

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA L-B
Corso di Laurea in Ing. Civile L-Z (Prof. Ravaglia)
Anno Accademico 2004/05

Simboli: I= introduzione intuitiva, D = definizione, T = teorema C = criterio deduttivo, d = dimostrazione, e = enunciato, A = assioma. Le indicazioni numeriche si riferiscono al testo Carlo Ravaglia: Analisi Matematica II. Ad esempio l'indicazione "21.1.2 Derivata direzionale: D1" significa la definizione 1 di della sottosezione (21.1.2) intitolata "Derivata direzionale" del volume Analisi Matematica II. Quando la definizione o il teorema è indicato attraverso una frase il riferimento viene messo fra parentesi. La presenza di asterischi segnala l'importanza dell'argomento; maggiore ne è il numero e più l'argomento è importante.

Presupposti di Analisi Matematica I e di Geometria

Tutti gli argomenti dei corsi di Analisi Matematica I e di Geometria aventi riferimento con argomenti del corso di Analisi Matematica II.

14 Calcolo differenziale in \mathbf{R}^N

14.1 Derivate parziali: 14.1.2 Derivata direzionale: D*** 14.1.2.1; significato geometrico della derivata direzionale (I*); 14.1.3 Derivate parziali in un punto: D*** 14.1.3.1; significato geometrico della derivata parziale (I*); derivata parziale come derivata di una funzione di una variabile (T* 14.1.2.2 (I)); 14.1.4 Gradiente in un punto: D** 14.1.4.1; 14.1.5 Matrice jacobiana in un punto: D** 14.1.5.1; 14.1.6 Funzioni di classe C^1 su aperti: D* 14.1.6.1. **14.2 Estremanti relativi e gradiente:** 14.2.1 Estremanti relativi e gradiente: T*** 14.1.7.1 (e), 14.2.2 Punti critici: punto critico (D 14.2.2.1*); **14.3 Derivate parziali di ordine superiore:** 14.3.2 Classi di funzioni: D* 14.3.2.1, D 14.3.2.2, D 14.3.2.3; 14.3.3 Teorema di Schwarz: T*** 14.3.3.1 (e). **14.4 Differenziabilità:** 14.4.1 Funzione differenziabile in un punto: D*** 14.4.1.1, unicità della trasformazione lineare (T* 14.4.1.1 (e)); 14.4.2 Derivata di una funzione in un punto: D*** 14.4.2.1; 14.4.3 Differenziabilità e incremento: T*** 14.4.3.1 (e), T 14.4.3.2 (e); 14.4.6 Differenziabilità e continuità: T*** 14.4.6.1 (e); 14.4.7 Differenziabilità e derivate direzionali: T*** 14.4.7.1 (e); 14.4.8 Differenziabilità e derivate parziali: matrice di una trasformazione lineare (D**), espressione della matrice della derivata (T*** 14.4.8.1 (e)); 14.4.9 Differenziabilità per funzioni di una variabile: T* 14.4.9.1 (d); 14.4.10 Teorema del differenziale totale: T** 14.4.10.1 (e); 14.4.11 Differenziabilità della somma e del prodotto per uno scalare: T* 14.4.11.1 (I); 14.4.12 Differenziabilità per la funzione composta: T* 14.4.12.1 (I); derivata parziale di una funzione composta (T** 14.4.12.2 (e)); **14.5 Differenziabilità per funzioni scalari:** 14.5.1 Differenziabilità di una funzione scalare in un punto: differenziale di una funzione scalare in un punto (D*** 14.5.1.1); 14.5.2 Forme lineari: vettore associato ad una forma lineare (D*) 14.5.3 Vettore associato al differenziale: vettore associato al differenziale in un punto (T*** 14.5.3.1 (d)); espressione del valore del differenziale di una funzione in un punto (T*** 14.5.3.2 (d)); 14.5.4 Espressione canonica del differenziale: espressione canonica del differenziale (D*); **14.6 Teorema del valor medio:** 14.6.1 Segmento di \mathbf{R}^N : D** 14.6.1.1; 14.6.4 Funzioni con derivata nulla: T* 14.4.1.2 (e). **14.7 Diffeomorfismo:** 14.7.1 Omeomorfismo: D* 14.7.1.1; 14.7.2 Diffeomorfismo D* 14.7.2.1; 14.7.3 Derivata della funzione inversa: D* 14.7.3.1; 14.7.4 Teorema dell'invertibilità locale: teorema dell'invertibilità locale (e); 14.7.5 Coordinate polari piane: D** 14.7.5.1, T** 14.7.5.2, un diffeomorfismo relativo alle coordinate polari piane (T 14.7.5.3 (e)); 14.7.6 Coordinate sferiche in \mathbf{R}^3 : D** 14.7.6.1, T** 14.7.6.1; 14.7.7 Coordinate cilindriche in \mathbf{R}^3 : D1** 14.7.7.1; **14.8 Polinomio di Taylor:** 14.8.1 Forme bilineari: Forma bilineare (D*); 14.8.2 Differenziale secondo in un punto: D** 14.8.2.1; 14.8.3 Matrice hessiana di una funzione in un punto: D** 14.8.3.1; **14.9 Estremanti relativi e differenziale secondo:** 14.9.1 Forme bilineari simmetriche: Forme bilineari simmetriche (D**); 14.9.2 Forme bilineari simmetriche semidefinite e definite: D** 14.9.2.1; 14.9.3 Caratterizzazione delle forme bilineari semidefinite e definite: T** 14.9.3.1 (e); 14.9.4 Caratterizzazione delle forme bilineari definite: T** 14.9.4.1 (e); 14.9.5 Estremanti relativi e differenziale secondo: T** 14.9.5.1 (e).

15 Forme differenziali lineari

15.1 Forme differenziali lineari: 15.1.1 Forma differenziale lineare: D* 15.1.1.1, 15.1.2 Campo di vettori: D* 15.1.2.1; 15.1.3 Campo di vettori associato ad una 1-forma: T* 15.1.5.1 (e), D* 15.1.5.1, T* 15.1.5.2 (d); 15.1.4 Espressione canonica di una forma differenziale: espressione di una forma differenziale attraverso il campo associato e le forme differenziali dx_i (T** e D**); 15.1.5 Forma differenziale di classe C^p : forma differenziale continua (D 15.1.5.1), forma differenziale di classe C^p (D 15.1.5.2). **15.2 Forme differenziali esatte:** 15.2.1 Forme differenziali

chiuse: D*** 15.2.1.1, differenziale di una funzione come forma differenziale chiusa (T*** 15.2.1.1 (d)); 15.2.2 *Forme differenziali esatte*: primitiva di una forma differenziale (D*** 15.2.2.1), condizione affinché una funzione sia una primitiva di una forma differenziale (T*** 15.2.2.1(d)), forme differenziali esatte (D*** 15.2.2.2), condizioni affinché una forma differenziale sia esatta (T*** 15.2.2.2(d)); 15.2.3 *Campi di vettori esatti*: potenziale di un campo di vettori (D* 15.2.3.1), condizione affinché una funzione sia un potenziale di un campo di vettori (T 15.2.3.1 (d)), campi di vettori esatti (D*); condizione affinché un campo di vettori sia esatto (T* 15.2.3.2(d)); 15.2.4 *Forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse*: (T*** 15.2.4.1 (d)). **15.3 Integrali di forme differenziali su traiettorie**: 15.3.1 *Traiettoria*: D* 15.3.1.1, traccia di una traiettoria (D 15.3.1.2), punto iniziale e punto finale di una traiettoria (D* 15.3.1.3), traiettoria chiusa (D* 15.3.1.4), traiettoria in un insieme (D* 15.3.1.5), traiettoria di classe C^1 a tratti (D 15.3.1.6 (I)); 15.3.2 *Integrale di una forma differenziale su una traiettoria*: integrale curvilineo di una forma differenziale su una traiettoria di classe C^1 (D** 15.3.2.1); **15.4 Forme differenziali esatte e integrali su traiettorie**: 15.4.1 *Integrale del differenziale*: T** 15.4.1.1 (e); 15.4.2 *Integrale di una forma differenziale esatta*: integrale di una forma differenziale esatta su traiettorie con gli stessi estremi (T** 15.4.2.2(d); integrale di una forma differenziale esatta su una traiettoria chiusa (T** 15.4.2.3 (d)); una forma differenziale può essere chiusa senza essere esatta (T* (d)); 15.4.3 *Forme differenziali esatte e integrali su traiettorie*: (T** 15.4.3.1 (e)). **15.5 Teorema di Poincaré**: 15.5.1 *Insiemi stellati*: insieme stellato rispetto ad un punto (D** 15.5.1.1); insieme stellato (D** 15.5.1.2); 15.5.2 *Teorema di Poincaré*: T** 21.5.2.1 (e); 15.5.3 *Forme differenziali localmente esatte*: D 15.5.3.1, forme differenziali chiuse e forme differenziali localmente esatte (T 15.5.3.1 (d)).

16 Equazioni implicite

16.1 Funzioni implicite: 16.1.1 *Funzioni implicite in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$* : soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (D** 16.1.1.1); 16.1.2 *Soluzioni massimali*: D 16.1.2.1 (I); 16.1.3 *Problema implicito*: soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (T** 16.1.3.1 come definizione). **16.2 Funzioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$** : 16.2.1 *Funzioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$* : soluzione di un'equazioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$ (D 16.2.1.1 (I)). 16.2.4 *Problema implicito*: D (I). 16.3 **Teorema di Dini**: 16.3.1 *Teorema di Dini*: teorema di Dini (T 16.3.2.1 (I)), T** 16.3.1.2 (e).

17 Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N

17.1 Sottovarietà differenziali parametrizzabili: 17.1.1 *Varietà differenziali parametrizzabili di \mathbf{R}^N* : D* 17.1.1.1; 17.1.2 *Varietà lineari*: varietà lineari (T 17.1.2.1 (I)); 17.1.3 *Segmenti aperti*: segmenti aperti (T 17.1.3.1 (I)); 17.1.4 *Triangolo aperto*: T 17.1.4.1 (I); 17.1.5 *Simplesso aperto*: T 17.1.5.1 (I); 17.1.7 *Sottovarietà cartesiane*: T 17.1.7.1 (I), D 17.1.7.1 (I); 17.1.9 *Spazio tangente*: spazio tangente ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile (D* 17.1.9.1). **17.2 Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N** : 17.2.1 *Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N* : D 17.2.1.1 (I); 17.2.2 *Equazione cartesiana di una sottovarietà*: T 17.2.2.1 (I), sottovarietà definita da un'equazione $f(x) = 0$ (T 17.2.2.2 (e)); 17.2.3 *Spazio tangente*: spazio tangente ad una sottovarietà (D 17.2.3.1 (I)); 17.2.4 *Spazio normale*: spazio normale ad una varietà (D* 17.2.4.1), base per lo spazio normale (T 17.2.4.1 (I)); 17.2.5 *Varietà lineare tangente e varietà lineare normale*: varietà lineare tangente (D* 17.2.5.1), varietà lineare normale (D* 17.2.5.2). **17.3 Estremanti relativi su varietà**: 17.3.1 *Massimi e minimi vincolati*: massimi e minimi su varietà (T* 17.2.9.1 (e)); moltiplicatori di Lagrange (T* 21.2.9.2 (I)).

18. Equazioni differenziali

18.1 Equazioni differenziali del primo ordine: 18.1.1 *Equazione differenziale*: D 18.1.1.1, soluzione di un'equazione differenziale (D*** 18.1.1.); 18.1.2 *Soluzioni massimali*: D 18.1.2.1 (I); 18.1.3 *Equazione $y' = f(x)$* : T** 18.1.3.1 (d). **18.2 Equazione differenziale di forma normale**: 18.2.1 *Equazione differenziale di forma normale*: D** 18.5.1.1; soluzione di un'equazione differenziale di forma normale (T*** 18.2.1.1); 18.2.2 *Problema di Cauchy*: soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di forma normale (T*** 18.2.2.1); 18.2.3 *Problema di Cauchy per l'equazione $y' = f(x)$* : T** 18.2.3.1 (e). 18.2.4 *Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy*: esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T*** 18.2.4.1(e)). **18.3 Equazioni a variabili separate**: 18.3.1 *Equazioni a variabili separate*: D* 18.3.1.1, soluzione di un'equazioni a variabili separate (T* 18.3.1.1 (d)); 18.3.2 *Problema di Cauchy per equazioni a variabili separate*: risoluzione di un problema di Cauchy per un'equazione a variabili separate come soluzione di un'equazione implicita (T** 18.3.2.1 (e)). 18.3.3 *Equazioni a variabili separabili*: D 18.3.3.1, soluzioni costanti (T 18.3.3.1 (d)). **18.4 Sistema di equazioni differenziali del primo ordine**: 18.4.1 *Sistema di equazioni differenziali del primo ordine*: soluzione di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine (D 18.4.1.1); **18.5 Sistema di equazioni differenziali di forma normale**: 18.5.1 *Sistema di equazioni differenziali di forma normale*: D 18.5.1.1, T 18.5.1.1; 18.5.2 *Problema di Cauchy*: problema

di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali di forma normale (T 18.5.2.1); **18.5.3 Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy**: esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T 18.11.4.1 (e)). **18.6 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo**: **18.6.1 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo**: soluzione di un'equazione differenziale di ordine n (D 18.6.1.1); **18.6.2 Equivalenza fra equazione di ordine n e sistema di n equazioni del primo ordine**: equivalenza fra equazione di ordine n e sistema di n equazioni del primo ordine (T*); **18.7 Equazioni differenziali di ordine n di forma normale**: **18.7.1 Equazioni differenziali di ordine n di forma normale**: D 18.7.1.1, soluzione di un'equazione di ordine n di forma normale (T 18.7.1.1); **18.7.2 Problema di Cauchy relativo ad una equazione di ordine n** : D* 18.7.2.1, soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine n di forma normale (T 18.13.2.1); **18.7.3 Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy**: esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T 18.13.3.1 (e)). *appunti*: equazione $y^{(n)} = f(x)$ (I); *appunti*: equazione $F(x, y', y'') = 0$ (I).

19 Equazioni differenziali lineari

19.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine: **19.1.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine**: soluzione di un'equazioni differenziali lineari del primo ordine (D*** 19.1.1.1); **19.1.2 Insieme delle soluzioni**: T*** 19.1.2.1 (d), T** 19.1.2.2 (d); **19.1.3 Problema di Cauchy**: soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine (D** 19.1.3.1), espressione della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine (T** 19.1.3.1 (e)); **19.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari**: **19.2.1 Sistemi di equazioni differenziali lineari**: soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine (D* 19.2.1.1); **19.2.2 Problema di Cauchy**: soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di un sistema lineare (D* 19.2.2.1); **19.2.3 Teorema fondamentale sul Problema di Cauchy**: teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali lineari (T* 19.2.3.2 (e)); **19.2.4 Sistemi lineari omogenei**: D** 19.2.4.1, T* 19.2.4.1 (d), spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema omogeneo (T** 19.2.4.2(d)); **19.2.5 Dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo**: T** 19.2.5.1 (e); **19.2.8 Sistema fondamentale ed integrale generale**: sistema fondamentale di soluzioni (D** 19.2.8.1); integrale generale (D** 19.2.8.2); **19.2.9 Sistema omogeneo a coefficienti costanti**: soluzioni reali e soluzioni complesse (D); **19.2.10 Autovalori e autovettori**: D 19.2.10.1, D* 19.2.10.2, T* 19.2.10.1, D* 19.2.10.3, T 19.2.10.2, T 19.2.10.3; **19.2.11 Sistemi a coefficienti costanti e autovalori**: condizione affinché $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ sia una soluzione del sistema omogeneo (T* 19.2.12.1(d)), condizione affinché $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ sia una soluzione non nulla del sistema omogeneo (T* 19.2.12.2 (d)); sistema fondamentale di soluzioni nel caso della matrice diagonalizzabile (T* 19.2.11.3 (e)); **19.2.13 Sistemi lineari non omogenei**: T** 19.2.13.1 (e); **19.3 Equazioni differenziali lineari di ordine n** : **19.3.1 Equazioni differenziali lineari di ordine n globali**: soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine n (D*** 19.3.1.1); **19.3.2 Equivalenza fra equazione lineare di ordine n e sistema lineare di n equazioni del primo ordine**: equivalenza fra equazione lineare di ordine n e sistema lineare di n equazioni del primo ordine; **19.3.3 Problema di Cauchy**: soluzione di un problema di Cauchy (D** 19.3.3.1), **19.3.4 Teorema fondamentale sul Problema di Cauchy**: esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari di ordine n (T** 19.3.4.1 (e)); **19.3.5 Equazioni lineari omogenee di ordine n** : D** 19.3.5.1, spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (T***); **19.3.6 Dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea**: T*** 19.3.6.1 (e); **19.3.9 Sistema fondamentale ed integrale generale**: sistema fondamentale di soluzioni (D** 19.3.9.1); integrale generale (D** 19.3.9.2); **19.3.10 Equazione omogenea a coefficienti costanti**: soluzioni reali e soluzioni complesse (D); **19.3.11 Equazione caratteristica**: condizione affinché $e^{\lambda x}$ sia una soluzione dell'equazione omogenea (T** 19.3.11.1(d)); equazione caratteristica (D***); **19.3.12 Sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione a coefficienti costanti**: sistema fondamentale di soluzioni nel caso di radici distinte dell'equazione caratteristica (T* 19.3.12.1 (e)); sistema fondamentale di soluzioni nel caso di radici multiple dell'equazione caratteristica (T** 19.3.12.2 (e)); **19.3.13 Equazioni a coefficienti costanti reali**: sistema fondamentale di soluzioni per le equazioni a coefficienti costanti reali (T** (e)) **19.3.14 Equazioni lineari non omogenee**: T*** 19.3.14.1 (e); **19.3.15 Integrali particolari ed esponenziali**: T 19.3.15.1 (e), T 19.3.15.2 (I), T 19.3.15.3 (e), T 19.3.15.4 (I).

20 Integrale di Riemann su intervalli di \mathbf{R}^N

20.1 Intervalli di \mathbf{R}^N : **20.1.1 Intervalli di \mathbf{R}^N** : intervallo di \mathbf{R}^N (D* 20.1.1.1) D 20.1.1.2; **20.1.2 Misura di un intervallo**: D** 20.1.3.1, D** 20.1.3.2. **20.2 Insiemi di misura nulla**: **20.2.1 Insiemi equipotenti**: insiemi equipotenti (D); **20.2.2 Insiemi numerabili**: insiemi numerabili (D); **20.2.3 Somma di una famiglia numerabile di numeri reali positivi**: somma di una famiglia numerabile di numeri reali positivi (D); **20.2.4 Insiemi di misura nulla**: D* 20.1.4.1; **20.2.5 Definizione di quasi dappertutto**: D* 20.2.8.1; **20.3 Funzioni di Riemann**: **20.3.1 Funzioni continue quasi dappertutto**: D* 20.3.1.1; **20.3.2 Funzioni di Riemann**: D** 20.3.2.1; **20.4 Integrale secondo Riemann su un intervallo**: **20.4.1 Scomposizione di un intervallo**: D** 20.4.1.1; **20.4.2 Somme superiori**

e somme inferiori: D*** 20.4.3.1. **20.4.3 Integrale superiore e integrale inferiore:** D*** 20.4.3.1, relazione fra integrale inferiore ed integrale superiore (T* 20.4.4.1 (e)); **20.4.4 Somme e funzioni di Riemann:** T** 20.4.5.1 (e); **20.4.5 Integrale:** integrale di una funzione di Riemann su un intervallo (D*** 20.4.5), significato geometrico di integrale (I**); **20.4.7 Somme di Riemann:** scelta relativa ad una scomposizione (D* 20.4.7.1); somme di Riemann (D** 20.4.7.2), **20.4.8 Integrale come limite delle somme di Riemann rispetto all'orientazione $\delta \rightarrow 0$:** T 20.4.8.1 come proprietà di una funzione di Riemann (I); **20.4.9 Proprietà dell'integrale:** Linearità dell'integrale (T* 20.4.9.1 (e)), positività dell'integrale (T* 20.4.9.2 (e)), monotonia dell'integrale (T* 20.4.9.3 (e)), integrale di funzioni uguali quasi dappertutto (T* 20.4.9.4 (e)), valore assoluto di un integrale (T* 20.4.9.5 (e)), teorema di media integrale (T* 20.4.9.6 (e)), teorema di media integrale per funzioni continue (T* 20.4.9.7 (e)), additività dell'integrale (T* 20.4.9.8 (e)). **20.5 Integrale su intervalli di \mathbf{R} :** **20.5.1 Integrale da x a y :** integrale di Riemann da x a y (D* 20.5.1.1); **20.5.2 Funzione integrale:** D*** 20.5.2.1; **20.5.3 Continuità della funzione integrale:** T* 20.5.3.1 (e); **20.5.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale:** T*** 20.5.4.2 (d); **20.5.5 Formula di Leibniz-Newton:** T*** 20.5.5.1 (d), integrale di una funzione continua come variazione di una primitiva (corso di Analisi I) come integrale di Riemann da x a y (corso di Analisi II) (T* 20.5.5.2(d)); **20.5.6 Alcune derivate di integrali:** deriva di $\int_x^{x_0} f$ (T (d)). **20.6 Integrale sul prodotto di due intervalli:** **20.6.1 Integrale sul prodotto di due intervalli:** T* 20.6.1.1 **20.6.2 Integrale di un prodotto:** T 20.6.2.1 (I).

21 Integrale di Lebesgue in \mathbf{R}^N

21.1 Integrale di una funzione continua positiva su un compatto: **21.1.1 Integrale di una funzione continua su un compatto:** D* 21.1.1.1; **21.2 Insiemi misurabili:** **21.2.1 Insiemi misurabili:** D* 21.2.1.1; **21.3 Funzioni misurabili secondo Lebesgue:** **21.3.1 Funzioni misurabili:** D* 21.3.1.1, D* 21.3.1.2; **21.3.4 Parte positiva e parte negativa:** D* 21.3.4.1, T 21.3.4.1 (e), D* 21.3.4.3, T 21.3.4.2 (e), T 21.3.4.3 (e); **21.4 Integrale di funzioni misurabili positive:** **21.4.1 Integrale di una funzione misurabile positiva:** D* 21.4.1.1; **21.4.2 Integrale di una funzione misurabile positiva a valori in \mathbf{R} :** D 21.4.2.1; **21.4.3 Integrali di funzioni positive convergenti:** D* 21.4.3.1; **21.4.5 Additività numerabile dell'integrale di funzioni positive:** T 21.4.5.1 (e); **21.5 Misura di un insieme misurabile:** **21.5.1 Misura di un insieme misurabile:** D** 21.5.1.1; **21.5.2 Insiemi integrabili:** D* 21.5.2.1. **21.7 Limite sotto il segno di integrale:** **21.7.2 L'integrale di Riemann come integrale di Lebesgue:** T 21.7.2.1 (I); **21.7.3 Integrali impropri e integrali di Lebesgue di funzioni misurabili positive:** T 21.7.3.1 (I); **21.8 Integrale sul prodotto di insiemi misurabili:** **21.8.2 Integrale di una funzione definita quasi dappertutto:** integrale di una funzione definita quasi dappertutto (D); **21.8.3 Integrale sul prodotto di due insiemi misurabili:** T** 21.8.3.1 (e); **21.8.4 Proiezioni in un prodotto cartesiano:** D 21.8.4.1; **21.8.5 Immagine di un punto in un grafico:** D* 21.8.5.1; **21.8.6 Funzioni $F(x, \cdot)$ e $F(\cdot, y)$:** D 21.8.6.1; **21.8.7 Integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano:** T** 21.8.7.1 (e); **21.8.8 Formule di riduzione per gli integrali doppi:** T*** 21.8.8.1 (d), T*** 21.8.8.2 (d); **21.8.9 Formule di riduzione per gli integrali tripli:** T*** 21.8.9.1 (d), T*** 21.8.9.2 (d). **21.9 Cambiamento di variabile negli integrali:** **21.9.1 Cambiamento di variabile negli integrali su insiemi misurabili:** T*** 21.11.2.1 (e); **21.9.2 Parametrizzazione in misura:** D 21.11.3.1 (I); **21.10 Funzioni integrabili secondo Lebesgue:** **21.10.1 Funzioni integrabili secondo Lebesgue:** D* 21.12.1.1, T** 21.12.1.2 (d); **21.10.2 Criterio di integrabilità:** T 21.10.2.1 (e); **21.10.3 Integrale di una funzione integrabile:** T 21.10.3.1 (e), D* 21.10.3.1. **21.11 Applicazioni geometriche:** **21.11.1 Area della regione limitata da un'ellisse:** D 21.11.1.1, T* 21.11.1.1 (d); **21.11.2 Volume della regione limitata da un'ellissoide:** D 21.11.2.1.1, T* 21.11.1.1 (d); **21.11.4 Volume del cono:** D* 21.13.4.1, T* 21.13.4.1 (d); **21.11.5 Volumi di solidi di rotazione:** D* 21.11.5.1, volume di un solido di rotazione (T*(d)); **21.11.6 Baricentro:** D 21.11.6.1; **21.11.7 Teorema di Guldino:** T 21.13.7.1 (d).

22 Integrazione di funzioni su sottovarietà di \mathbf{R}^N

22.1 Graamiano di m vettori: **22.1.1 Graamiano di m vettori:** D* 22.1.1.1; **22.1.2 Quadrato simbolico di una matrice:** D* 22.1.2.1, graamiano e quadrato simbolico (T* 22.1.2.1 (e)); **22.1.3 Prodotto vettoriale di $n - 1$ vettori:** D* 22.1.3.1; T 22.1.3.2 (e), prodotto vettoriale e graamiano (T* 22.1.3.3 (e)); **22.2 Integrazione su sottovarietà parametrizzabili:** **22.2.2 Integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile:** D** 22.2.3; **22.2.3 Integrale curvilineo:** integrali curvilinei di funzioni (T*** 22.2.3.1 (d)); **22.2.4 Integrale di superficie:** simboli di Gauss E, F, G (D*** 22.2.4.1), integrali di superficie di funzioni (T*** 22.2.4.1(d)); **22.2.5 Integrale di ipersuperficie:** T* 22.2.5.1; **22.2.6 Integrale su una ipersuperficie cartesiana:** integrale di funzioni su una varietà cartesiana (T** 22.2.6.1 (e)); **22.2.7 Misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile:** misura di un sottoinsieme misurabile di una varietà parametrizzabile (D*** 22.2.7.1); **22.2.8 Funzioni integrabili su sottoinsiemi di una sottovarietà parametrizzabile:** funzione integrabile secondo Lebesgue su un sottoinsieme di una varietà parametrizzabile e integrale di una funzione integrabile su un sottoinsieme di una varietà parametrizzabile

(D 22.2.8.1) (I). **Applicazioni geometriche:** area di una superficie sferica (T*, lezione), area di una superficie di rotazione (D, T*, lezione), teorema di Guldino per le superfici di rotazione (T (d), lezione).

23 Integrale di forme differenziali

23.1 Relazione di equivalenza: 23.1.0 *Relazione di equivalenza:* relazione di equivalenza (D); 23.1.1 *Classi d'equivalenza:* classi d'equivalenza (D); 23.1.2 *Insieme quoziente:* insieme quoziente (D). **23.2 Spazi vettoriali orientati:** 23.2.1 *Orientazione di uno spazio vettoriale:* basi equivalenti (D* 23.2.1.1), D 23.2.1.2, spazi vettoriali orientati (D), orientazione canonica di \mathbf{R}^N (D*). **23.3 Sottovarietà parametrizzabili orientate** 23.3.1 *Sottovarietà parametrizzabile orientata:* parametrizzazioni equivalenti (D); orientazione di una varietà parametrizzabile (D); varietà parametrizzabile orientata (D); 23.3.2 *Orientazione dello spazio tangente:* D* 23.3.2.1; 23.3.3 *Versore tangente:* D* 23.3.3.1, espressione del versore tangente (T* 23.3.3.1 (d)); 23.3.4 *Orientazione dello spazio normale:* D* 23.3.4.1; 23.3.5 *Versore normale:* D* 23.3.5.1, espressione del versore normale (T* 23.3.5.1 (d)). 23.3.7 *Sottovarietà orientabile:*(I). **23.4 Gli spazi vettoriali $A_m(\mathbf{R}^N)$:** 23.4.3 *Forme multilineari:* D 19.18.1.1; 23.4.4 *Forme multilineari alternanti:* definizione di forma m -lineare alternante (D), prodotto esterno di m forme lineari (D); 23.4.5 *Lo spazio vettoriale $A_m(\mathbf{R}^n; R)$:* base dello spazio vettoriale delle forme m -lineari alternanti (T 23.4.5.1 (e)); 23.4.6 *Base di $A_n(\mathbf{R}^n)$:* T 23.4.6.1 (d), D 23.4.6.1; 23.4.7 *Base di $A_{n-1}(\mathbf{R}^n; R)$:* le $n - 1$ -forme lineari \hat{p}_i (D), T 23.4.7.1 (e), base canonica complementare di $A_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ D 23.4.7.1. **23.5 m -forme differenziali:** 23.5.1 *m -forma differenziale:* D* 23.1.1; 23.5.2 *Espressione di una m -forma differenziale:* espressione di una m -forma attraverso le forme differenziali dx_i (T* (d)); 23.5.3 *Funzione associata ad una N -forma:* funzione associata ad una N -forma (D); 23.5.4 *Famiglia complementare associata a una $N - 1$ -forma:* le $N - 1$ -forme \hat{dx}_i (D), espressione di una $N - 1$ forma attraverso le \hat{dx}_i (T (d)), campo di vettori complementare associato a una $N - 1$ -forma (D); 23.5.5 *Campo di vettori complementare per $N = 3$:* **23.6 Integrale su una sottovarietà parametrizzabile:** 23.6.2 *Integrale di una m -forma:* T** 23.6.2.1; 23.6.3 *Integrale di una 1-forma:* T*** 23.6.3.1 (d); 23.6.4 *Integrale di una 2-forma:* T** 23.1.7.1 (d); 23.6.6 *Varietà differenziali di dimensione N :* varietà differenziali di dimensione N (T,I), orientazione canonica di un aperto di \mathbf{R}^N (D, I); 23.6.7 *Integrale di una N -forma:* T 23.6.7.1 (d); **23.9 Lavoro di un campo di vettori:** 23.9.1 *Lavoro di un campo di vettori:* D* 23.9.1.1; 23.9.2 *Lavoro di un campo di vettori e forma differenziale associata al campo:* T* 23.9.2.1 (d)). **23.10 Flusso di un campo di vettori:** 23.10.1 *Flusso di un campo di vettori:* D* 23.10.1.1; 23.10.2 *Flusso di un campo di vettori e forma differenziale associata in modo complementare al campo:* T* 23.10.2.1 (e).

24 Teorema di Stokes su sottovarietà con bordo

24.1 Orientazione indotta sul bordo: 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo:* orientazione indotta sul bordo (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 1:* orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 1 (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 2:* orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 2 (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di un dominio regolare:* orientazione indotta sul bordo di un dominio regolare. **24.2 Differenziale esterno di una m -forma:** 24.2.1 *Differenziale esterno di una m -forma:* D* 24.2.1.1. **24.3 Teorema di Stokes:** 24.3.1 *Teorema di Stokes:* T** 24.3.1.1 (e); 24.3.2 *Teorema di Stokes applicato alle sottovarietà di dimensione 1:* T* 24.3.2.1 (e, I); T* 24.3.2.2 (e, I) 24.3.3 *Formula di Green nel piano:* T* 24.3.3.1 (d); 24.3.4 *Rotore di un campo:* T* 24.3.3.1 (d), D* 24.3.4.1; 24.3.5 *Formula di Stokes per superfici di \mathbf{R}^3 :* T* 24.3.5.1 (d); 24.3.6 *Divergenza di un campo di vettori:* T* 24.3.6.1 (e), D* 24.3.6.1; 24.3.7 *Teorema della divergenza* T* 24.3.7.1 (e). 24.3.8 *Misura di domini regolari:* T 24.3.8.1 (e).