

ANALISI MATEMATICA 2
SCHEMA PROVVISORIO DELLE LEZIONI
A.A. 2015/16

1 Distribuzione degli argomenti

Argomento	lezioni	tot
Calcolo differenziale	12	12
Forme differenziali lineari	4	16
Funzioni implicite	2	18
Varietà differenziali	6	24
Equazioni differenziali	5	29
Equazioni differenziali lineari	7	36
Integrale di Riemann su intervalli	5	40
Integrale di Lebesgue in \mathbf{R}^N	9	50
Integrazione di funzioni su varietà	5	55
Integrazione di forme differenziali	5	60

2 Introduzione al corso

1. Sito internet (<http://www.dm.unibo.it/~ravaglia/serverdidattica.html>).
2. Ricevimento studenti.
3. Tutore.
4. Schema del corso.
5. Conto delle ore e ore di recupero.
6. Strumenti didattici.
7. Programma del corso.
8. Modalità d'esame: scritto, orale.
9. Date esami.
10. Modalità di studio.

3 Argomento delle lezioni

3.1 Differenziabilità (1)

1. Funzioni vettoriali di più variabili.
2. Grafico di una funzione vettoriale di più variabili.

3. Linee di livello.
4. Derivata direzionale.
5. Significato geometrico della derivata direzionale.
6. Derivata parziale.
7. Derivata parziale come derivata di una funzione di una variabile.
8. Significato geometrico della derivata parziale.
9. Funzione derivata parziale.

3.2 Differenziabilità (2)

1. Esercizio su derivate parziali.
2. Gradiente.
3. Matrice jacobiana.
4. Funzioni di classe C^1 .

3.3 Differenziabilità (3)

1. Estremanti relativi e gradiente.
2. Punti critici.
3. Esercizi su massimi e minimi assoluti di funzioni (1).

3.4 Differenziabilità (4)

1. Esercizi su massimi e minimi assoluti di funzioni (2).

3.5 Differenziabilità (5)

1. Derivate parziali di ordine superiore.
2. Classi di funzioni.
3. Teorema di Schwarz.
4. Trasformazioni lineari da \mathbf{R}^N a \mathbf{R}^M .
5. Matrice di una trasformazione lineare.
6. Differenziabilità in un punto.
7. Derivata in un punto.

3.6 Differenziabilità (6)

1. Differenziabilità e incremento.
2. Derivata della restrizione di una trasformazione lineare.
3. Differenziabilità e continuità.
4. Differenziabilità e derivate direzionali.
5. Espressione della matrice della derivata.
6. Differenziabilità per funzioni di una variabile.
7. Teorema del differenziale totale.
8. Esercizio sulla derivata in un punto.

3.7 Differenziabilità (7)

1. Esercizio sulla derivata.
2. Differenziabilità e operazioni.
3. Differenziabilità della funzione composta.
4. Derivata parziale di una funzione composta.
5. Esercizio sulla derivata parziale di una funzione composta.

3.8 Differenziabilità (8)

1. Differenziale di una funzione in un punto.
2. Forme lineari.
3. Vettore associato ad una forma lineare su \mathbf{R}^N .
4. Lo spazio vettoriale $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.
5. Base canonica di $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.
6. Coordinata di una forma lineare rispetto alla base canonica.
7. Espressioni del valore del differenziale in un punto.
8. Vettore associato al differenziale in un punto.
9. Gradiente e ipersuperfici di livello.
10. Espressione del differenziale in un punto come combinazione lineare della base canonica di $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.
11. Espressione canonica del differenziale.
12. Esercizio su differenziale.

3.9 Differenziabilità (9)

1. Insieme connesso.
2. Funzioni con derivata nulla.
3. Omeomorfismo.
4. Diffeomorfismo.
5. Esempi: endomorfismi biettivi e funzioni affini biettive.

3.10 Differenziabilità (10)

1. Derivata del diffeomorfismo inverso.
2. Teorema dell'invertibilità locale.
3. Diffeomorfismo locale.
4. Caratterizzazione dei diffeomorfismi locali.
5. Condizione per un diffeomorfismo.
6. Esercizio sul teorema dell'invertibilità locale.

3.11 Differenziabilità (11)

1. Coordinate polari piane.
2. Diffeomorfismo locale associato alle coordinate polari piane.
3. Un diffeomorfismo associato alle coordinate polari piane.
4. Coordinate sferiche in \mathbf{R}^3 .
5. Coordinate cilindriche.
6. Forme bilineari
7. Matrice associata ad una forma bilineare.
8. Forme bilineari simmetriche semidefinite e definite.
9. Condizioni necessarie e sufficienti per le forme bilineari semidefinite e definite.
10. Condizioni necessarie e sufficienti per le forme bilineari definite.

3.12 Differenziabilità (12)

1. Forme bilineari simmetriche di \mathbf{R}^2 .
2. Differenziale secondo.
3. Matrice hessiana in un punto.
4. Forme bilineari simmetriche.
5. Estremanti relativi e differenziale secondo.
6. Esercizi su estremanti relativi.

3.13 Forme differenziali lineari (1)

1. Forma differenziale.
2. Operazioni fra forme differenziali.
3. Differenziale di una funzione.
4. Campo di vettori.
5. Gradiente di una funzione.
6. Campo di vettori associato ad una forma differenziale.
7. Campo di vettori associato al differenziale.
8. Espressione canonica di una forma differenziale.
9. Forme differenziali di classe C^n .
10. Forme differenziali chiuse.
11. Il differenziale di una funzione come forma differenziale chiusa.

3.14 Forme differenziali lineari (2)

1. Primitiva di una forma differenziale.
2. Caratterizzazione della primitiva.
3. Forme differenziali esatte.
4. Caratterizzazione delle forme differenziali esatte.
5. Potenziale di un campo di vettori.
6. Campi di vettori conservativi.
7. Rapporto fra forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse.
8. Esercizio sulle forme differenziali.

9. Traiettoria.
10. Traccia di una traiettoria.
11. Punto iniziale e punto finale di una traiettoria.
12. Traiettoria chiusa.
13. Traiettoria in un insieme.
14. Traiettoria di classe C^1 .
15. Traiettoria di classe C^1 a tratti.

3.15 Forme differenziali lineari (3)

1. Integrale di una forma differenziale su una traiettoria.
2. Esercizio su integrale di una forma differenziale su una traiettoria.
3. Integrale curvilineo del differenziale.
4. Integrale curvilineo di una forma differenziale esatta.
5. Esercizio su integrale curvilineo di una forma differenziale esatta.
6. Esempio di una forma differenziale chiusa, ma non esatta.

3.16 Forme differenziali lineari (4)

1. Caratterizzazione delle forme differenziali esatte con gli integrali su traiettorie.
2. Espressione di una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso un integrale su traiettoria.
3. Insieme stellato.
4. Teorema di Poincaré.
5. Forme differenziali localmente esatte.
6. Esercizio su forme differenziali chiuse.
7. Esercizio su forme differenziali chiuse su dominio non stellato.

3.17 Equazioni implicite (1)

1. Equazione implicita $f(x, y) = 0$.
2. Soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
3. Significato geometrico di soluzione.
4. Valori in x di una funzione implicita.

5. Funzione implicita massimale.
6. Esercizio su funzioni implicite massimali.
7. Soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
8. Significato geometrico di soluzione di un problema implicito.
9. Equazione implicita in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.
10. Problema implicito in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.
11. Teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
12. Teorema di Dini in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.

3.18 Equazioni implicite (2)

1. Esercizio sul teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
2. Esercizio sul teorema di Dini in $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.
3. Esercizio sul teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$.

3.19 Sottovarietà differenziali (1)

1. Sottovarietà di \mathbf{R}^N di dimensione m parametrizzabile differenziale.
2. Varietà lineari.
3. Segmento aperto.
4. Triangolo aperto.
5. Simpleso aperto.
6. Sottovarietà cartesiane.

3.20 Sottovarietà differenziali (2)

1. Cambiamento di parametro.
2. Spazio tangente ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile.
3. Sottovarietà di \mathbf{R}^N di dimensione m .
4. Caratterizzazione locale delle sottovarietà di \mathbf{R}^N .

3.21 Sottovarietà differenziali (3)

1. Sottovarietà definita da equazioni cartesiane.
2. Coniche e quadriche come sottovarietà.
3. Spazio tangente ad una sottovarietà.
4. Spazio normale ad una sottovarietà.
5. Base dello spazio normale.
6. Varietà lineare tangente e varietà lineare normale.

3.22 Sottovarietà differenziali (4)

1. Esercizio su spazio tangente, spazio normale, varietà lineare tangente, varietà lineare normale.
2. Estremanti relativi su sottovarietà.

3.23 Sottovarietà differenziali (5)

1. Moltiplicatori di Lagrange.
2. Esercizi su massimi e minimi assoluti di funzioni.

3.24 Sottovarietà differenziali (6)

1. Esercizi su massimi e minimi assoluti di funzioni.

3.25 Equazioni differenziali (1)

1. Soluzione di un'equazione differenziale.
2. Soluzioni massimali.
3. Equazione $y' = f(x)$.
4. Esercizio su equazione $y' = f(x)$.
5. Equazione differenziale di forma normale.
6. Soluzione di un'equazione differenziale di forma normale.
7. Soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione in forma normale.

3.26 Equazioni differenziali (2)

1. Problema di Cauchy per l'equazione $y' = f(x)$.
2. Esercizio sul problema di Cauchy con l'equazione $y' = f(x)$.
3. Esistenza e unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy.

3.27 Equazioni differenziali (3)

1. Equazioni a variabili separate.
2. Formula risolutiva in forma implicita con soluzioni derivabili.
3. Problema di Cauchy per equazioni a variabili separate.
4. Esercizi sul problema di Cauchy.

3.28 Equazioni differenziali (4)

1. Equazione a variabili separabili.
2. Soluzioni costanti di un'equazioni a variabili separabili.
3. Esercizi sull'equazione a variabili separabili.

3.29 Equazioni differenziali (5)

1. Sistemi di equazioni differenziali.
2. Sistemi di forma normale.
3. Problema di Cauchy per i sistemi di forma normale.
4. Esistenza e unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy per i sistemi.
5. Equazioni di ordine n .
6. Equivalenza fra equazione di ordine n e sistema di equazioni del primo ordine.
7. Equazioni di ordine n di tipo normale.
8. Problema di Cauchy su equazioni di ordine n di tipo normale.
9. Esistenza e unicità della soluzione massimale di un problema di Cauchy per le equazioni d'ordine n .
10. Esercizi su equazione $y^{(n)} = f(x)$.
11. Esercizi su equazione $F(x, y', y'') = 0$.

3.30 Equazioni differenziali lineari (1)

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine.
2. Formula risolutiva.
3. Formula risolutiva per l'equazione omogenea.
4. Esercizi sull'insieme delle soluzioni.

3.31 Equazioni differenziali lineari (2)

1. Problema di Cauchy.
2. Formula sulla soluzione del problema di Cauchy.
3. Esercizi sul problema di Cauchy.
4. Sistemi lineari del primo ordine.
5. Problema di Cauchy.
6. Teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy.

3.32 Equazioni differenziali lineari (3)

1. Sistemi differenziali lineari omogenei.
2. Spazio vettoriale delle soluzioni per un sistema differenziale lineare omogeneo.
3. Dimensione dello spazio delle soluzioni per un sistema differenziale lineare omogeneo.
4. Sistema fondamentale di soluzioni per un sistema differenziale lineare omogeneo.
5. Integrale generale per un sistema differenziale lineare omogeneo.
6. Equazioni lineari non omogenee.
7. Esercizi sui sistemi lineari.

3.33 Equazioni differenziali lineari (4)

1. Equazioni differenziali lineari di ordine n .
2. Equivalenza con un sistema.
3. Problema di Cauchy.
4. Teorema fondamentale sul problema di Cauchy.
5. Equazioni differenziali lineari omogenee.
6. Spazio vettoriale delle soluzioni per un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.
7. Basi dello spazio delle soluzioni per un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.
8. Integrale generale per un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.
9. Equazioni a coefficienti costanti.
10. Equazione caratteristica.
11. Sistema fondamentale di soluzioni per le equazioni a coefficienti costanti.
12. Equazioni a coefficienti costanti reali.
13. Equazione differenziale lineare d'ordine n non omogenea.

3.34 Equazioni differenziali lineari (5)

1. Integrale particolare ed esponenziali
2. Esercizi su equazioni differenziali lineari d'ordine n .

3.35 Equazioni differenziali lineari (6)

1. Esercizi su equazioni differenziali lineari d'ordine n .
2. Problemi di Cauchy per equazioni differenziali lineari.

3.36 Equazioni differenziali lineari (7)

1. Esercizi su equazioni lineari a coefficienti variabili.

3.37 Integrale di Riemann (1)

1. Intervallo di \mathbf{R}^N .
2. Misura di un intervallo.
3. Insiemi equipotenti.
4. Insiemi numerabili.
5. Somma di una famiglia numerabile di numeri reali positivi.
6. Insieme di misura nulla.
7. Definizione di quasi dappertutto.
8. Funzioni di Riemann.

3.38 Integrale di Riemann (2)

1. Scomposizione di un intervallo.
2. Somma inferiore e somma superiore.
3. Significato geometrico delle somme inferiori e delle somme superiori.
4. $s(f, \sigma) \leq S(f, \tau)$.
5. Integrale inferiore ed integrale superiore.
6. Relazione fra integrale inferiore ed integrale superiore.
7. Teorema su integrale superiore ed integrale inferiore e funzioni di Riemann.
8. Integrale.
9. Significato geometrico di integrale.

3.39 Integrale di Riemann (3)

1. Scelta relativa ad una scomposizione.
2. Somme di Riemann
3. Diametro di un insieme.
4. Diametro di una scomposizione.
5. Definizione di convergenza delle somme di Riemann ad un numero l .
6. Integrale come limite delle somme di Riemann al tendere a 0 del diametro della scomposizione.

3.40 Integrale di Riemann (4)

1. Linearità dell'integrale.
2. Positività dell'integrale.
3. Monotonia dell'integrale.
4. Integrale di funzioni uguali quasi dappertutto.
5. Integrale del valore assoluto.
6. Teorema della media integrale.
7. Additività dell'integrale.
8. Integrali dipendenti da un parametro.

3.41 Integrale di Riemann (5)

1. Integrale da x a y .
2. Funzione integrale.
3. Continuità della funzione integrale.
4. Teorema fondamentale del calcolo integrale.
5. Formula di Leibniz-Newton.
6. Derivata di un integrale.
7. Esercizi su derivate di integrali.
8. Esercizi su gradienti di integrali.
9. Integrale sul prodotto di due intervalli.
10. Esercizi sulle formule di riduzione sul prodotto di intervalli.

3.42 Integrale di Lebesgue (1)

1. Integrale di una funzione continua positiva su un compatto.
2. Insiemi misurabili.
3. Funzioni misurabili.
4. Integrale di una funzione misurabile positiva a valori in \mathbf{R} .
5. Integrale di una funzione misurabile positiva a valori in $\overline{\mathbf{R}}$.
6. Integrali di funzioni positive convergenti.

3.43 Integrale di Lebesgue (2)

1. Misura di un insieme misurabile.
2. Insiemi di misura nulla come insiemi con misura 0.
3. Insiemi integrabili.
4. L'integrale di Riemann di funzioni positive come integrale di Lebesgue.
5. Integrali impropri di funzioni continue positive come integrali di Lebesgue.
6. Prodotto di insiemi misurabili.
7. Funzioni definite quasi dappertutto.
8. Integrale sul prodotto di due insiemi misurabili.
9. Proiezioni in un prodotto cartesiano.
10. Immagine di un punto in un sottoinsieme del prodotto cartesiano.
11. Funzione $F(x, \cdot)$.
12. Integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano.

3.44 Integrale di Lebesgue (3)

1. Formule di riduzione per gli integrali doppi.
2. Esercizi sugli integrali doppi.

3.45 Integrale di Lebesgue (4)

1. Esercizi sugli integrali doppi.
2. Esercizi sul valore e sulla convergenza di integrali doppi.

3.46 Integrale di Lebesgue (5)

1. Formule di riduzione per gli integrali tripli.
2. Esercizi sugli integrali tripli.

3.47 Integrale di Lebesgue (6)

1. Cambiamento di variabile negli integrali su insiemi misurabili.
2. Parametrizzazione in misura.
3. Esercizi sul cambiamento di variabile per gli integrali di funzioni misurabili positive.

3.48 Integrale di Lebesgue (7)

1. Parte positiva e parte negativa di un numero reale.
2. Parte positiva e parte negativa di una funzione.
3. Funzioni integrabili secondo Lebesgue.
4. Integrale di una funzione integrabile.
5. Esercizi sulle formule di riduzione per gli integrali doppi.

3.49 Integrale di Lebesgue (8)

1. Esercizi sulle formule di riduzione per gli integrali tripli.
2. Esercizi sul cambiamento di variabile per funzioni integrabili negli integrali doppi.
3. Esercizi sul cambiamento di variabile per funzioni integrabili negli integrali tripli.

3.50 Integrale di Lebesgue (9)

1. Area della regione limitata da un'ellisse.
2. Volume del cono.
3. Volume della regione limitata da un'ellissoide.
4. Volumi di solidi di rotazione.
5. Baricentro.
6. Teorema di Guldino.

3.51 Integrazione di funzioni su sottovarietà (1)

1. Graamiano di m vettori.
2. Quadrato simbolico di una matrice.
3. Prodotto vettoriale di $N - 1$ vettori.
4. Prodotto vettoriale in \mathbf{R}^3 .
5. Ortogonalità del prodotto vettoriale.
6. Graamiano e prodotto vettoriale.
7. Integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile.
8. Integrali curvilinei di funzioni.
9. Simboli di Gauss E, F, G .
10. Integrali di superficie di funzioni.

3.52 Integrazione di funzioni su sottovarietà (2)

1. Integrale di ipersuperficie.
2. Integrale su una ipersuperficie cartesiana.
3. Misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile.
4. Lunghezza.
5. Area.
6. Misura su una ipersuperficie.
7. Misura su una ipersuperficie cartesiana.
8. Funzione integrabile secondo Lebesgue su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile e integrale di una funzione integrabile su un sottoinsieme di una varietà parametrizzabile.
9. Integrale di funzioni su sottovarietà differenziali non necessariamente parametrizzabili.
10. Integrali di funzioni su sottovarietà lipschitziana.
11. Integrale di una funzione su una sottovarietà con bordo.

3.53 Integrazione di funzioni su sottovarietà (3)

1. Esercizi sugli integrali curvilinei di funzioni.
2. Simmetrie negli integrali curvilinei di funzioni.
3. Significato geometrico dell'integrale curvilineo in \mathbf{R}^2 .

3.54 Integrazione di funzioni su sottovarietà (4)

1. Esercizi sugli integrali di superficie di funzioni.
2. Simmetrie negli integrali di superficie di funzioni

3.55 Integrazione di funzioni su sottovarietà (5)

1. Lunghezza di una circonferenza.
2. Lunghezza della cicloide.
3. Lunghezza dell'elica circolare.
4. Area di una superficie cilindrica.
5. Area di una superficie conica.
6. Area di una superficie sferica.
7. Area di una superficie di rotazione.
8. Baricentro di una sottovarietà compatta.
9. Teorema di Guldino per le superfici di rotazione.

3.56 Integrale di forme differenziali (1)

1. Equivalenza.
2. Relazione d'equivalenza.
3. Classi di equivalenza.
4. Insieme quoziente.
5. Basi equivalenti.
6. Significato geometrico di basi equivalenti.
7. Orientazione di uno spazio vettoriale.
8. Significato geometrico di spazio vettoriale orientato.
9. Orientazione canonica di \mathbf{R}^N .
10. Parametrizzazioni equivalenti.
11. Orientazione di una sottovarietà parametrizzabile.
12. Sottovarietà parametrizzabile orientata.

3.57 Integrale di forme differenziali (2)

1. Orientazione dello spazio tangente.
2. Significato geometrico di varietà orientata per $m = 1, 2, 3$.
3. Versore tangente.
4. Orientazione dello spazio normale.
5. Versore normale.
6. Sottovarietà orientabile.
7. Forme bilineari alternanti.
8. Lo spazio vettoriale $A_2(\mathbf{R}^n)$.
9. Prodotto esterno di due forme lineari.
10. Base di $A_2(\mathbf{R}^n)$.
11. Dimensione di $A_2(\mathbf{R}^n)$.
12. Forme multilineari alternanti.
13. Lo spazio vettoriale $A_m(\mathbf{R}^n)$.
14. Lo spazio vettoriale $A_m(\mathbf{R}^n)$ per $m > n$.
15. Prodotto esterno di m forme lineari.
16. Base di $A_m(\mathbf{R}^n)$.
17. Dimensione di $A_m(\mathbf{R}^n)$.
18. Lo spazio vettoriale $A_m(\mathbf{R}^n)$ per $m = 1$ e $m = 0$.
19. Base di $A_n(\mathbf{R}^n)$.
20. Base complementare di $A_{n-1}(\mathbf{R}^n)$.

3.58 Integrale di forme differenziali (4)

1. m -forma differenziale.
2. Espressione di una m -forma differenziale.
3. Funzione associata ad una N -forma.
4. Espressione di una $N - 1$ -forma differenziale.
5. Campo di vettori complementare associato a una $N - 1$ -forma.
6. Integrale di un m -forma integrabile su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile differenziale orientata.

7. Integrale curvilineo di una 1-forma.
8. Integrale di superficie di una 2-forma.
9. Domini orientati canonicamente.
10. Integrale di una N -forma su un dominio regolare di \mathbf{R}^N .
11. Esercizi su integrali di 1-forme.
12. Integrale curvilineo come somma di valori della funzione per la lunghezza delle proiezioni.
13. Significato geometrico di integrale curvilineo di una 1-forma

3.59 Integrale di forme differenziali (5)

1. Esercizi su integrali di 2-forme.
2. Integrale di superficie come somma di valori della funzione per l'area delle proiezioni.

3.60 Integrale di forme differenziali (6)

1. Lavoro di un campo di vettori.
2. Flusso di un campo di vettori.
3. Flusso di un campo di vettori in \mathbf{R}^3