

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA L-B

Corsi di Laurea in Ing. Civile (L-Z), Ing. Gestionale (A-K), Ing. dei Processi Gestionali (A/K)
(Prof. Ravaglia)

Anno Accademico 2005/06

Simboli: I= introduzione intuitiva, D = definizione, T = teorema C = criterio deduttivo, d = dimostrazione, e = enunciato, A = assioma. Le indicazioni numeriche si riferiscono al testo Carlo Ravaglia: Analisi Matematica II. Ad esempio l'indicazione "21.1.2 Derivata direzionale: D1" significa la definizione 1 di della sottosezione (21.1.2) intitolata "Derivata direzionale" del volume Analisi Matematica II. Quando la definizione o il teorema è indicato attraverso una frase il riferimento viene messo fra parentesi. La presenza di asterischi segnala l'importanza dell'argomento; maggiore ne è il numero e più l'argomento è importante.

Presupposti di Analisi Matematica I e di Geometria

Tutti gli argomenti dei corsi di Analisi Matematica I e di Geometria aventi riferimento con argomenti del corso di Analisi Matematica II.

14 Calcolo differenziale in \mathbf{R}^N

14.1 Derivate parziali: 14.1.2 Derivata direzionale: D*** 14.1.2.1; significato geometrico della derivata direzionale (I*); 14.1.3 Derivate parziali in un punto: D*** 14.1.3.1; significato geometrico della derivata parziale (I*); 14.1.4 Gradiente in un punto: D** 14.1.4.1; 14.1.5 Matrice jacobiana in un punto: D** 14.1.5.1; 14.1.6 Funzioni di classe C^1 su aperti: D* 14.1.6.1. **14.2 Estremanti relativi e gradiente:** 14.2.1 Estremanti relativi e gradiente: T*** 14.1.7.1 (d), 14.2.2 Punti critici: punto critico (D 14.2.2.1*); **14.3 Derivate parziali di ordine superiore:** 14.3.2 Classi di funzioni: funzioni di classe C^n (I); 14.3.3 Teorema di Schwarz: T*** 14.3.3.1 (e). **14.4 Differenziabilità:** 14.4.1 Funzione differenziabile in un punto: D*** 14.4.1.1; 14.4.2 Derivata di una funzione in un punto: definizione di trasformazione lineare da \mathbf{R}^N a \mathbf{R}^M (D***), D*** 14.4.2.1; 14.4.3 Differenziabilità e incremento: T*** 14.4.3.1 (d), T 14.4.3.2 (e); 14.4.4 Differenziabilità e continuità: T*** 14.4.4.1 (e); 14.4.5 Differenziabilità e derivate direzionali: T*** 14.4.5.1 (e); 14.4.6 Differenziabilità e derivate parziali: matrice di una trasformazione lineare (D**), espressione della matrice della derivata (T*** 14.4.6.1 (e)); 14.4.7 Differenziabilità per funzioni di una variabile: T* 14.4.7.1 (e); 14.4.8 Teorema del differenziale totale: T** 14.4.8.1 (e); 14.4.9 Differenziabilità della somma e del prodotto per uno scalare: T 14.4.9.1 (I); 14.4.10 Differenziabilità per la funzione composta: T** 14.4.10.1 (I); derivata parziale di una funzione composta (T** 14.4.10.2 (e)); **14.5 Differenziabilità per funzioni scalari:** 14.5.1 Differenziabilità di una funzione scalare in un punto: differenziale di una funzione scalare in un punto (D*** 14.5.1.1); 14.5.2 Forme lineari: vettore associato ad una forma lineare (D*), base canonica di $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ (D*); espressione di una forma lineare come combinazione lineare delle proiezioni (T); 14.5.3 Vettore associato al differenziale: espressione del valore del differenziale di una funzione in un punto (T*** 14.5.3.1 (d)), vettore associato al differenziale in un punto (T** 14.5.3.2 (d)), gradiente come vettore ortogonale alle ipersuperfici di livello (I); espressione del differenziale come combinazione lineare delle proiezioni (T (14.5.3.3)). 14.5.4 Espressione canonica del differenziale: espressione canonica del differenziale (D*); **14.6 Teorema del valor medio:** 14.6.1 Segmento di \mathbf{R}^N : D** 14.6.1.1; 14.6.4 Funzioni con derivata nulla: T* 14.4.1.2 (e). **14.7 Diffeomorfismo:** 14.7.1 Omeomorfismo: D* 14.7.1.1; 14.7.2 Diffeomorfismo D* 14.7.2.1; 14.7.3 Derivata della funzione inversa: D* 14.7.3.1; 14.7.4 Teorema dell'invertibilità locale: teorema dell'invertibilità locale (T* 14.7.4.1 (e)); 14.7.5 Coordinate polari piane: D** 14.7.5.1, T* 14.7.5.2, un diffeomorfismo relativo alle coordinate polari piane (T 14.7.5.3 (e)); 14.7.6 Coordinate sferiche in \mathbf{R}^3 : D** 14.7.6.1, T* 14.7.6.1; 14.7.7 Coordinate cilindriche in \mathbf{R}^3 : D1* 14.7.7.1; **14.8 Estremanti relativi e differenziale secondo:** 14.8.1 Forme bilineari: Forma bilineare (D* 14.8.1.1), matrice di una forma bilineare (T* 14.8.1.1); 14.8.2 Differenziale secondo in un punto: D** 14.8.2.1; 14.8.3 Matrice hessiana di una funzione in un punto: D** 14.8.3.1; 14.8.4 Forme bilineari simmetriche: Forme bilineari simmetriche (D**); 14.8.5 Forme bilineari simmetriche semidefinite e definite: D** 14.8.5.1; 14.8.6 Caratterizzazione delle forme bilineari semidefinite e definite: T*** 14.8.6.1 (e); 14.8.7 Caratterizzazione delle forme bilineari definite: T*** 14.8.7.1 (e); 14.8.8 Estremanti relativi e differenziale secondo: T** 14.8.8.1 (e).

15 Forme differenziali lineari

15.1 Forme differenziali lineari: 15.1.1 Forma differenziale lineare: D* 15.1.1.1, 15.1.2 Campo di vettori: D* 15.1.2.1; 15.1.3 Campo di vettori associato ad una 1-forma: T* 15.1.3.1 (e), D* 15.1.3.1, T* 15.1.3.2 (d); 15.1.4 Espressione canonica di una forma differenziale: espressione di una forma differenziale attraverso il campo associato

e le forme differenziali dx_i (T^{**} e D^{**}); 15.1.5 *Forma differenziale di classe C^p* : forma differenziale continua (D 15.1.5.1), forma differenziale di classe C^p (D 15.1.5.2). **15.2 Forme differenziali esatte**: 15.2.1 *Forme differenziali chiuse*: D^{***} 15.2.1.1, differenziale di una funzione come forma differenziale chiusa (T^{***} 15.2.1.1 (d)); 15.2.2 *Forme differenziali esatte*: primitiva di una forma differenziale (D^{***} 15.2.2.1), condizione affinché una funzione sia una primitiva di una forma differenziale (T^{***} 15.2.2.1(d)), forme differenziali esatte (D^{***} 15.2.2.2), condizioni affinché una forma differenziale sia esatta (T^{***} 15.2.2.2(d)); 15.2.3 *Campi di vettori esatti*: potenziale di un campo di vettori (D^* 15.2.3.1), condizione affinché una funzione sia un potenziale di un campo di vettori (T 15.2.3.1 (d)), campi di vettori esatti (D^* 15.2.3.2); condizione affinché un campo di vettori sia esatto (T^* 15.2.3.2(d)); 15.2.4 *Forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse*: (T^{***} 15.2.4.1 (d)). 15.2.5 *Insieme delle primitive*: (T 15.2.5.2 (e)). **15.3 Integrali di forme differenziali su traiettorie**: 15.3.1 *Traiettoria*: D^* 15.3.1.1, traccia di una traiettoria (D 15.3.1.2), punto iniziale e punto finale di una traiettoria (D^* 15.3.1.3), traiettoria chiusa (D^* 15.3.1.4), traiettoria in un insieme (D^* 15.3.1.5), traiettoria di classe C^1 (D^* 15.3.1.6); traiettoria di classe C^1 a tratti (D 15.3.1.7 (I)); 15.3.2 *Integrale di una forma differenziale su una traiettoria*: integrale curvilineo di una forma differenziale su una traiettoria di classe C^1 (D^{**} 15.3.2.1); **15.4 Forme differenziali esatte e integrali su traiettorie**: 15.4.1 *Integrale del differenziale*: T^{**} 15.4.1.1 (d); 15.4.2 *Integrale di una forma differenziale esatta*: T^* 15.4.2.1, integrale di una forma differenziale esatta su traiettorie con gli stessi estremi (T^{**} 15.4.2.2(d); integrale di una forma differenziale esatta su una traiettoria chiusa (T^{**} 15.4.2.3 (d)); una forma differenziale può essere chiusa senza essere esatta (T^* (d)); 15.4.3 *Forme differenziali esatte e integrali su traiettorie*: (T^{**} 15.4.3.1 (e)). **15.5 Teorema di Poincaré**: 15.5.1 *Insiemi stellati*: insieme stellato rispetto ad un punto (D^{**} 15.5.1.1); insieme stellato (D^{**} 15.5.1.2); 15.5.2 *Teorema di Poincaré*: T^{**} 15.5.2.1 (e); 15.5.3 *Forme differenziali localmente esatte*: D 15.5.3.1, forme differenziali chiuse e forme differenziali localmente esatte (T 15.5.3.1 (d)).

16 Equazioni implicite

16.1 Funzioni implicite: 16.1.1 *Funzioni implicite in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$* : soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (D^{**} 16.1.1.1); 16.1.2 *Soluzioni massimali*: D^* 16.1.2.1; 16.1.3 *Problema implicito*: soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (D^{**} 16.1.3.1). **16.2 Funzioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$** : 16.2.1 *Funzioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$* : soluzione di un'equazioni implicite in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$ (D^* 16.2.1.1). 16.2.2 *Problema implicito*: D. 16.3 **Teorema di Dini**: 16.3.1 *Teorema di Dini*: teorema di Dini (T^* 16.3.2.1 (e), T^{**} 16.3.1.2 (e)).

17 Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N

17.1 Sottovarietà differenziali parametrizzabili: 17.1.1 *Varietà differenziali parametrizzabili di \mathbf{R}^N* : D^* 17.1.1.1; 17.1.2 *Varietà lineari*: varietà lineari (T 17.1.2.1 (e)); 17.1.3 *Segmenti aperti*: segmenti aperti (T 17.1.3.1 (e)); 17.1.4 *Triangolo aperto*: T 17.1.4.1 (e); 17.1.5 *Simplesso aperto*: T 17.1.5.1 (e); 17.1.7 *Sottovarietà cartesiane*: T 17.1.7.1 (e); 17.1.9 *Spazio tangente*: spazio tangente ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile (D^* 17.1.9.1). **17.2 Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N** : 17.2.1 *Sottovarietà differenziali di \mathbf{R}^N* : D 17.2.1.1; 17.2.2 *Equazione cartesiana di una sottovarietà*: T^* 17.2.2.1 (e), sottovarietà definita da un'equazione $f(x) = 0$ (T^* 17.2.2.2 (e)); 17.2.3 *Spazio tangente*: spazio tangente ad una sottovarietà (D 17.2.3.1); 17.2.4 *Spazio normale*: spazio normale ad una varietà (D^* 17.2.4.1), base per lo spazio normale (T^* 17.2.4.1); 17.2.5 *Varietà lineare tangente e varietà lineare normale*: varietà lineare tangente (D^* 17.2.5.1), varietà lineare normale (D^* 17.2.5.2). **17.3 Estremanti relativi su varietà**: 17.3.1 *Massimi e minimi vincolati*: massimi e minimi su varietà (T^* 17.2.9.1 (e)); moltiplicatori di Lagrange (T^* 21.2.9.2 (e)).

18. Equazioni differenziali

18.1 Equazioni differenziali del primo ordine: 18.1.1 *Equazione differenziale*: soluzione di un'equazione differenziale (D^{***} 18.1.1.1); 18.1.2 *Soluzioni massimali*: D^* 18.1.2.1; 18.1.3 *Equazione $y' = f(x)$* : T^{**} 18.1.3.1 (d). **18.2 Equazione differenziale di forma normale**: 18.2.1 *Equazione differenziale di forma normale*: D^{**} 18.5.1.1; soluzione di un'equazione differenziale di forma normale (T^{***} 18.2.1.1); 18.2.2 *Problema di Cauchy*: soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di forma normale (T^{***} 18.2.2.1); 18.2.3 *Problema di Cauchy per l'equazione $y' = f(x)$* : T^{**} 18.2.3.1 (e). 18.2.4 *Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy*: esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T^{***} 18.2.4.1(e)). **18.3 Equazioni a variabili separate**: 18.3.1 *Equazioni a variabili separate*: D^* 18.3.1.1, soluzione di un'equazioni a variabili separate (T^* 18.3.1.1 (d)); 18.3.2 *Problema di Cauchy per equazioni a variabili separate*: risoluzione di un problema di Cauchy per un'equazione a variabili separate come soluzione di un'equazione implicita (T^{**} 18.3.2.1 (e)). 18.3.3 *Equazioni a variabili separabili*: D 18.3.3.1, soluzioni costanti (T^* 18.3.3.1 (d)). **18.4 Sistema di equazioni differenziali**

del primo ordine: 18.4.1 *Sistema di equazioni differenziali del primo ordine:* soluzione di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine (D* 18.4.1.1); **18.5 Sistema di equazioni differenziali di forma normale:** 18.5.1 *Sistema di equazioni differenziali di forma normale:* D* 18.5.1.1, T* 18.5.1.1; 18.5.2 *Problema di Cauchy:* problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali di forma normale (D* 18.5.2.1); 18.5.3 *Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy:* esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T* 18.11.4.1 (e)). **18.6 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo:** 18.6.1 *Equazioni differenziali di ordine superiore al primo:* soluzione di un'equazione differenziale di ordine n (D* 18.6.1.1); 18.6.2 *Equivalenza fra equazione di ordine n e sistema di n equazioni del primo ordine:* equivalenza fra equazione di ordine n e sistema di n equazioni del primo ordine (T*); **18.7 Equazioni differenziali di ordine n di forma normale:** 18.7.1 *Equazioni differenziali di ordine n di forma normale:* soluzione di un'equazione di ordine n di forma normale (D* 18.7.1.1); 18.7.2 *Problema di Cauchy relativo ad una equazione di ordine n :* soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine n di forma normale (D* 18.13.2.1); 18.7.3 *Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy:* esistenza ed unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy (T* 18.13.3.1 (e)). 18.7.5: *Equazione $y^{(n)} = f(x)$:* metodi per risolvere problemi di Cauchy (I); 18.7.6: *Equazione $F(x, y', y'') = 0$:* metodi per risolvere problemi di Cauchy (I).

19 Equazioni differenziali lineari

19.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine: 19.1.1 *Equazioni differenziali lineari del primo ordine:* soluzione di un'equazioni differenziali lineari del primo ordine (D*** 19.1.1.1); 19.1.2 *Insieme delle soluzioni:* T*** 19.1.2.1 (d), T** 19.1.2.2 (d); 19.1.3 *Problema di Cauchy:* soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine (D** 19.1.3.1), espressione della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine (T** 19.1.3.1 (e)); **19.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari:** 19.2.1 *Sistemi di equazioni differenziali lineari:* soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine (D* 19.2.1.1); 19.2.2 *Problema di Cauchy:* soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di un sistema lineare (D* 19.2.2.1); 19.2.3 *Teorema fondamentale sul Problema di Cauchy:* teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali lineari (T* 19.2.3.2 (e)); 19.2.4 *Sistemi lineari omogenei:* D** 19.2.4.1; 19.2.5 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni:* , T* 19.2.5.1 (d), spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema omogeneo (T** 19.2.5.2(d)); 19.2.6 *Dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:* T** 19.2.6.1 (e); 19.2.9 *Sistema fondamentale ed integrale generale:* sistema fondamentale di soluzioni (D** 19.2.9.1); integrale generale (D** 19.2.9.2); 19.2.10 *Sistema omogeneo a coefficienti costanti:* soluzioni reali e soluzioni complesse (D); 19.2.11 *Autovalori e autovettori:* D 19.2.11.1, D* 19.2.11.2, T* 19.2.11.1, D* 19.2.11.3, T 19.2.11.2, T 19.2.11.3; 19.2.12 *Sistemi a coefficienti costanti e autovalori:* condizione affinché $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ sia una soluzione del sistema omogeneo (T* 19.2.12.1(d)), condizione affinché $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ sia una soluzione non nulla del sistema omogeneo (T* 19.2.12.2 (d)); sistema fondamentale di soluzioni nel caso della matrice diagonalizzabile (T* 19.2.12.3 (e)); 19.2.13 *Sistemi omogenei a coefficienti costanti reali:* sistema fondamentale di soluzioni reale a partire da un sistema fondamentale di soluzioni complesso (T) (e); 19.2.14 *Sistemi lineari non omogenei:* T** 19.2.14.1 (e); **19.3 Equazioni differenziali lineari di ordine n :** 19.3.1 *Equazioni differenziali lineari di ordine n :* soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine n (D*** 19.3.1.1); 19.3.2 *Equivalenza fra equazione lineare di ordine n e sistema lineare di n equazioni del primo ordine:* equivalenza fra equazione lineare di ordine n e sistema lineare di n equazioni del primo ordine (T) (e); 19.3.3 *Problema di Cauchy:* soluzione di un problema di Cauchy (D** 19.3.3.1), 19.3.4 *Teorema fondamentale sul Problema di Cauchy:* esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari di ordine n (T** 19.3.4.1 (e)); 19.3.5 *Equazioni lineari omogenee di ordine n :* D** 19.3.5.1; 19.3.6 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni:* T** 19.3.6.1, spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (T*** 19.3.6.2); 19.3.7 *Dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea:* T*** 19.3.7.1 (e); 19.3.10 *Sistema fondamentale ed integrale generale:* sistema fondamentale di soluzioni (D** 19.3.10.1); integrale generale (D** 19.3.10.2); 19.3.11 *Equazione omogenea a coefficienti costanti:* soluzioni reali e soluzioni complesse (D); 19.3.12 *Equazione caratteristica:* condizione affinché $e^{\lambda x}$ sia una soluzione dell'equazione omogenea (T** 19.3.12.1(d)); equazione caratteristica (D***); 19.3.13 *Sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione a coefficienti costanti:* sistema fondamentale di soluzioni nel caso di radici distinte dell'equazione caratteristica (T* 19.3.13.1 (e)); sistema fondamentale di soluzioni nel caso di radici multiple dell'equazione caratteristica (T** 19.3.13.2 (e)); 19.3.14 *Equazioni a coefficienti costanti reali:* sistema fondamentale di soluzioni per le equazioni a coefficienti costanti reali (T** (e)) 19.3.15 *Equazioni lineari non omogenee:* T*** 19.3.15.1 (e); 19.3.16 *Integrali particolari ed esponenziali:* T* 19.3.16.1 (e), T* 19.3.16.2 (I), T* 19.3.16.3 (e), T* 19.3.16.4 (I).

20 Integrale di Riemann su intervalli di \mathbf{R}^N

20.1 Intervalli di \mathbf{R}^N : 20.1.1 *Intervalli di \mathbf{R}^N :* intervallo di \mathbf{R}^N (D* 20.1.1.1) D 20.1.1.2; 20.1.2 *Misura di un intervallo:* D** 20.1.3.1, D** 20.1.3.2. **20.2 Insiemi di misura nulla:** 20.2.1 *Insiemi equipotenti:* insiemi equipotenti (D); 20.2.2 *Insiemi numerabili:* insiemi numerabili (D); 20.2.3 *Somma di una famiglia numerabile di numeri reali positivi:* somma di una famiglia numerabile di numeri reali positivi (D); 20.2.4 *Insiemi di misura nulla:* D* 20.1.4.1; 20.2.5 *Definizione di quasi dappertutto:* D* 20.2.8.1; **20.3 Funzioni di Riemann:** 20.3.1 *Funzioni continue quasi dappertutto:* D* 20.3.1.1; 20.3.2 *Funzioni di Riemann:* D** 20.3.2.1; **20.4 Integrale secondo Riemann su un intervallo:** 20.4.1 *Scomposizione di un intervallo:* D** 20.4.1.1; 20.4.2 *Somme superiori e somme inferiori:* D*** 20.4.3.1. 20.4.3 *Integrale superiore e integrale inferiore:* D*** 20.4.3.1, relazione fra integrale inferiore ed integrale superiore (T* 20.4.4.1 (e)); 20.4.4 *Somme e funzioni di Riemann:* T** 20.4.5.1 (e); 20.4.5 *Integrale:* integrale di una funzione di Riemann su un intervallo (D*** 20.4.5), significato geometrico di integrale (I**); 20.4.7 *Somme di Riemann:* scelta relativa ad una scomposizione (D* 20.4.7.1); somme di Riemann (D** 20.4.7.2), 20.4.8 *Integrale come limite delle somme di Riemann rispetto all'orientazione $\delta \rightarrow 0$:* T* 20.4.8.1 Riemann (e); 20.4.9 *Proprietà dell'integrale:* Linearità dell'integrale (T* 20.4.9.1 (e)), positività dell'integrale (T* 20.4.9.2 (e)), monotonia dell'integrale (T* 20.4.9.3 (e)), integrale di funzioni uguali quasi dappertutto (T* 20.4.9.4 (e)), valore assoluto di un integrale (T* 20.4.9.5 (e)), teorema di media integrale (T* 20.4.9.6 (e)), teorema di media integrale per funzioni continue (T* 20.4.9.7 (e)), additività dell'integrale (T* 20.4.9.8 (e)). **20.5 Integrale su intervalli di \mathbf{R} :** 20.5.1 *Integrale da x a y :* integrale di Riemann da x a y (D* 20.5.1.1); 20.5.2 *Funzione integrale:* D*** 20.5.2.1, T 20.5.1.2 (e); 20.5.3 *Continuità della funzione integrale:* T* 20.5.3.1 (e); 20.5.4 *Teorema fondamentale del calcolo integrale:* T*** 20.5.4.2 (d); 20.5.5 *Formula di Leibniz-Newton:* T*** 20.5.5.1 (d), integrale di una funzione continua come variazione di una primitiva (corso di Analisi L-A) come integrale di Riemann da x a y (corso di Analisi L-B) (T* 20.5.5.2(d)); 20.5.6 *Alcune derivate di integrali:* deriva di $\int_x^{x_0} f$ (T (d)). **20.6 Integrale sul prodotto di due intervalli:** 20.6.1 *Integrale sul prodotto di due intervalli:* T* 20.6.1.1 20.6.2 *Integrale di un prodotto:* T 20.6.2.1 (I).

21 Integrale di Lebesgue in \mathbf{R}^N

21.1 Integrale di una funzione continua positiva su un compatto: 21.1.1 *Integrale di una funzione continua su un compatto:* D* 21.1.1.1; **21.2 Insiemi misurabili:** 21.2.1 *Insiemi misurabili:* D* 21.2.1.1; **21.3 Funzioni misurabili secondo Lebesgue:** 21.3.1 *Funzioni misurabili:* D* 21.3.1.1; 21.3.4 *Parte positiva e parte negativa:* D* 21.3.4.1, T* 21.3.4.1 (e), D* 21.3.4.3, T* 21.3.4.2 (e), T 21.3.4.3 (e); **21.4 Integrale di funzioni misurabili positive:** 21.4.1 *Integrale di una funzione misurabile positiva:* D* 21.4.1.1; 21.4.2 *Integrale di una funzione misurabile positiva a valori in $\overline{\mathbf{R}}$:* D* 21.4.2.1, definizione di integrale di una funzione misurabile positiva a valori in $\overline{\mathbf{R}}$ (D*); 21.4.3 *Integrali di funzioni positive convergenti:* D* 21.4.3.1; 21.4.5 *Additività numerabile dell'integrale di funzioni positive:* T 21.4.5.1 (I); **21.5 Misura di un insieme misurabile:** 21.5.1 *Misura di un insieme misurabile:* D** 21.5.1.1; 21.5.2 *Insiemi integrabili:* D* 21.5.2.1. **21.7 Limite sotto il segno di integrale:** 21.7.2 *L'integrale di Riemann come integrale di Lebesgue:* T 21.7.2.1 (e); 21.7.3 *Integrali impropri e integrali di Lebesgue di funzioni misurabili positive:* T 21.7.3.1 (e); **21.8 Integrale sul prodotto di insiemi misurabili:** 21.8.1 *Prodotto di due insiemi misurabili:* T 21.8.1.1 (e); 21.8.2 *Integrale di una funzione definita quasi dappertutto:* integrale di una funzione definita quasi dappertutto (D); 21.8.3 *Integrale sul prodotto di due insiemi misurabili:* T** 21.8.3.1 (e); 21.8.4 *Proiezioni in un prodotto cartesiano:* D 21.8.4.1; 21.8.5 *Immagine di un punto in un grafico:* D* 21.8.5.1; 21.8.6 *Funzioni $F(x, \cdot)$ e $F(\cdot, y)$:* D 21.8.6.1; 21.8.7 *Integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano:* T** 21.8.7.1 (e); 21.8.8 *Formule di riduzione per gli integrali doppi:* T*** 21.8.8.1 (d), T*** 21.8.8.2 (d); 21.8.9 *Formule di riduzione per gli integrali tripli:* T*** 21.8.9.1 (d), T*** 21.8.9.2 (d). **21.9 Cambiamento di variabile negli integrali:** 21.9.1 *Cambiamento di variabile negli integrali su insiemi misurabili:* T*** 21.11.2.1 (e); 21.9.2 *Parametrizzazione in misura:* D 21.11.3.1 (I); **21.10 Funzioni integrabili secondo Lebesgue:** 21.10.1 *Funzioni integrabili secondo Lebesgue:* D* 21.12.1.1, T** 21.12.1.2 (d); 21.10.2 *Criterio di integrabilità:* T 21.10.2.1 (e); 21.10.3 *Integrale di una funzione integrabile:* T* 21.10.3.1 (e), D* 21.10.3.1. **21.11 Applicazioni geometriche:** 21.11.3 *Area della regione limitata da un'ellisse:* D 21.11.3.1, T* 21.11.3.1 (d); 21.11.9 *Volume del cono:* D* 21.13.9.1, T* 21.13.9.1 (d); 21.11.10 *Volume della regione limitata da un'ellissoide:* D 21.11.10.1, T* 21.11.10.1 (d); 21.11.12 *Volumi di solidi di rotazione:* D* 21.11.12.1, volume di un solido di rotazione (T* 21.11.12.1 (d)); 21.11.13 *Baricentro:* D* 21.11.13.1; 21.11.14 *Teorema di Guldino:* T* 21.11.14.1 (d).

22 Integrazione di funzioni su sottovarietà di \mathbf{R}^N

22.1 Graamiano di m vettori: 22.1.1 *Graamiano di m vettori:* D* 22.1.1.1; 22.1.2 *Quadrato simbolico di una matrice:* D* 22.1.2.1, graamiano e quadrato simbolico (T* 22.1.2.1 (e)); 22.1.3 *Prodotto vettoriale di $n - 1$ vettori:*

D* 22.1.3.1, T* 22.1.3.1 T 22.1.3.2 (e), T 22.1.3.3 (e), prodotto vettoriale e graamiano (T* 22.1.3.4 (e)). **22.2 Integrazione su sottovarietà parametrizzabili:** 22.2.2 *Integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile:* D** 22.2.3.1; 22.2.3 *Integrale curvilineo:* integrali curvilinei di funzioni (T*** 22.2.3.1 (d)); 22.2.4 *Integrale di superficie:* simboli di Gauss E, F, G (D*** 22.2.4.1), integrali di superficie di funzioni (T*** 22.2.4.1(d)); 22.2.5 *Integrale di ipersuperficie:* T* 22.2.5.1; 22.2.6 *Integrale su una ipersuperficie cartesiana:* integrale di funzioni su una varietà cartesiana (T** 22.2.6.1 (e)); 22.2.7 *Misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile:* misura di un sottoinsieme misurabile di una varietà parametrizzabile (D*** 22.2.7.1); 22.2.8 *Funzioni integrabili su sottoinsiemi di una sottovarietà parametrizzabile:* funzione integrabile secondo Lebesgue su un sottoinsieme di una varietà parametrizzabile e integrale di una funzione integrabile su un sottoinsieme di una varietà parametrizzabile (D* 22.2.8.1). **22.3 Integrale di funzioni su sottovarietà:** 22.3.1 *Integrale di funzioni su sottovarietà (I)* **22.4 Sottovarietà lipschitziane:** 22.4.1 *Sottovarietà lipschitziane:* (I) 22.4.2 *Integrale di una funzione su una sottovarietà lipschitziana:* (I) **22.5 Sottovarietà di \mathbf{R}^N con bordo:** 22.5.1 *Semispazio di riferimento di \mathbf{R}^n :* D 22.5.1.1 22.5.2 *Sottovarietà differenziale di \mathbf{R}^N con bordo:* (I) 22.5.3 *Punti interni e punti di bordo di una sottovarietà con bordo:* (I) 22.4.2 *Integrale di una funzione su una sottovarietà differenziale con bordo:* (I) 22.4.2 *Sottovarietà lipschitziana con bordo:* (I) **22.6 Applicazioni geometriche:** 22.6.2 *Lunghezza di una circonferenza:* T** 22.6.2.1; 22.6.4 *Lunghezza della cicloide:* T* 22.6.4.1; 22.6.5 *Lunghezza di un'elica circolare:* T* 22.6.5.1; 22.6.9 *Area di una superficie cilindrica:* T** 22.6.9.1; 22.6.10 *Area di una superficie conica:* T** 22.6.10.1; 22.6.11 *Area di una superficie sferica:* T** 22.6.11.1; 22.6.13 *Area di una superficie di rotazione:* D* 22.6.13.1, T* 22.6.13.1; 22.6.14 *Baricentro di un sottoinsieme compatto di una sottovarietà:* D* 22.6.14.1; 22.6.15 *Teorema di Guldino per le superfici di rotazione:* T* 22.6.15.1.

23 Integrale di forme differenziali

23.1 Relazione di equivalenza: 23.1.1 *Relazione di equivalenza:* relazione di equivalenza (D) (I); 23.1.2 *Classi d'equivalenza:* classi d'equivalenza (D) (I); 23.1.3 *Insieme quoziente:* insieme quoziente (D) (I). **23.2 Spazi vettoriali orientati:** 23.2.1 *Orientazione di uno spazio vettoriale:* basi equivalenti (D* 23.2.1.1), D 23.2.1.2, spazi vettoriali orientati (D), orientazione canonica di \mathbf{R}^N (D*). **23.3 Sottovarietà parametrizzabili orientate** 23.3.1 *Sottovarietà parametrizzabile orientata:* parametrizzazioni equivalenti (D); orientazione di una varietà parametrizzabile (D); varietà parametrizzabile orientata (D); 23.3.2 *Orientazione dello spazio tangente:* D* 23.3.2.1; 23.3.3 *Versore tangente:* D* 23.3.3.1, espressione del versore tangente (T* 23.3.3.1 (d)); 23.3.4 *Orientazione dello spazio normale:* D* 23.3.4.1; 23.3.5 *Versore normale:* D* 23.3.5.1, espressione del versore normale (T* 23.3.5.1 (d)). 23.3.7 *Sottovarietà orientabile:*(I). **23.4 Gli spazi vettoriali $A_m(\mathbf{R}^N)$:** 23.4.3 *Forme multilineari:* D 23.4.3.1; 23.4.4 *Forme multilineari alternanti:* definizione di forma m -lineare alternante (D), prodotto esterno di m forme lineari (D); 23.4.5 *Lo spazio vettoriale $A_m(\mathbf{R}^n; R)$:* base dello spazio vettoriale delle forme m -lineari alternanti (T 23.4.5.1 (e)); 23.4.6 *Base di $A_n(\mathbf{R}^n)$:* T 23.4.6.1 (d), D 23.4.6.1; 23.4.7 *Base di $A_{n-1}(\mathbf{R}^n; R)$:* le $n - 1$ -forme lineari \hat{p}_i (D), T 23.4.7.1 (e), base canonica complementare di $A_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ D 23.4.7.1. **23.5 m -forme differenziali:** 23.5.1 *m -forma differenziale:* D* 23.5.1.1; 23.5.2 *Espressione di una m -forma differenziale:* espressione di una m -forma attraverso le forme differenziali dx_i (T* (d)); 23.5.3 *Funzione associata ad una N -forma:* funzione associata ad una N -forma (D); 23.5.4 *Famiglia complementare associata a una $N - 1$ -forma:* le $N - 1$ -forme \hat{dx}_i (D), espressione di una $N - 1$ forma attraverso le \hat{dx}_i (T (d)), campo di vettori complementare associato a una $N - 1$ -forma (D); 23.5.5 *Campo di vettori complementare per $N = 3$:* **23.6 Integrale su una sottovarietà parametrizzabile:** 23.6.2 *Integrale di una m -forma:* T** 23.6.2.1; 23.6.3 *Integrale di una 1-forma:* T*** 23.6.3.1 (d); 23.6.4 *Integrale di una 2-forma:* T** 23.1.7.1 (d); 23.6.6 *Varietà differenziali di dimensione N :* varietà differenziali di dimensione N (T,I), orientazione canonica di un aperto di \mathbf{R}^N (D, I); 23.6.7 *Integrale di una N -forma:* T 23.6.7.1 (d); **23.9 Lavoro di un campo di vettori:** 23.9.1 *Lavoro di un campo di vettori:* D* 23.9.1.1; 23.9.2 *Lavoro di un campo di vettori e forma differenziale associata al campo:* T* 23.9.2.1 (d). **23.10 Flusso di un campo di vettori:** 23.10.1 *Flusso di un campo di vettori:* D* 23.10.1.1; 23.10.2 *Flusso di un campo di vettori e forma differenziale associata in modo complementare al campo:* T* 23.10.2.1 (e)).

24 Teorema di Stokes su sottovarietà con bordo

24.1 Orientazione indotta sul bordo: 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo:* orientazione indotta sul bordo (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 1:* orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 1 (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 2:* orientazione indotta sul bordo di sottovarietà di dimensione 2 (I); 24.1.2 *Orientazione indotta sul bordo di un dominio regolare:* orientazione indotta sul bordo di un dominio regolare. **24.2 Differenziale esterno di una m -forma:** 24.2.1 *Differenziale esterno di una m -forma:* D* 24.2.1.1. **24.3 Teorema di Stokes:** 24.3.1 *Teorema di Stokes:* T** 24.3.1.1 (e); 24.3.2 *Teorema di Stokes applicato alle sottovarietà di dimensione 1:* T* 24.3.2.1 (e, I); T* 24.3.2.2 (e, I) 24.3.3 *Formula di*

Green nel piano: T* 24.3.3.1 (d); 24.3.4 *Rotore di un campo:* T* 24.3.3.1 (d), D* 24.3.4.1; 24.3.5 *Formula di Stokes per superfici di \mathbf{R}^3 :* T* 24.3.5.1 (d); 24.3.6 *Divergenza di un campo di vettori:* T* 24.3.6.1 (e), D* 24.3.6.1; 24.3.7 *Teorema della divergenza* T* 24.3.7.1 (e). 24.3.8 *Misura di domini regolari:* T 24.3.8.1 (e).