Analisi Matematica 2 - 25/6/12 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \text{Arctg}(xyz) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + e^x - e^y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,
   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int\int_S (y^2 + z^2)\, ds \ ,$$

   dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y^2 + z^2 = 4,\ -1 \le x \le 1\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\Gamma ((x+1)^3 \log y + \frac{1}{z})\, dx + (\frac{(x+1)^4}{4y} + z^2)\, dy + (2yz - \frac{x}{z^2})\, dz \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(t, e^t, t+1);\ t \in [0,1]\}$$

orientata in modo che $(0,1,1)$ sia il punto iniziale e $(1,e,2)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \leq 1,\ y \geq x,\ y \geq -x\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow y - x^2 \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (x+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare in risultato):

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x-1 \le y \le -x^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le z \le 1-x^2-y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 25/6/12 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2y^2z^2+1}\ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}\ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} x^4 + 4y + \cos x - \cos y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int\int_S z\, ds\ ,$$

   dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=4,\ 0 \le z \le 2\}\ .$$

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\Gamma ((x+1)^3 \log z + \frac{1}{y})\, dx + (2yz - \frac{x}{y^2})\, dy + (\frac{(x+1)^4}{4z} + y^2)\, dz\ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(t, t+1, e^t);\ t \in [0,1]\}$$

orientata in modo che $(0,1,1)$ sia il punto iniziale e $(1,2,e)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq -1,\ y \leq x,\ y \leq -x\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow y + x^2\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (x-1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare in risultato):

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -x-1 \leq y \leq -x^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2-1 \leq z \leq 0\}\ .$$

Svolgimento e risposta.