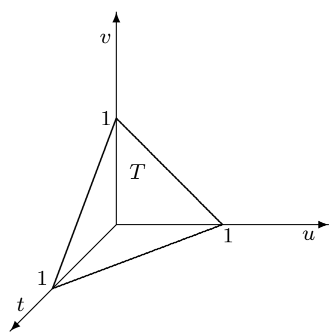
$$(x, y, z) = t(3, 2, -1) + u(1, -1, 2) + v(3, -2, 1) + (1 - t - u - v)(1, 3, 0) =$$

$$(2t + 2v + 1, -t - 4u - 5v + 3, -3t - v + 2)$$

al variare di $(t, u, v) \in T$.

Una parametrizzazione di $D$ è quindi la funzione

$$\begin{cases} x = (2t + 2v + 1 \\ y = -t - 4u - 5v + 3 \\ z = -3t - v + 2 \end{cases} ,\quad (t, u, v) \in T\ .$$




Per ogni $(t, u, v) \in T$ si ha

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, u, v) = (2, -1, -3)$,

$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(t, u, v) = (0, -4, 0)$,

$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(t, u, v) = (2, -5, -1)$.

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & -5 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

si ha

$$|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & -5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}| = |-4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}| = |-4(-2+6)| = 6 .$$

Si ha quindi

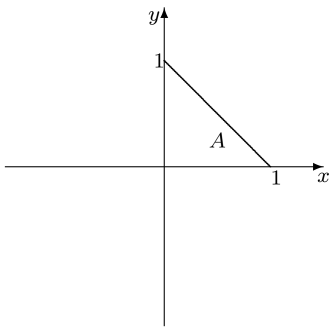
$$\mathrm{mis}(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int\int\int_T 16 dtdudv = 16\int\int\int_T dtdudv .$$

Sia

$$A = \{(t,u) \in \mathbf{R}^2;\ t\mathrm{gr}0,\ u \geq 0,\ t+u \leq 1\} .$$

Si ha $p_{1,2}(T) = A$ e e per ogni $(t,u) \in A$ si ha $T(t,u) = [0, 1-t-u]$.
Si ha quindi

$$16\int\int\int_T dtdudv = 16\int\int_A \left(\int_0^{1-t-u} dv\right) dtdu = 16\int\int_A (1-t-u)\, dtdu .$$




Si ha $p_1(A) = [0,1]$ e e per ogni $t \in p_1(A)$ si ha $A(t) = [0, 1-t]$.
Si ha quindi

$$16\int\int_A (1-t-u)\, dtdu = 16\int_0^1 \left(\int_0^{1-t} (1-t-u)\, du\right) dt =$$

$$16\int_0^1 \left[u - tu - \frac{1}{2}u^2\right]_0^{1-t} dt = 16\int_0^1 \left(1 - t - t(1-t) - \frac{1}{2}(1-t)^2\right) dt =$$

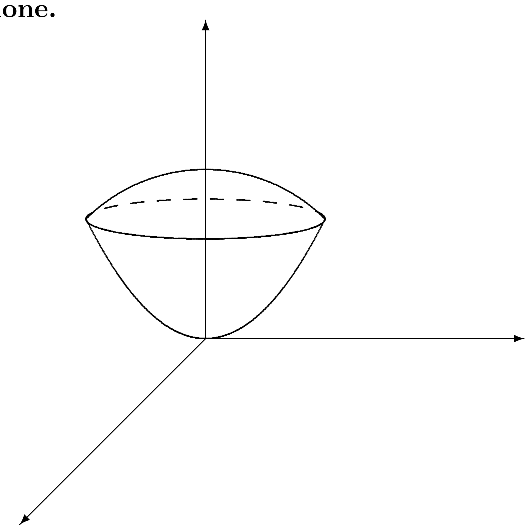
$$16\int_0^1 \left(1 - t - t + t^2 - \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2\right) dt = 16\int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$16\left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right]_0^1 = 16\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} .$$

5. **Esercizio.** Calcolare il volume del seguente insiemeo:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq x^2 + y^2\}\ .$$

**Risoluzione.**



L'intersezione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con il paraboloide $z = x^2 + y^2$ è data dagli $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ soddisfaxienti

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} z + +z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} z = -2 \text{ o } z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Per $z = -2$, si ha $x^2 + y^2 = -2 < 0$; non si ottiene quindi alcuna soluzione.

Per $z = 1$ si ottiene la circonferenza

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}\ .$$

Da ciò segue
$p_{1,2}(D) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

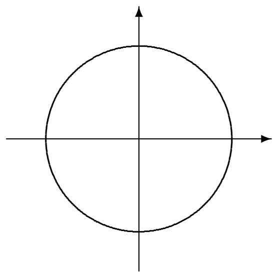
Dunque $p_{1,2,}(D)$ è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

Per ogni $(x, y) \in p_{1,2}(D)$ si ha $D(x, y) = [x^2 + y^2, \sqrt{2 - x^2 - y^2}]$.

Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int\int_{p_{1,2}(D)} \left( \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dxdy =$$

$$\int\int_{p_{1,2}(D)} (\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2))\,dxdy\ .$$



Una parametrizzazione in misura di $p_{1,2}(D)$ è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x=\rho\cos t \\ y=\rho\sin t \end{cases}, \quad (\rho,t)\in[0,1]\times[0,2\pi]\ .$$

Per ogni $(\rho,t)\in\mathrm{dom}(\varphi)$ si ha $|\det\varphi'(\rho,t)=\rho$.

Si ha quindi

$$\int\int_{p_{1,2}(D)} (\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2))\,dxdy=$$

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho\,d\rho dt=\left(\int_0^1(\rho\sqrt{2-\rho^2}-\rho^3)\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}dt\right)=$$

$$2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^1(2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}(-2\rho)\,d\rho-\int_0^1\rho^3\,d\rho\right)=$$

$$2\pi\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\right)=$$

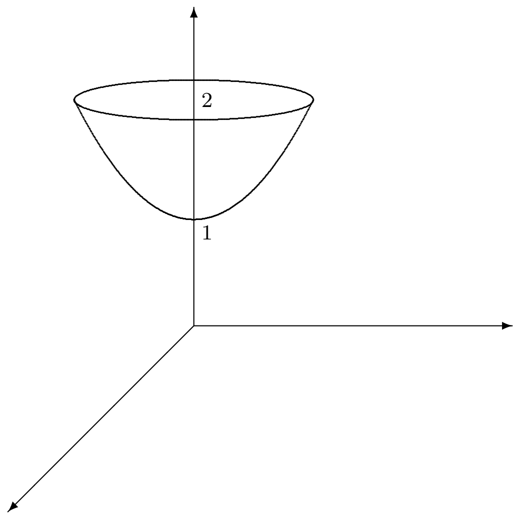
$$2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(1-2^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{4}\right)=2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{7}{12}\right)=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi\ .$$

6. **Esercizio.** Calcolare il volume del seguente insiemeo:

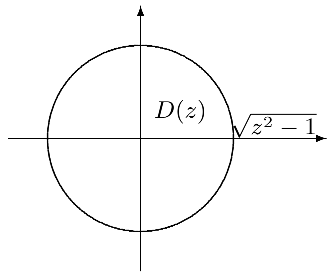
$$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2\le z^2-1,\ 1\le z\le 2\}\ .$$

**Risoluzione.**




Si ha $p_3(D) = [1, 2]$ e per ogni $z \in [1, 2]$ si ha

$$D(z) = \{(x.y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq z^2 - 1\} \ .$$




Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int_1^2 \left(\int_{D(z)} dxdy\right) dz = \int_1^2 \text{mis}(D(z))dz =$$

$$\int_1^2 \pi(z^2 - 1)\, dz = \pi \left[\frac{1}{3}z^3 - z\right]_1^2 = \pi\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}\pi \ .$$

# Capitolo 22

# Integrale di funzioni su varietà

## 22.1 Integrali di funzioni su varietà

### 22.1.1 Integrali curvilinei di funzioni in $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma x\, ds\ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, x^2+y^2=4\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione di $\gamma$ è

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ ;$$

quindi si ha
$\int_\gamma x\, ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos t) 2\, dt = 4\,[\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8.$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma (x+y)\, ds\ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2+(y-1)^2=4\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 1+2\cos t \\ y = 1+2\sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]\ ;$$

per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\varphi'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = 2$; quindi si ha
$\int_\gamma (x + y)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t + 1 + 2\sin t) 2\, dt = 2 \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos t + 2\sin t)\, dt = 4\, [t - \cos t + \sin t]_0^{2\pi} = 8\pi$.

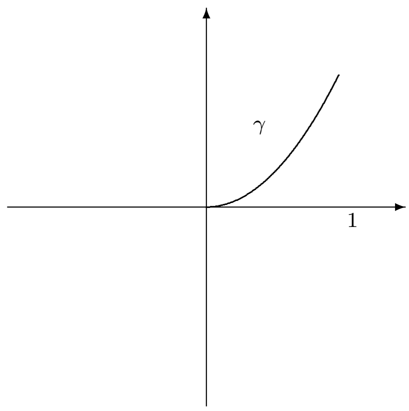
3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma x\, ds\ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1, y = x^2\}\ .$$

**Risoluzione.** La curva $\gamma$ è la ipersuperficie cartesiana definita da
$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longrightarrow x^2$;




per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $f'(x) = 2x$; quindi si ha
$\int_\gamma x\, ds = \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} 8x\, dx = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3}(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$.

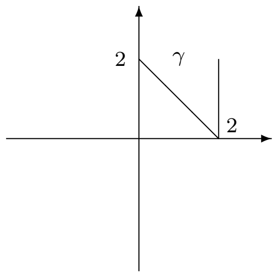
4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma xy\, ds\ ,$$

dove

$$\gamma = [(0, 2), (2, 0)] \cup [(2, 0), 2, 2)]\ .$$

**Risoluzione.** Sia $\gamma_1 = [(0, 2), (2, 0)]$ e $\gamma_2 = [(2, 0), (2, 2)]$.




Si ha
$\int_\gamma xy, ds = \int_{\gamma_1} xy, ds + \int_{\gamma_2} xy, ds.$
Una parametrizzazione di $\gamma_1$ è data dalla funzione $\varphi_1$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} , \ t \in [0, 2] ;$$

per ogni $t \in [0, 2]$ si ha $\varphi'(t) = (1, -1)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$; quindi si ha
$\int_{\gamma_1} xy\, ds = \int_0^2 t(2-t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^2((2t-t^2)\, dt = \sqrt{2}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \sqrt{2}(4-\frac{8}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.
Una parametrizzazione di $\gamma_2$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} , \ t \in [0, 2] ;$$

per ogni $t \in [0, 2]$ si ha $\varphi'(t) = (0, t)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = 1$; quindi si ha
$\int_{\gamma_2} xy\, ds = \int_0^2 2t\, dt = \left[t^2\right]_0^2 = 4.$
Si ha quindi
$\int_\gamma (x_y)\, ds = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 4.$

5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma (x + y)\, ds ,$$

dove

$$\gamma = [(1, 2), (3, 1)] .$$

**Risoluzione.** Si ha
$\gamma = \{(1, 2) + t((3, 1) - (1, 2))\ t \in [0, 1]\}$;
quindi una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} , \ t \in [0, 1] ;$$

per ogni $t \in [0,1]$ si ha $\varphi'(t) = (2,-1)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{5}$; quindi si ha $\int_\gamma (x+y)\,ds = \int_0^1 (1+2t+2-t)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\int_0^1 (3+t)\,dt = \sqrt{5}\left[3t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{5}(3+\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}\sqrt{5}$.

6. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma x^2\,ds \ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 = 1\} \ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \ t \in [0, 2\pi] \ ;$$

per ogni $t \in [0,2\pi]$ si ha $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = 1$; quindi si ha $\int_\gamma x^2\,ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \pi$.

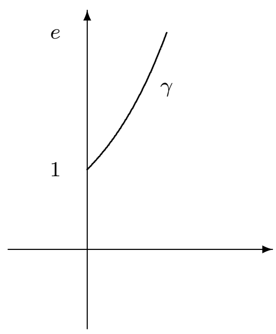
7. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma y^2\,ds \ ,$$

dove $\gamma$ è l'arco semplice

$$\{(x, e^x);\ x \in [0,1]\} \ .$$

**Risoluzione.**




Svolgiamo l'esercizio in due modi,

(a) Modo 1. Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases} , \ t \in [0,1] \ ;$$

per ogni $t \in [0,1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, e^t)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}$; quindi si ha

$$\int_\gamma y^2 \, ds = \int_0^1 e^{2t} \sqrt{1+e^{2t}} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+e^{2t})^{\frac{1}{2}} (e^{2t} 2) \, dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[ (1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left( (1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{(1+e^2)^3} - \sqrt{8}}{3} .$$

(b) Modo 2. L'arco $\gamma$ è la ipersuperficie cartesiana definita da

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow e^x .$$

Per ogni $x \in [0,1]$, si ha $f'(x) = e^x$; si ha quindi

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1+e^{2x}} .$$

Si ha quindi

$$\int_\gamma y^2 \, ds = \int_0^1 e^{2x} \sqrt{1+e^{2x}} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} (e^{2x} 2) \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[ (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left( (1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{(1+e^2)^3} - \sqrt{8}}{3} .$$

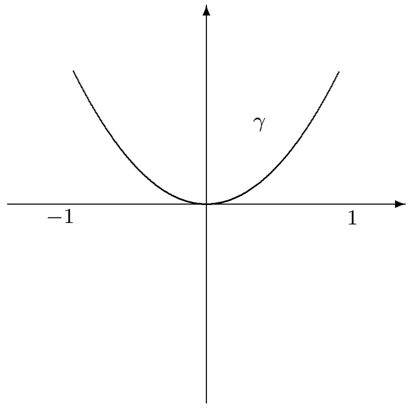
8. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_\gamma y \, ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 ; \; y = x^2, \; -1 \le x \le 1\} .$$

**Risoluzione.**




Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} ,\ t \in [-1, 1] \ .$$

Per ogni $t \in [-1, 1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, 2t)$ e quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$.
Si ha quindi

$$\int_\gamma y\, ds = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \ .$$

Poniamo $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; si ha $\frac{dt}{du} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} u$; per $t = 1$, si ha $u = \operatorname{Argsh} 2$; per $t = -1$, si ha $u = -\operatorname{Argsh} 2$.
Si ha quindi

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} (\frac{1}{2} \operatorname{sh} u)^2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \frac{1}{2} \operatorname{ch} u\, du =$$

$$\frac{1}{8} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} \operatorname{sh}^2 u \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} \operatorname{ch} u\, du = \frac{1}{8} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u\, du =$$

$$\frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} 4 \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u\, du = \frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} (2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u)^2\, du =$$

$$\frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} \operatorname{sh}^2(2u)\, du = \frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} \frac{\operatorname{ch}(4u) - 1}{2}\, du =$$

$$\frac{1}{64} \left[ \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4u) - u \right]_{-\operatorname{Argsh} 2}^{\operatorname{Argsh} 2} =$$

$$\frac{1}{64}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4\operatorname{Argsh}2)-\operatorname{Argsh}2+\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4\operatorname{Argsh}2)-\operatorname{Argsh}2\right)=$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4\operatorname{Argsh}2)-\operatorname{Argsh}2\right)=\frac{1}{128}2\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}2)\operatorname{ch}(2\operatorname{Argsh}2)-\frac{\operatorname{Argsh}2}{32}=$$

$$\frac{1}{64}2\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}2)\operatorname{ch}\operatorname{Argsh}2\left(\operatorname{ch}^2\operatorname{Argsh}2+\operatorname{sh}^2\operatorname{Argsh}2\right)-\frac{\operatorname{Argsh}2}{32}=$$

$$\frac{1}{32}2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\operatorname{Argsh}2}\left(1+\operatorname{sh}^2\operatorname{Argsh}2+4\right)-\frac{\operatorname{Argsh}2}{32}=$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{5}\cdot 9-\frac{\operatorname{Argsh}2}{32}=\frac{9}{16}\sqrt{5}-\frac{\operatorname{Argsh}2}{32}\ .$$

### 22.1.2 Integrali curvilinei di funzioni in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni

$$\int_\gamma z\,ds\ ,$$

dove

$$\gamma=\{(t\cos t,t\sin t,t);\ t\in[0,2\pi]\}\ .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x=t\cos t\\ y=t\sin t\\ z=t\end{cases},\ t\in[0,2\pi]\ .$$

Per ogni $t\in[0,2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t)=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,1;\ .$$

Si ha quindi

$$\|\varphi'(t)\|=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}=$$

$$\sqrt{\cos^2 t-2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t+1}=$$

$$\sqrt{1+t^2+1}=\sqrt{2+t^2}\ .$$

Si ha quindi

$$\int_\gamma z\,ds=\int_0^{2\pi}t\sqrt{2+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+t^2)^{\frac{1}{2}}(2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi}=$$

$$\frac{1}{3}\left((2+4\pi)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left((2+4\pi)\sqrt{2+4\pi}-2\sqrt{2}\right)=$$

$$\frac{2}{3}\left((1+2\pi)\sqrt{2+4\pi}-\sqrt{2}\right)\ .$$

### 22.1.3 Integrali di superficie di funzioni

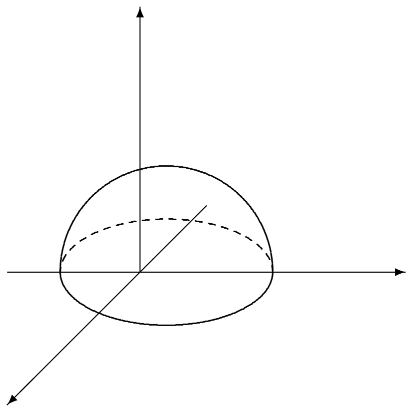
1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (x^2+y^2)\,ds\ ,$$

dove

$$S=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=4, z\geq 0\}\ .$$

**Risoluzione.**



Una parametrizzazione in misura di $S$ è la funzione $\alpha$

$$\begin{cases} x=2\sin\varphi\cos\theta \\ y=2\sin\varphi\sin\theta \\ z=2\cos\varphi \end{cases} \quad , \quad (\varphi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]\ .$$

Per ogni $(\varphi,\theta)\in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha

$$\alpha'(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\theta & -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\varphi\sin\theta & 2\sin\varphi\cos\theta \\ -2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Quindi
$E(\varphi,\theta)=4,$
$F(\varphi,\theta)=0,$
$G(\varphi,\theta)=4\sin^2\varphi.$
Quindi
$\sqrt{E(\varphi,\theta)G(\varphi,\theta)-(F(\varphi,\theta))^2}=\sqrt{16\sin^2\varphi}=4\sin\varphi.$
Quindi si ha
$\int\int_S(x^2+y^2)\,ds=\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]}(4\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta)4\sin\varphi\,d\varphi d\theta=$
$16\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]}\sin^3\varphi\,d\varphi d\theta=16\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi},d\theta\right)=$

$16\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right)2\pi = 32\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi+\cos^2\varphi(-\sin\varphi)\,d\varphi =$
$32\pi\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 32\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.$

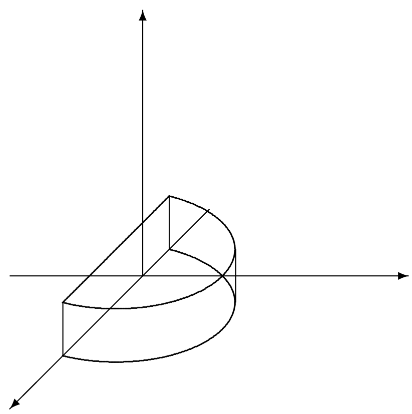
2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S y\,ds\ ,$$

dove

$$S = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=9,\, 0\le z\le 1,\, y\ge 0\}\ .$$

**Risoluzione.**



Una parametrizzazione di $S$ è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = u \end{cases} ,\quad (t,u)\in[0,\pi]\times[0,1]\ .$$

Per ogni $(t,u)\in \mathrm{dom}(\varphi)$ si ha

$$\varphi'(t,u) = \begin{pmatrix} -3\sin t & 0 \\ 3\cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

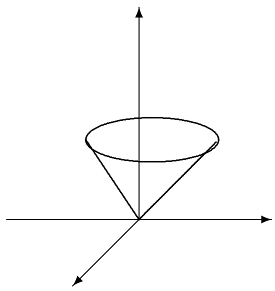
Quindi
$E(t,u) = 9,$
$F(t,u) = 0,$
$G(t,u) = 1.$

Quindi
$\sqrt{E(t,u)G(t,u)-(F(t,u))^2} = 3.$

Quindi si ha
$\int\int_S y\,ds = \int\int_{[0,\pi]\times[0,1]} 3\sin t\cdot 3\,dtdu = 9\left(\int_0^\pi \sin t\,dt\right)\left(\int_0^1, du\right) =$
$9\left[-\cos t\right]_0^\pi = 18.$

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie
$$\int\int_S z\,ds\ ,$$
dove
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=z^2,\ 0 \le z \le 1\}\ .$$

**Risoluzione.**



$S$ è la superficie conica di base
$$\{(x,y,1);\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ x^2+y^2=1\}$$
e vertice $(0,0,1)$. Una parametrizzazione in misura di $S$ è quindi la funzione $\varphi$
$(x,y,z) = (0,0,0) + t((\cos u, \sin u, 1) - (0,0,0)), \quad (t,u) \in [0,1] \times [0,2\pi]$,
cioè
$$\begin{cases} x = t\cos u \\ y = t\sin u \\ z = t \end{cases} \quad , \quad (t,u) \in [0,1] \times [0,2\pi]\ .$$
Per ogni $(t,u) \in \mathrm{dom}(\varphi)$ si ha
$$\varphi'(t,u) = \begin{pmatrix} \cos u & -t\sin u \\ \sin u & t\cos u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$
Quindi
$E(t,u) = \cos^2 u + \sin^2 u + 1 = 2$,
$F(t,u) = 0$,
$G(t,u) = t^2\sin^2 u + t^2\cos^2 u = t^2$.
Quindi
$\sqrt{E(t,u)G(t,u) - (F(t,u))^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}t$.
Quindi si ha
$\int\int_S z\,ds = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} t\sqrt{2}t\,dtdu = \sqrt{2}\left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\left(\int_0^{2\pi}, du\right) =$
$\sqrt{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 2\pi = \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$.

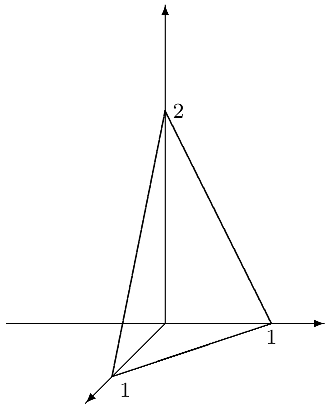
4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z\,ds\ ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + \frac{z}{2} = 1\}\ .$$

**Risoluzione.**




Sia

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}\ .$$

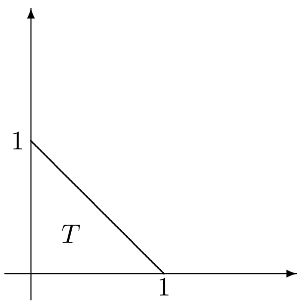
Sia

$$g : T \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2(1 - x - y)\ .$$

$S$ è la superficie cartesiana

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in T\ .$$

Si ha
$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2,$
$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2.$
Quindi
$\sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x}(x, y))^2 + (\frac{\partial g}{\partial y}(x, y))^2} = \sqrt{9} = 3.$



Quindi si ha
$\int\int_S xy\,ds = \int\int_T xy3\,dxdy = 3\int\int_T xy\,dxdy =$
$3\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,dy\right) dx = 3\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$
$\frac{3}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$

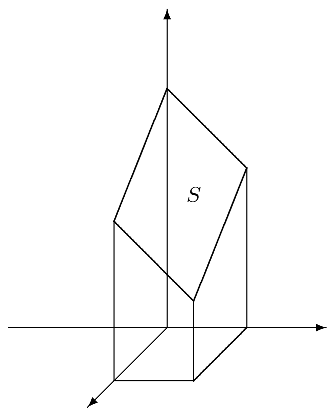
5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S (2z+x-3y)\,ds\ ,$$

dove

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 3-x-y\right\}\ .$$

**Risoluzione.**




Una parametrizzazione di $S$ è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3-u-v \end{cases}\ ,\quad (t,u) \in [0,1]\times[0,1]\ .$$

Per ogni $(u,v) \in \mathrm{dom}(\varphi)$ si ha

$$\varphi'(t,u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Quindi
$E(u,v) = 2,$
$F(u,v) = 1,$
$G(u,v) = 2.$

Quindi
$\sqrt{E(u,v)G(u,v)-(F(u,v))^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$

Quindi si ha
$\int\int_S (2z + x - 3y)\, ds = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} (2(3 - u - v) + u - 3v)\sqrt{3}\, dudv =$
$\sqrt{3}\int\int_{[0,1]\times[0,1]} (6 - u - 5v)\, dudv = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_0^1 (6 - u - 5v)\, dv\right) du =$
$\sqrt{3}\int_0^1 \left[6v - uv - \frac{5}{2}v^2\right]_0^1 du = \sqrt{3}\int_0^1 (6 - u - \frac{5}{2})du =$
$\sqrt{3}\int_0^1 (\frac{7}{2} - u)du = \sqrt{3}\left[\frac{7}{2}u - \frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \sqrt{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3}.$

## 22.2 Misura di sottoinsiemi di una varietà

### 22.2.1 Lunghezza di una curva

1. **Esercizio.** Calcolare la lunghezza della seguente curva:

$$\gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t);\ t \in [0, 2\pi]\} .$$

**Risoluzione.** La funzione $[0, 2\pi] \longrightarrow [1, e^{2\pi}]$ è un omeomorfismo; da ciò segue subito che una parametrizzazione di $\gamma$ è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ x = e^t \end{cases} , \quad t[0, 2\pi] .$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) .$$

Si ha quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}}$$

$$\sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t) + e^{2t}} =$$

$$\sqrt{e^{2t}(1 + 1 + 1)} = \sqrt{3}\, e^t .$$

Si ha quindi

$$\text{Lungh}(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3}\left[e^t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1) .$$

2. **Esercizio.** Determinare la lunghezza della seguente curva:

$$\gamma = \{(t \cos t, t \sin t, t);\ t \in [0, 2\pi]1\} .$$

**Risoluzione.** Una parametrizzazione di $\gamma$ è data dalla funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases} , \ t \in [0, 2\pi] .$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1; .$$

Si ha quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} =$$

$$\sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} =$$

$$\sqrt{1 + t^2 + 1} = \sqrt{2 + t^2} \ .$$

Si ha quindi

$$\text{Lungh}(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2}\, dt \ .$$

Poniamo $t = \sqrt{2} \operatorname{sh} u$; si ha $\frac{dt}{du} = \sqrt{2} \operatorname{ch} t$; per $t = 0$ si ha $u = 0$; per $t = 2\pi$ si ha $u = \operatorname{Argsh} \frac{3\pi}{\sqrt{2}} = \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)$.

Si ha quindi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2}\, dt = \int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} \sqrt{2 \operatorname{sh}^2 u + 2} \sqrt{2} \operatorname{ch} u\, du =$$

$$2 \int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} \operatorname{ch} u\, du = 2 \int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} \operatorname{ch} u\, du =$$

$$2 \int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} \operatorname{ch}^2 u\, du = 2 \int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} \frac{\operatorname{ch}(2u) + 1}{2}\, du =$$

$$\int_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} (\operatorname{ch}(2u) + 1)\, du = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2u) + u\right]_0^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2 \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)) + \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) =$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) \operatorname{ch} \operatorname{sh} \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) =$$

$$\sqrt{2}\pi \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi)} + \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) = \sqrt{2}\pi \sqrt{1 + 2\pi^2} + \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) =$$

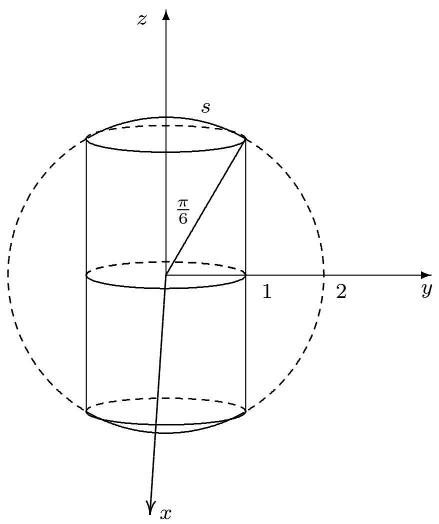
$$\pi \sqrt{2 + 4\pi^2} + \operatorname{Argsh}(\sqrt{2}\pi) \ .$$

### 22.2.2 Area di una superficie

1. **Esercizio.** Calcolare l'area della superficie

$$s=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2\leq 1, z\geq 0\}\ .$$

**Risoluzione.**




La funzione $\alpha$

$$\begin{cases} x=2\sin\varphi\cos\theta \\ y=2\sin\varphi\sin\theta \\ z=2\cos\varphi \end{cases} ,\ (\varphi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{6}]\times[0,2\pi]$$

è una parametrizzazione in misura di $s$.
Per ogni $(\varphi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{6}\times[0,2\pi]$ si ha

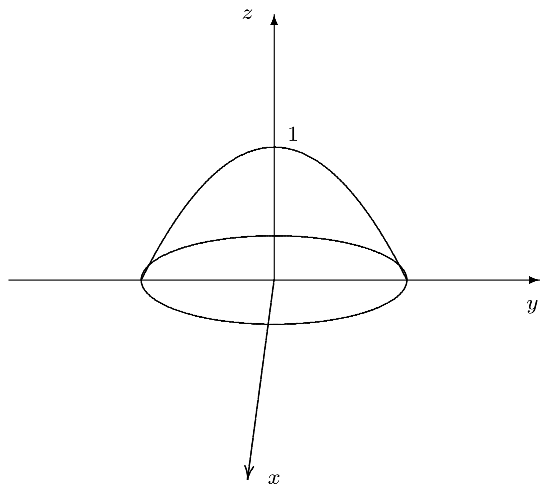
$$\alpha'(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\theta & -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\varphi\sin\theta & 2\sin\varphi\cos\theta \\ -2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\ ;$$

si ha quindi $E(\varphi,\theta)=4$, $F(\varphi,\theta)=0$, $G(\varphi,\theta)=4\sin^2\varphi$.
Quindi si ha
Area$(s)=\int\int_{[0,\frac{\pi}{6}]\times[0,2\pi]}\sqrt{16\sin^2\varphi}\,d\varphi d\theta=4\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi=8\pi\,[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}}=8\pi(\frac{-\sqrt{3}}{2}+1)=4\pi(2-\sqrt{3})$.

2. **Esercizio.** Calcolare l'area della superficie:

$$s=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ z=1-x^2-y^2, z\geq 0\}\ .$$

**Risoluzione.**




Posto $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, si ha
$\{(x, y, x^2 + y^2); (x, y) \in A\}$;
quindi $s$ è una superficie cartesiana definita da
$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$.

Per ogni $(x, y) \in A$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$; quindi si ha
$\text{Area}(s) = \int\int_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$.

Una parametrizzazione in misura di $A$ è

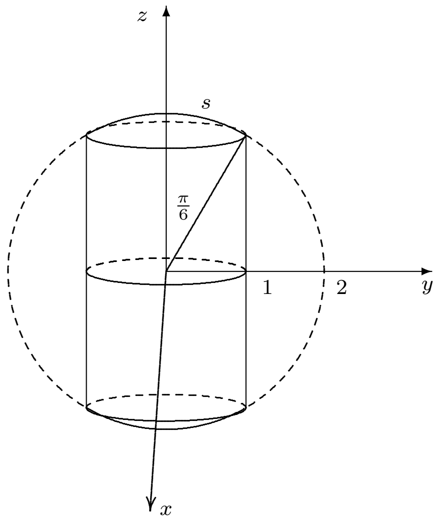
$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}, \ (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \ ;$$

quindi si ha
$\int\int_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho dt =$
$2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho = 2\pi \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\left[(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1) =$
$\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

3. **Esercizio.** Calcolare l'area della superficie

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\} .$$

**Risoluzione.**




La funzione $\alpha$

$$\begin{cases} x = 2\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2\cos\varphi \end{cases} , \ (\varphi,\theta) \in [0, \frac{\pi}{6}] \times [0, 2\pi]$$

è una parametrizzazione in misura di $s$.

Per ogni $(\varphi, \theta) \in [0, \frac{\pi}{6} \times [0, 2\pi]$ si ha

$$\alpha'(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\theta & -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\varphi\sin\theta & 2\sin\varphi\cos\theta \\ -2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} ;$$

si ha quindi $E(\varphi,\theta) = 4$, $F(\varphi,\theta) = 0$, $G(\varphi,\theta) = 4\sin^2\varphi$.

Quindi si ha

$\text{Area}(s) = \int\int_{[0,\frac{\pi}{6}]\times[0,2\pi]} \sqrt{16\sin^2\varphi}\, d\varphi d\theta = 4 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi\, d\varphi = 8\pi\,[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}} =$ $8\pi(\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1) = 4\pi(2 - \sqrt{3})$.

# Capitolo 23

# Integrale di forme differenziali

## 23.1 Integrale di forme differenziali

### 23.1.1 Integrali curvilinei di forme differenziali in $\mathbf{R}^2$

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

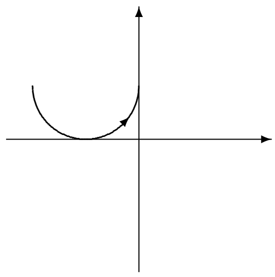
$$\int_\Gamma (-x+y)dx - y^2 dy \ ,$$

dove $\Gamma$ è la curva orientata

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, y \le 1\} \ ,$$

con orientazione per la quale $(-2,1)$ è il punto iniziale e $(0,1)$ il punto finale.

**Risoluzione.** La curva $\Gamma$ è una semicirconferenza di centro $(-1,1)$ percorsa in verso antiorario.



Una parametrizzazione di $\Gamma$ è

$$\begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad , \quad t \in [-\pi, 0] \ .$$

Si ha quindi
$\int_\Gamma (-x+y)dx - y^2 dy = \int_{-\pi}^0 ((1-\cos t+1+\sin t)(-\sin t) - (1+\sin t)^2 \cos t)\, dt =$

$\int_{-\pi}^{0}(-2\sin t - \cos t \sin t - \sin^2 t - \cos t - 2\sin t \cos t - \sin^2 \cos t)\,dt =$
$\int_{-\pi}^{0}(-2\sin t - \cos t - \sin t \cos t - \sin^2 t - \cos t - \sin^2 \cos t)\,dt =$
$-2\int_{-\pi}^{0} \sin t\,dt - \int_{-\pi}^{0} \cos t\,dt - \int_{-\pi}^{0} \sin t \cos t\,dt - \int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$
$-\int_{-\pi}^{0} \sin^2 t \cos t\,dt =$
$-2\left[\cos t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\sin t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{-\pi}^{0} =$
$4 - \frac{\pi}{2}$.

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

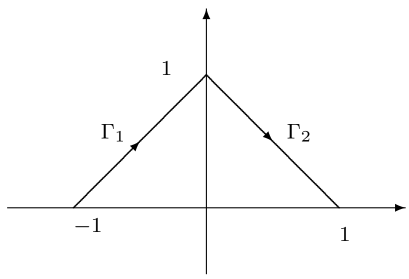
$$\int_{\Gamma} \frac{1}{y+1}\,dx\ ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice orientato

$$[(-1,0),(0,1)] \cup [(0,1),(1,0)]$$

orientata in modo che $(-1,0)$ sia il punto iniziale e $(1,0)$ il punto finale.

**Risoluzione.** Sia $\Gamma_1$ l'arco semplice orientato $[(-1,0),(0,1)]$ di punto iniziale $(-1,0)$ e punto finale $(0,1)$.




Sia $\Gamma_2$ l'arco semplice orientato $[(0,1),(1,0)]$ di punto iniziale $(0,1)$ e punto finale $(1,0)$.

Si ha

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{y+1}\,dx = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{y+1}\,dx + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{y+1}\,dx\ .$$

Una parametrizzazione di $\Gamma_1$ è

$$(x,y) = (-1,0) + t((0,1)-(-1,0)), \quad t \in [0,1]\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0,1]\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{y+1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt = [\log(t+1)]_0^1 = \log 2\ .$$

Una parametrizzazione di $\Gamma_2$ è

$$(x,y) = (0,1) + t((1,0)-(0,1)), \quad t \in [0,1]\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}, \quad t \in [0,1]\ .$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{y+1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1-t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{2-t}\, dt = [-\log(2-t)]_0^1 = \log 2\ .$$

(Oppure $\Gamma_2$ è il simmetrico di $\Gamma_1$ rispetto all'asse $y$; la funzione $f(x,y) = \frac{1}{y+1}$ in punti simmetrici assume gli stessi valori; proiezioni di lunghezze di $\Gamma_1$ e di $\Gamma_2$ sull'asse $x$ hanno lo stesso segno; quindi

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{y+1}\, dx = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{y+1}\, dx = \log 2).$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{y+1}\, dx = \log 2 + \log 2 = 2\log 2 = \log 4\ .$$

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

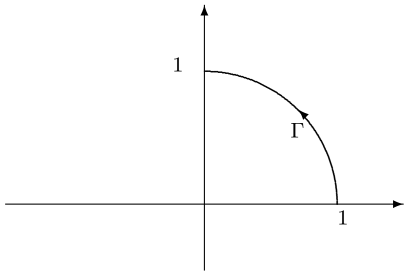
$$\int_\Gamma y^2\, dx\ ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice orientato

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}\ ,$$

di punto iniziale $(1,0)$ e di punto finale $(0,1)$.

**Risoluzione.**




Una parametrizzazione di $\Gamma$ è

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma y^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(-\sin t)\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sin t\, dt =$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt =$$

$$-\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\; dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t)\, dt =$$

$$\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} .$$

4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

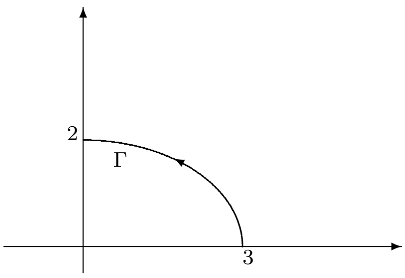
$$\int_\Gamma (x^2 + y)\, dx ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice orientato

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} ,$$

di punto iniziale $(3,0)$ e di punto finale $(0,2)$.

**Risoluzione.**




Una parametrizzazione di $\Gamma$ è

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} , \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \ .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma (x^2 + y)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(9\cos^2 t + 2\sin t\big)\, 2\cos t\, dt =$$

$$2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos t\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\right) =$$

$$2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\cos t\, dt + 2\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{pi}{2}}\right) =$$

$$2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt - 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt + 2\frac{1}{2}\right) =$$

$$2\left(9\,[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 9\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) = 2(9 - 3 + 1)2 \cdot 7 = 14 \ .$$

5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

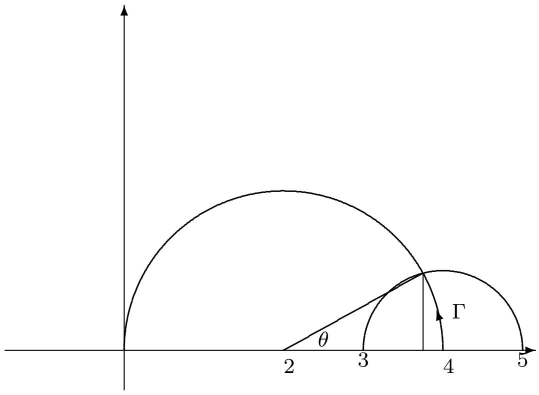
$$\int_\Gamma xy\, dx \ ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-2)^2 + y^2 = 4,\ (x-4)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\} \ ,$$

orientato in modo tale che $\vec{t}(4, 0) = (0, 1)$ (condizione sul versore tangente nel punto $(4, 0)$).

**Risoluzione.**




$\Gamma$ è un arco della semicirconferenza $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Determiniamo il punto intersezione fra le semicirconferenze
$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} (x-4)^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Il punto soddisfa

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ (x-4)^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ (x-2)^2-(x-4)^2=3 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+4-(x^2-8x_16)=3 \\ (x-2)^2+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} 4x-12=3 \\ (x-2)^2+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ (\frac{15}{4}-2)^2+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ \frac{49}{16}+y^2=4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ y^2=\frac{15}{16} \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases} .$$

Quindi il punto intersezione delle due semicirconferenze è $(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$.
Sia $\theta$ l'angolo al centro della circonferenza $(x-2)^2 + y^2 = 4$, che sottende l'arco $\Gamma$.
Si ha

$$\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} .$$

Essendo $\frac{15}{4} > 2$ si ha $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Si ha quindi $\theta = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{15}}{8}$.
Una parametrizzazione di $\Gamma$ è quindi

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} , \quad t \in \left[0, \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{15}}{8}\right] .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma xy\,dx = \int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} (2+2\cos t)2\sin t(-2\sin t)\,dt =$$

$$-8\left(\int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} \sin^2 t\,dt + \int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} \sin^2 t\cos t\right) =$$

$$-8\left(\int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt + \int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} \sin^2 t\cos t\right) =$$

$$\left[-4t + 2\sin(2t) - \frac{8}{3}\sin^3 t\right]_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} =$$

$$-4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 2\sin\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}\right) - \frac{8}{3}\sin^3\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$-4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 4\sin\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^3 =$$

$$-4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 4\frac{\sqrt{15}}{8}\sqrt{1-\sin^2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} - \frac{8}{3}\frac{15}{64}\frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$-4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{1-\frac{15}{64}} - \frac{5}{64}\sqrt{15} = -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{7}{8} - \frac{5}{64}\sqrt{15} =$$

$$-4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{23}{64}\sqrt{15} .$$

6. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

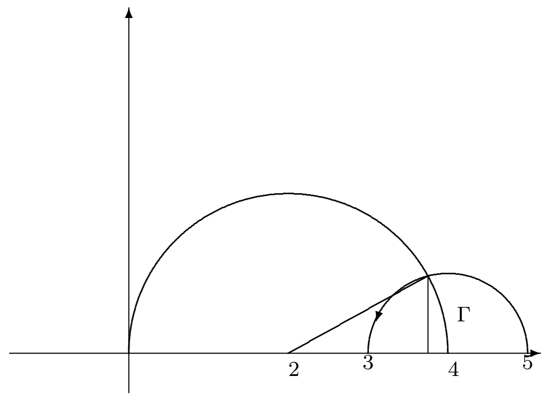
$$\int_\Gamma xy\,dx\ ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice.

$$\{x, y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-4)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}\ ,$$

orientata in modo che $(3, 0)$ sia il punto finale.

**Risoluzione.**




$\Gamma$ è un arco della semicirconferenza $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Determiniamo il punto intersezione fra le semicirconferenze $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Il punto soddisfa

$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 - (x-4)^2 = 3 \\ y \ge 0 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 8x_16) = 3 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} 4x - 12 = 3 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ (\frac{15}{4} - 2)^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ \frac{49}{16} + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , cioè

$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y^2 = \frac{15}{16} \\ y \geq 0 \end{cases}$ , cioè

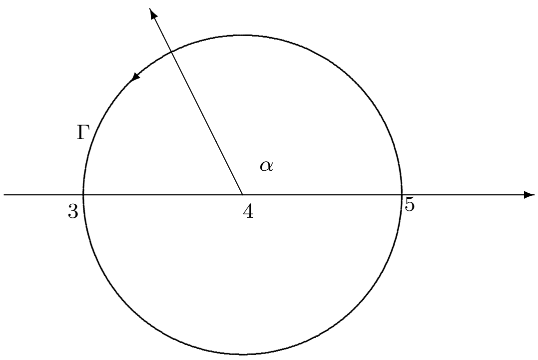
$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$ , cioè

$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$ .

Quindi il punto intersezione delle due semicirconferenze è $(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$.

$(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ è il punto iniziale di $\Gamma$.

Sia $\alpha$ fra la semiretta di origine $(4, 0)$ e passante per $(5, 0)$ e la semiretta di origine $(4, 0)$ e passante per $(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$.




Una parametrizzazione di $\Gamma$ è

$$\begin{cases} x = 4 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad t \in [\alpha, \pi] .$$

Si ha $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; si ha quindi $\alpha = \pi - \text{Arcsin}\, \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Una parametrizzazione di $\Gamma$ è

$$\begin{cases} x = 4 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad t \in \left[\pi - \text{Arcsin}\, \frac{\sqrt{15}}{4}, \pi\right] .$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma xy\,dx = \int_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} (4+\cos t)\sin t(-\sin t)\,dt =$$

$$-\int_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} (4\sin^2 t + \sin^2 t\cos t)\,dt =$$

$$-\int_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} (4\frac{1-\cos(2t)}{2} + \sin^2 t\cos t)\,dt =$$

$$-\left[2(t-\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} =$$

$$-\left[2t-\sin(2t)+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} =$$

$$2\pi - 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} - \sin(2(\pi-\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4})) + \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{15}}{4})^3 - 2\pi =$$

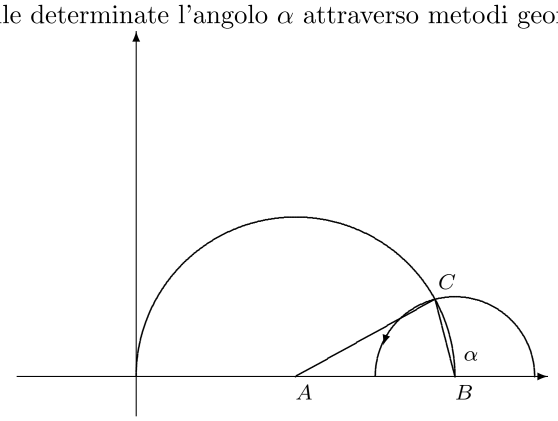
$$-2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} + \sin(2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}) + \frac{1}{3}\frac{15\sqrt{15}}{64} =$$

$$\frac{5\sqrt{15}}{64} - 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} + 2\frac{\sqrt{15}}{4}\cos\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} =$$

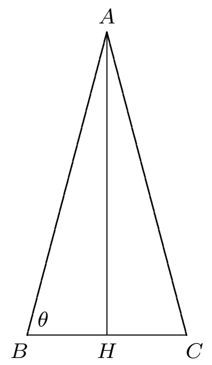
$$\frac{5\sqrt{15}}{64} - 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{1-\frac{15}{16}} =$$

$$\frac{5\sqrt{15}}{64} - 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{1}{4} = \frac{13}{64}\sqrt{15} - 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}\ .$$

**NB.** È possibile determinate l'angolo $\alpha$ attraverso metodi geometrici.




Il triangolo $ABC$ è isoscele, con base $BC$. Si ha $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ e $\overline{BC} = 1$. Sia $\theta$ l'angolo alla base del triangolo isoscele.




Si ha $\overline{BH} = \overline{BA}\cos\theta$; quindi $\frac{1}{2} = 2\cos\theta$; quindi $\cos\theta = \frac{1}{4}$; quindi $\theta = \text{Arccos}\,\frac{1}{4}$; quindi $\alpha = \pi - \text{Arccos}\,\frac{1}{4}$.

Per $0 \leq x \leq 1$ si ha $\arccos x = \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$; si ha quindi $\text{Arccos}\,\frac{1}{4} = \text{Arcsin}\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}$; quindi $\alpha = \pi - \text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}$. Si ottiene quindi l'espressione di $\alpha$ precedentemente trovata.

7. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

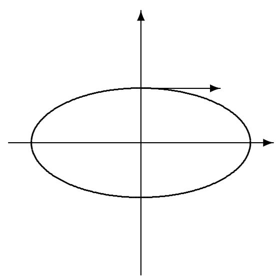
$$\int_\Gamma x\,dy\;,$$

dove $\Gamma$ è la curva

$$\{x,y) \in \mathbf{R}^2;\; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}\;,$$

orientata in modo che $\vec{t}(0,1) = (1,0)$.

**Risoluzione.**



Indichiamo con $\gamma$ la curva $\Gamma$ non orientata.

Una parametrizzazione di $\gamma$ è

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad t \in [0, 2\pi] .$$

Si ha $\varphi(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\varphi'(t) = (-2\sin t, \cos t)$; si ha quindi $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$.

Il versore tangente a $\gamma$ in $(0, 1)$, con $\gamma$ orientata tramite $\varphi$, è quindi

$$\frac{\varphi'(\frac{\pi}{2})}{\|\varphi'(\frac{\pi}{2})\|} = (-1, 0) .$$

Quindi $\varphi$ ='e una parametrizzazione di $-\Gamma$.

Si ha quindi

$\int_\Gamma x\,dy = -\int_{-\Gamma} x\,dy = -\int_0^{2\pi} 2\cos t \cos t\,dt = -2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt =$
$-2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = -\int_0^{2\pi} (1 + cos(2t))\,dt = -\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = -2\pi.$

### 23.1.2 Integrali curvilinei di forme differenziali in $\mathbf{R}^3$

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

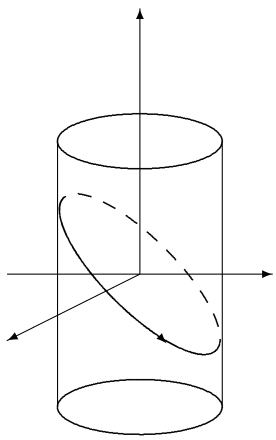
$$\int_\Gamma x^2\,dz ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} ,$$

orientato in modo che $\vec{\mathbf{t}}(1, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

**Risoluzione.**



Una parametrizzazione di $\Gamma$ non orientata è la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\cos t - \sin t \end{cases} , \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] .$$

Si ha $\varphi(0) = (1, 0, -1)$.
Per ogni $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t) .$$

Si ha $\varphi'(t) = (0, 1, -1)$.
Il versore tangente a $\Gamma$ orientata tramite $\varphi$ è

$$\frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) .$$

Quindi $\varphi$ è concorde con l'orientazione di $\Gamma$.
Si ha quindi

$$\int_\Gamma x^2\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(\sin t - \cos t)\, dt = \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt - \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\, dt =$$

$$-\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t)\, dt - \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t\, dt =$$

$$-\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt + -\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt =$$

$$-[\sin t]_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + -\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} .$$

### 23.1.3 Integrali di superficie di 2-forme

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie:

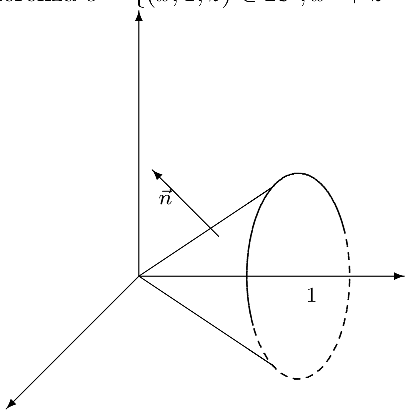
$$\int\int_S y dx \wedge dz ,$$

dove il sostegno di $S$ è

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + z^2 = y^2, 0 \leq y \leq 1\}$$

e l'orientazione di $S$ è tale che per ogni $(x, y, z) \in S - \{(0, 0, 0)\}$ si ha $(\vec{n}(x, y, z))_2 < 0$.

**Risoluzione.** La superficie $s$ è la superficie laterale del cono di vertice $(0,0,0)$ e base la circonferenza $c = \{(x,1,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+z^2 = 1\}$.




Un punto $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ appartiene a $s$ se e solo se esiste $t \in [0,1]$ ed esiste $(\xi, 1, \zeta) \in c$ tali che

$$(x,y,z) = (0,0,0) + t((\xi,1,\zeta) - (0,0,0)) = (t\xi, t, t\zeta)$$

.

Un punto $(\xi,1,\zeta) \in \mathbf{R}^3$ appartiene a $c$ se e solo se esiste $\theta \in [0,2\pi]$ tale che

$$(\xi,\zeta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Quindi $(x,y,z) \in s$ se e solo se esiste $t \in [0,1]$ ed esiste $\theta \in [0,2\pi]$ tali che

$$(x,y,z) = (t\cos\theta, t, t\sin\theta)\ .$$

La funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t \\ z = t\sin\theta \end{cases}, \quad (t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

è una parametrizzazione in misura di $s$.

Per ogni $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta \\ 1 & 0 \\ \sin\theta & t\cos\theta \end{pmatrix}\ .$$

Se $\vec{v}$ è il versore normale alla superficie orientata $(s, \tilde{\varphi})$ per ogni $(t,\theta) \in ]0,1] \times [0,2\pi]$ si ha

$$\operatorname{sgn}(\vec{v}(\varphi(t,\theta))_2 = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} \sin\theta & t\cos\theta \\ \cos\theta & -t\sin\theta \end{vmatrix}\ ;$$

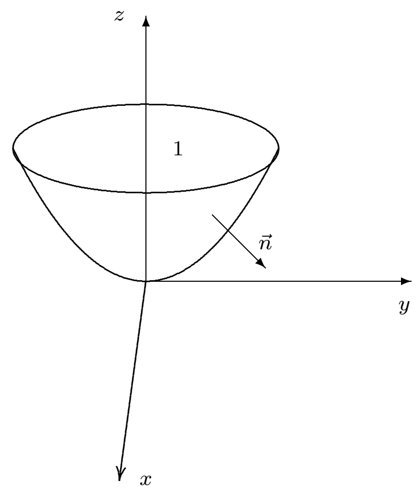
si ha
$$\begin{vmatrix} \sin\theta & t\cos\theta \\ \cos\theta & -t\sin\theta \end{vmatrix} = -t < 0\ ;$$

quindi per ogni $(x, y, z) \in s - \{(0, 0, 0)\}$ si ha $(\vec{v}(x, y, z))_2 < 0$; quindi si ha $\vec{v} = \vec{n}$; quindi $\varphi$ è una parametrizzazione di $S$.

Si ha quindi
$\int\int_S y dx \wedge dz = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} tt\, dtd\theta = 2\pi \int_0^1 t^2\, dt = \frac{2}{3}\pi$.

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie:
$$\int\int_S z dx \wedge dy\ ,$$
dove il sostegno di $S$ è
$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$
e l'orientazione di $S$ è tale che per ogni $(x, y, z) \in S$ si ha $(\vec{n}(x, y, z))_3 < 0$.

**Risoluzione.** Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.




La funzione $\varphi$
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}\ ,\ (u, v) \in D$$
è una parametrizzazione in misura di $s$.

Per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} .$$

Se $\vec{v}$ è il versore normale alla superficie orientata $(s, \tilde{\varphi})$ per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$$\mathrm{sgn}(\vec{v}(\varphi(t,\theta))_3 = \mathrm{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\, 1 \ ;$$

quindi per ogni $(x,y,z) \in s$ si ha $(\vec{v}(x,y,z))_3 > 0$; quindi si ha $\vec{v} = -\vec{n}$; quindi $\varphi$ è una parametrizzazione di $-S$.

Si ha quindi

$\int\int_S z dx \wedge dy = -\int\int_{-S} z dx \wedge dy = -\int\int_D (u^2+v^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dudv =$
$-\int\int_D (u^2+v^2)\, dudv = -\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3\, d\rho dt = -2\pi \int_0^1 \rho^3\, d\rho = -2\pi \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie:

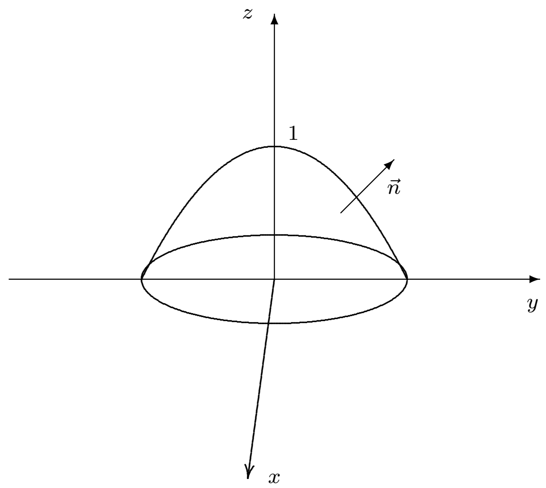
$$\int\int_S z\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy \ ,$$

dove il sostegno di $S$ è

$$s = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e l'orientazione di $S$ è tale che per ogni $(x,y,z) \in S - \{(0,0,0)\}$ si ha $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

**Risoluzione.** Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.



La funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u^2 - v^2 \end{cases}, \ (u,v) \in D$$

è una parametrizzazione in misura di $s$.

Per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u & -2v \end{pmatrix} .$$

Se $\vec{v}$ è il versore normale alla superficie orientata $(s, \tilde{\varphi})$ per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$$\mathrm{sgn}(\vec{v}(\varphi(u,v))_3 = \mathrm{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\, 1 = 1 \ ;$$

quindi per ogni $(x,y,z) \in s$ si ha $(\vec{v}(x,y,z))_3 > 0$; quindi si ha $\vec{v} = \vec{n}$; quindi $\varphi$ è una parametrizzazione di $S$.

Si ha quindi
$\int\int_S z\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy =$
$\int\int_D \left( (1-u^2-v^2) \begin{vmatrix} -2u & -2v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) dudv =$
$\int\int_D ((1-u^2-v^2)2v + v)\, dudv =$
$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} ((1-\rho^2)2\rho \sin t + \rho \sin t)\rho\, d\rho dt =$
$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (2\rho^2 \sin t - 2\rho^4 \sin t + \rho^2 \sin t)\, d\rho dt =$
$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} 3\rho^2 \sin t\, d\rho dt - \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} 2\rho^4 \sin t\, d\rho dt =$
$3 \left( \int_0^1 \rho^2\, d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin t\, dt \right) - 2 \left( \int_0^1 \rho^4\, d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin t\, dt \right) = 0.$

4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S x\, dy \wedge dz \ ,$$

dove $S$ è il triangolo chiuso di vertici $(2,5,3)$, $(4,2,1)$, $(0,0,3)$ orientato in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

**Risoluzione.** Sia

$$T = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2; u \geq 0,\, v \geq 0,\, u + v \leq 1\}$$

.

I punti di $S$ sono dati da

$$(x,y,z) = u(2,5,3) + v(4,2,1) + (1-u-v)(0,0,3) = (2u+4v, 5u+2v, -2v+3) \ ;$$

una parametrizzazione di $S$ non orientata è quindi la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = 2u + 4v \\ y = 5 + 2v \\ z = -2v + 3 \end{cases}, \ (u,v) \in T \ .$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

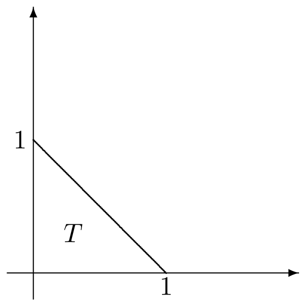
Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 20 = -16 < 0 \ ;$$

quindi $\varphi$ è una parametrizzazione di $-S$.
Si ha quindi

$$\int\int_S x\,dy \wedge dx = -\int\int_{-S} x\,dy \wedge dx = -\int\int_T (2u+4v) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \ dudv =$$

$$-\int\int_T (2u+4v)(-10) \ dudv = 20 \int\int_T (u+2v) \ dudv \ .$$




Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni $u \in [0,1]$ si ha $T(u) = [0, 1-u]$. Si ha quindi

$$20 \int\int_T (u+2v) \ dudv = 20 \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} (u+2v)\,dv \right) du =$$

$$20 \int_0^1 \left[ uv + v^2 \right]_0^{1-u} \ du = 20 \int_0^1 (u(1-u) + (1-u)^2\,du =$$

$$20 \int_0^1 (u - u^2 + 1 - 2u + u^2)\,du = 20 \int_0^1 (1-u)\,du =$$

$$20 \left[ u - \frac{1}{2}u^2 \right]_0^1 = 20 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 10 \ .$$

5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S x\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz\ ,$$

dove $S$ è la superficie

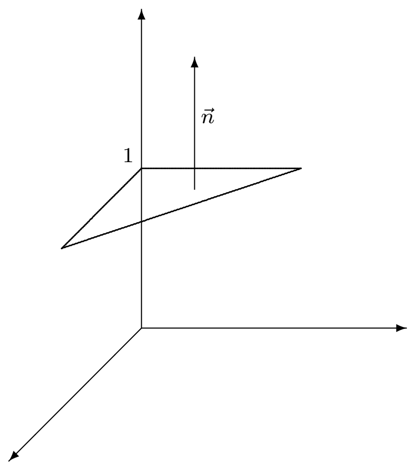
$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1,\, z = 1\}\ ,$$

orientata in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

**Risoluzione.** Sia

$$T = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2; u \geq 0,\, v \geq 0,\, u+v \leq 11\}$$

.




Una parametrizzazione di $S$ non orientata è quindi la funzione $\varphi$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 \end{cases},\ (u,v) \in T\ .$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Si ha

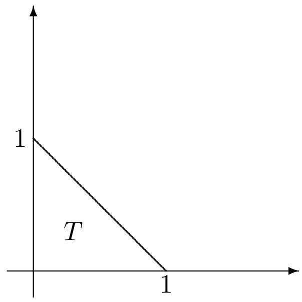
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0\ ;$$

quindi $\varphi$ è concorde con l'orientazione di $S$.

Si ha quindi

$$\int\int_S x\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz =$$

$$\int\int_T \left( u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dudv + u \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} dudv \right) = \int\int_T u\,dudv\,.$$




Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni $u \in [0,1]$ si ha $T(u) = [0, 1-u]$.
Si ha quindi

$$\int\int_T u\ dudv = \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} u\,dv \right) du = \int_0^1 u(1-u)\,du =$$

$$\int_0^1 (u-u^2)\,du = \left[ \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

# Capitolo 24

# Teorema di Stokes

## 24.1 Teorema di Stokes applicato alle curve

### 24.1.1 Integrali curvilinei di forme differenziali esatte

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

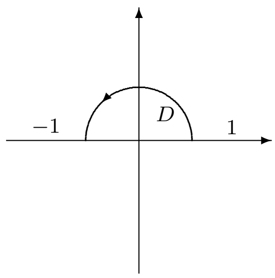
$$\int_\Gamma ydx + xdy \ ,$$

dove il sostegno di $\Gamma$ è

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

e l'orientazione di $\Gamma$ è tale che $(1, 0)$ è il punto iniziale e $(-1, 0)$ il punto finale.

**Risoluzione.** La forma differenziale $ydx + xdy$ è esatta e una primitiva è $f(x, y) = xy$. Si ha quindi




$\int_\Gamma ydx + xdy = f(-1, 0) - f(1, 0) = 0.$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo:

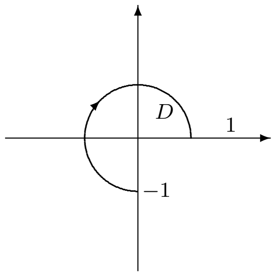
$$\int_\Gamma xdx + ydy \ ,$$

dove il sostegno di $\Gamma$ è

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2=1, y \geq 0 \text{ o } x \leq 0\}$$

e l'orientazione di $\Gamma$ è tale che $(0,-1)$ è il punto iniziale e $(1,0)$ il punto finale.

**Risoluzione.** La forma differenziale $xdx + ydy$ è esatta e una primitiva è $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.




Si ha quindi
$\int_\Gamma xdx + ydy = f(1,0) - f(0,-1) = 1 - 1 = 0.$

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\Gamma ((x+1)^3 \log z + \frac{1}{y})\, dx + (2yz - \frac{x}{y^2})\, dy + (\frac{(x+1)^4}{4z} + y^2)\, dz\ ,$$

dove $\Gamma$ è l'arco semplice orientato

$$\{(t, t+1, e^t);\ t \in [0,1]\}$$

orientata in modo che $(0,1,1)$ sia il punto iniziale e $(1,2,e)$ il punto finale.

**Risoluzione.** Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y > 0,\ z \neq 0\}\ .$$

Chiamata $\omega$ la forma differenziale, si ha $\mathrm{dom}(\omega) = A$.

Sia

$$f : A \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow \frac{(x+1)^4}{4} \log y + \frac{x}{z} + yz^2\ .$$

Per ogni $(x,y,z) \in A$ si ha
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (x+1)^3 \log y + \frac{1}{z}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{(x+1)^4}{4}\frac{1}{y} + z^2$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z^2} + 2yz$.
Quindi $f$ è una primitiva di $\omega$.
Si ha quindi
$\int_\Gamma ((x+1)^3 \log z + \frac{1}{y})\, dx + (2yz - \frac{x}{y^2})\, dy + (\frac{(x+1)^4}{4z} + y^2)\, dz =$
$= f(1,e,2) - f(0,1,1) = \frac{2^4}{4} \log e + \frac{1}{2} + e2^2 - (0+0+1) = 4 + \frac{1}{2} + 4e - 1 = \frac{7}{2} + 4e.$