Analisi Matematica 2 - Parziale - 16/4/11 - Versione 1

Cognome Nome e matricola: ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (xy, x + y, z) \; ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 0, 2)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 0, 2)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 0, 2)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1, 0, 2)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$
$$\begin{cases} \sin(xy^3) + \cos(x^4 y) + x + y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$
   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad , \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 \operatorname{tg} y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\log y\, dx + \frac{x}{y}\, dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\log x\, dx + y\, dy + dz\ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x + 2y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente integrale di forma differenziale su traiettoria

$$\int_{\varphi} x^2 dx + y\, dy + dz \ , ;$$

dove

$$\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (\cos t, \sin t, t) \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(\sin^2(2x + 3y), x^2 y) \ ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x^2 y + y^2 + 4x \ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - Parziale - 16/4/11 - Versione 2

Cognome Nome e matricola: ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (x - y + z, xy, z^2)\ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 1, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 1, 1)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 1, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1, 1, 1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$
$$\begin{cases} \cos(xy^3) + \sin(x^4 y) + 2x - y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$
   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1 \end{cases} , \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 \operatorname{ctg} y \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\operatorname{Arctg} y \, dx + \frac{x}{1+y^2} \, dy \; .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\operatorname{Arctg} x \, dx + y \, dy + dz \; .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 ; \; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 3x + 2y \; ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente integrale di forma differenziale su traiettoria

$$\int_\varphi x\,dx + y^2 dy + dz \ ,;$$

dove

$$\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (\sin t, \cos t, t) \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(\cos^2(3x + 2y), xy^2) \ ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2xy^2 + x^2 + 4y \ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - Parziale - 16/4/11 - Versione 3

Cognome Nome e matricola: ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (3x + y, xyz, x + z) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 5, 2)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 5, 2)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 5, 2)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1, 5, 2)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$
$$\begin{cases} \sin(xy^3) + \sin(x^4 y) + 3x + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$
   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases} \quad , \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -x^2 \operatorname{tg} y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{x}\,dx + \log x\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x\,dx + \log y\,dy + dz\ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x + y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente integrale di forma differenziale su traiettoria

$$\int_{\varphi} dx + y\,dy + z^2\,dz\ ,;$$

dove

$$\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (t, \sin t, \cos t)\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(x^2 y, \sin^2(3x + 2y))\ ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x^2 y + y^2 - 4x\ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - Parziale - 16/4/11 - Versione 4

Cognome Nome e matricola: ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (xz, yz, xy) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(2, 5, 3)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.
   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(2, 5, 3)$ tale che
   $$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;
   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(2, 5, 3)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(2, 5, 3)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$
$$\begin{cases} \cos(xy^3) - \cos(x^4 y) + x + y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$
   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,
   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1 \end{cases} \quad , \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -x^2 \operatorname{ctg} y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+x^2}\,dx + \operatorname{Arctg} x\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x\,dx + \operatorname{Arctg} y\,dy + dz\ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 2x + 3y\ ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 3) Calcolare il seguente integrale di forma differenziale su traiettoria

$$\int_\varphi x^2 dx + dy + z\,dz\ ,;$$

dove

$$\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (\cos t, t, \sin t)\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 3) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(xy^2, \cos^2(2x + 3y))\ ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

10. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2xy^2 + x^2 - 4y\ .$$

Svolgimento e risposta.