Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Teorema sulla condizione affinchè $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ sia una soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$; sia $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $t \longrightarrow e^{\lambda t}$; allora φ è soluzione di $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ se e solo se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione delle forme differenziali esatte.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \, dx_i$ una forma differenziale su A; allora ω è esatta se e solo se (esprimere la condizione utilizzando le derivate parziali) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f m-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}^m$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; si pone $\int_A f \, ds = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione del versore tangente.** Sia (V, O) una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1; sia $x_0 \in V$; sia $\varphi \in O$; sia $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$; allora $\vec{t}(x_0)$ è uguale a ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 (2x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}) \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.
2. * Dare la definizione di sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.
3. **Perchè si può parlare di spazio vettoriale delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo?
4. Enunciare il teorema sulla dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.
5. ** Dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni e di integrale generale per un sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che T è una trasformazione lineare se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f, \sigma, \xi)$ è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla espressione del differenziale di una funzione attraverso le forme differenziali dx_i.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f differenziabile in A; allora si ha $df = \ldots$.

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
2. *** Quali sono le espressioni di $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
3. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.
4. * Spiegare come si pone il gradiente rispetto alle ipersuperfici di livello.
5. *** Enunciare il teorema di Schwarz sulle derivate parziali seconde.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Definizione di somma inferiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma inferiore di f, $s(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non vuoto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione implicita di incognita $y(x)$, $f(x, y) = 0$ se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla soluzione di un sistema di sistema di equazioni differenziali di forma normale.** Sia $N \in \mathbf{N}^*$; sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}^N$; allora φ è soluzione dell'equazione differenziale di funzione incognita $y(x)$,

$$y' = f(x, y)$$

se e solo se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow xy$; determinare la trasformazione lineare $f'(4, -1)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x)$.
4. * Dare la definizione di soluzione per un sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.
5. * Esprimere scalarmente il sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Definizione di derivata di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; allora la derivata di f in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta su traiettorie con gli stessi estremi.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta su una traiettoria chiusa.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia φ una traiettoria chiusa; allora si ha ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione della lunghezza di una curva utilizzando il graamiano.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 1-misurabile; sia $D \subset \mathbf{R}$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione i V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha (esprimere la lunghezza di A utilizzando l'espressione del graamiano per $m = 1$) $\mathrm{mis}_m(A) = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1}\, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di gradiente di una funzione in un punto.
2. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
3. *** Quali sono le espressioni ha $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
4. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.
5. *** Enunciare il teorema di Schwarz sulle derivate parziali seconde.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sul piano xy.** Sia $A \subset \mathbf{R}^3$; sia A misurabile; sia $p_{1,2}(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di insieme stellato.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è stellato se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di massimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di parte negativa di un elemento di $\overline{\mathbf{R}}$.** Sia $x \in \mathbf{R}$; allora la parte negativa di x, x^- è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di $\int_{(x,y)} f$.
2. * Enunciare il teorema relativo alla proprietà di additività dell'integrale $\int_{(x,y)} f$.
3. *** Dare la definizione di funzione integrale di punto iniziale x_0.
4. * Enunciare il teorema relativo alla proprietà di continuità della funzione integrale.
5. *** Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione di somma superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma superiore di f, $S(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di derivabilità secondo una direzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; si dice che f è derivabile secondo la direzione e in a se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice jacobiana in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la matrice jacobiana di f in a è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di regione limitata da un'ellisse.** Siano $a, b > 0$; allora la regione limitata dall'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi a e b è l'insieme ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(t, t^2, 3t)$, dove $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1; trovare la derivata) di f, esprimendola attraverso le derivate parziali di g.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dire quale è una base dello spazio vettoriale $\mathrm{A}_N(\mathbf{R}^N)$ e quale ne è la dimensione..
2. * Dire quale è una base dello spazio vettoriale $\mathrm{A}_{N-1}(\mathbf{R}^N)$ e quale ne è la dimensione.
3. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
4. *** Dare la definizione funzione derivabile in un punto secondo una direzione e di derivata direzionale. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Enunciare il teorema che lega differenziabilità e derivate direzionali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale lineare d'ordine n (scrivere l'equazione) ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; si pone $\mathrm{mis}_m(A) = \ldots$.

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di differenziale secondo di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia f di classe C^2; allora $d^2 f(a)$ è la funzione ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'integrale di funzioni uguali quasi dappertutto.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; siano $f, g \in \mathcal{R}(I)$; allora si ha ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{2x+3}\, dx \; .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di forma bilineare alternante.
2. * Definire il prodotto esterno di due forme lineari.
3. * Dire quale è una base dello spazio vettoriale $\mathrm{A}_2(\mathbf{R}^N)$ e quale ne è la dimensione.
4. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
5. *** Dare la definizione funzione derivabile in un punto secondo una direzione e di derivata direzionale. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Enunciare il teorema che lega differenziabilità e derivate direzionali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Definizione di derivata direzionale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia f derivabile secondo la direzione e in a; allora la derivata di f secondo la direzione e in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale sul prodotto di due insiemi misurabili di una funzione misurabile positiva.** Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^N$; sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^M$; sia $f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile e positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \dots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \dots, a_n$, b continue; sia $x_0 \in I$; siano $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbf{R}$; allora il problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione di classe C^∞.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è di classe C^∞ se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinate la soluzione massimale del problema implicito $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
2. *** Quale espressione ha $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
3. ** Esprimere $df(a)(h)$ attraverso un prodotto scalare.
4. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.
5. * Come si esprime il differenziale attraverso la base canonica di $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Definizione di derivata direzionale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia f derivabile secondo la direzione e in a; allora la derivata di f secondo la direzione e in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sul sistema fondamentale di soluzioni reale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti nel caso di radici complesse dell'equazione caratteristica.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{R}$; sia $\lambda = \sigma + i\tau$ una radice complessa di molteplicità m dell'equazione caratteristica dell'equazione differenziale a coefficienti costanti $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$; allora a λ e al coniugato di λ corrispondono nel sistema fondamentale di soluzioni reali le $2m$ soluzioni ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in \mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di insieme quoziente.** Sia A un insieme; sia $\mathcal{R}\{x, y\}$ una relazione di equivalenza in A; Indichiamo $\mathcal{R}\{x, y\}$ con $x \sim y$; l'insieme quoziente $A/\sim$ è l'insieme ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare $\frac{d}{dx} \int_x^0 \sin t^2 \, dt$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di derivabilità e di derivata direzionale.
2. * Spiegare il significato geometrico di derivata direzionale, anche attraverso un disegno.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra differenziabilità e derivate direzionali.
4. * Definizione di diffeomorfismo.
5. * Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata dell'inverso di un diffeomorfismo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Definizione di integrale di una funzione di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f \in \mathcal{R}(I)$; allora l'integrale, $\int_I f$ è ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura $\mathrm{mis}(I)$ è ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo del differenziale.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; si $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^1; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1; allora si ha $\int_\varphi df = \ldots$
RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di campo di vettori.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si chiama campo di vettori su A una funzione ...
RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di una forma differenziale su una traiettoria:

$$\int_\varphi dx + xdy + xdz \ ,$$

dove $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3, t \longrightarrow (\cos t, \sin t, t)$.
RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi su un aperto e gradiente.
2. * Dare la definizione di differenziale secondo e dire quale è la matrice del differenziale secondo.
3. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica.
4. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita positiva, definita negativa.
5. ** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi e differenziale secondo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale di tipo normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che T è una trasformazione lineare se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla derivata della funzione inversa** Siano A e B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow B$; sia f un diffeomorfismo; allora per ogni $x \in A$ $f'(x)$ è invertibile e si ha ...

RISPOSTA

[5]. (E) Dire se il problema implicito di incognita $z(x, y)$ $\begin{cases} x^3 + xy^2 + y^3 - y + xz - z = 0 \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$ ammette soluzione.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
2. *** Dare la definizione di integrale superiore e di integrale inferiore.
3. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla proprietà di linearità dell'integrale.
5. * Enunciare il teorema relativo alla proprietà di positività dell'integrale (integrale di una funzione positiva ...). Enunciare il teorema relativo alla proprietà di monotonia dell'integrale (integrali di funzioni una minore o uguale all'altra ...). Enunciare il teorema relativo all'integrale di funzioni uguali quasi dappertutto.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla relazione fra differenziabilità e derivate parziali.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di differenziale secondo di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia f di classe C^2; allora $d^2 f(a)$ è la funzione ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla relazione fra molteplicità geometrica e molteplicità algebrica per un autovalore.** Sia $a \in \mathbf{M}_N(\mathbf{C})$; sia $\lambda \in \mathbf{C}$; sia λ un autovalore della matrice a; sia m la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico di a; sia $E(\lambda)$ l'autospazio associato a λ; allora si ha ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare un integrale generale di $y'' + 2y' + y = 0$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante il rapporto fra continuità e differenziabilità.
3. * Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la differenziabità della somma di due funzioni e del prodotto di uno scalare per una funzione.
4. * Dare la definizione di coordinate sferiche.
5. * Dare la definizione di coordinate cilindriche

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Definizione di somma superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma superiore di f, $S(f,\sigma)$ è ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f,\sigma,\xi)$ è ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla derivata parziale di una funzione composta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; siano $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $B \subset \mathbf{R}^M$; sia $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $f(A) \subset B$; sia f differenziabile in a; sia g differenziabile in $f(a)$; sia $j = 1, 2, \ldots, N$; allora si ha $D_j(g \circ f)(a) = \ldots$.
RISPOSTA

[4]. (*) **Significato geometrico della derivata direzionale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $e \in \mathbf{R}^2$; sia $\|e\| = 1$; sia f derivabile secondo la direzione e in a; allora $D_e f(a)$ geometricamente rappresenta (si può esprimere il significato geometrico anche attraverso un disegno) ...
RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere la seguente equazione differenziale $y' = -y + 3$.
RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$. Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
2. *** Dare la definizione di integrale inferiore e di integrale superiore.
3. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
4. * Enunciare il teorema che lega l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue per funzioni di Riemann positive, su intervalli.
5. * Enunciare il teorema che lega l'integrale improprio su una semiretta positiva e l'integrale di Lebesgue per funzioni continue positive.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Definizione di derivata direzionale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia f derivabile secondo la direzione e in a; allora la derivata di f secondo la direzione e in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un insieme misurabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; si pone $\mathrm{mis}(A) = \ldots$

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di lavoro.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia F 1-misurabile su M; sia F 1-integrabile su M; si chiama lavoro del campo di vettori F su M l'integrale ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di traiettoria chiusa.** Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria di $\mathbf{R}^N$; si dice che φ è una traiettoria chiusa se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Dire se il problema implicito di incognita $y(x)$ $\begin{cases} x^3 + xy^2 + y^3 - y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ammette soluzione.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme misurabile di una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una curva differenziale parametrizzabile.
3. * Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una ipersuperficie.
4. ** Calcolare la lunghezza di una circonferenza.
5. ** Calcolare l'area di una superficie conica.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Teorema sulla dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale lineare d'ordine n omogenea (scrivere l'equazione) ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla espressione canonica di una forma differenziale (cioè mediante le forme differenziali dx_i).** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; sia F il campo associato ad ω; allora si ha $\omega = \ldots$

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione delle forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.**: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti: ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla somma di soluzioni e prodotto di uno scalare per una soluzione di un sistema differenziale lineare omogeneo.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$; sia a continua; siano φ e ψ soluzioni di $y' = a(x)y$; sia $c \in \mathbf{R}$; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di una forma differenziale su una traiettoria:

$$\int_\varphi x dx + x dy \ ,$$

dove $\varphi : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (\cos t, \sin t)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
2. *** Dare la definizione di integrale superiore e di integrale inferiore.
3. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
4. * Enunciare il teorema della media integrale nei due casi di funzione di Riemann e di funzione continua; dimostrarlo nel caso generale.
5. * Enunciare il teorema relativo alla proprietà di additività dell'integrale.

RISPOSTA