Analisi Matematica 2 - 28/6/11 - Compito 2- Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (xy, xe^z) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (x + y)\, ds \ ,$$

   dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} e^{x^2+y^2} + x + y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$

(a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

(b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 - y + z ,$$

dire se f ammette massimo e se f ammette minimo; in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.(Passaggi essenziali)

5. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\log x}{y} \\ y(1) = 3 \end{cases} .$$

Si consideri noto che si ha $2x \log x - 2x + 11 > 0$ per ogni $x > 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^x \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma x dx + x dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2; \ 1 \le x \le 2, \ y = \frac{1}{x} \right\} .$$

con orientazione per la quale $(2, \frac{1}{2})$ è il punto iniziale e $(1,1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D (3x - y) \, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \ -1 \le x \le 0, \ x^2 \le y \le 1\}$$

(non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 \le 1, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \ z \ge 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 28/6/11 - Compito 2- Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (ye^x, xy, x - z) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (x + y)\, ds \ ,$$

   dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} \cos(x^2+y^2) - 2x + y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$

(a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

(b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow y^2 - x + z ,$$

dire se f ammette massimo e se f ammette minimo; in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.(Passaggi essenziali)

5. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{\log x}{y} \\ y(1) = -1 \end{cases} .$$

Si consideri noto che l'equazione $2x - 2x\log x - 1 = 0$ ammette 2 soluzioni α_1, α_2 tali che $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ e che si ha $2x - 2x\log x - 1 > 0$ se e solo se $\alpha_1 < x < \alpha_2$. Si determini il dominio della soluzione in funzione di α_1 e α_2.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 2e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma x dx - x^2 dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; \ 1 \leq x \leq 2, \ y = \frac{1}{x^2} \right\} .$$

con orientazione per la quale $(2, \frac{1}{4})$ è il punto iniziale e $(1, 1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D (3x - y) \, dx dy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ -1 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq 1\}$$

(non è necessario semplificare il risultato).

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.