

Analisi Matematica 2 - 10/7/12 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (2x \cos y, \sin x + \sin y) ;$$

- (a) determinare la trasformazione lineare $f'(0, 0)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.
- (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(0, 0)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

- (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(0, 0)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(0, 0))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{\sin x^2}^{\cos x^2} e^{t^2} dt ;$$

calcolare la derivata di f .

Risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int \int_S x \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} \sin y \, dx + (x \cos y + \cos z) \, dy - y \sin z \, dz ,$$

dove Γ è il segmento orientato

$$[(0, 0, 1), (1, 1, 0)]$$

orientata in modo che $(0, 0, 1)$ sia il punto iniziale e $(1, 1, 0)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 4x^2 + 4y^2 \leq z^2 + 1, x + y + z = 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 2x - y + z ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Suggerimento. L'intersezione dell'iperboloide $4x^2 + 4y^2 = z^2 + 1$ con il piano $x + y + z = 0$ è un'ellisse (non è necessario dimostrarlo). Il dominio di f è quindi una regione del piano $x + y + z = 0$ limitata da un'ellisse. Nello svolgimento si utilizzino i moltiplicatori di Lagrange. Per risolvere un sistema può essere utile, dopo qualche aggiustamento, sommare i membri delle equazioni contenenti i due moltiplicatori e utilizzare la relazione $x + y + z = 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Determinare un integrale generale reale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' = -5x - 6y \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y = x + 1 \\ y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (2x + 2) \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 10/7/12 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (\sin x \cos y, e^x \sin(2y)) ;$$

- (a) determinare la trasformazione lineare $f'(0, 0)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.
- (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(0, 0)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

- (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(0, 0)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(0, 0))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{e^{x^2}}^{e^{x^3}} \sin t^2 dt ;$$

calcolare la derivata di f .

Risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int \int_S y \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} y \sin x \, dx - (z \cos y + \cos x) \, dy - \sin y \, dz ,$$

dove Γ è il segmento orientato

$$[(0, 0, 1), (1, 1, 0)]$$

orientata in modo che $(0, 0, 1)$ sia il punto iniziale e $(1, 1, 0)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 3x^2 + 3y^2 \leq z^2 + 1, x + y + z = 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x - 2y - z ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Suggerimento. L'intersezione dell'iperboloide $3x^2 + 3y^2 = z^2 + 1$ con il piano $x + y + z = 0$ è un'ellisse (non è necessario dimostrarlo). Il dominio di f è quindi una regione del piano $x + y + z = 0$ limitata da un'ellisse. Nello svolgimento si utilizzino i moltiplicatori di Lagrange. Per risolvere un sistema può essere utile, dopo qualche aggiustamento, sommare i membri delle equazioni contenenti i moltiplicatori e utilizzare la relazione $x + y + z = 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Determinare un integrale generale reale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = -6x - 5y \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 3y'' - 4y = x + 1 \\ y(0) = -\frac{1}{4}, y'(0) = -\frac{1}{4}, y''(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (x - 5y) \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \, x^2 - 1 \leq y \leq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D y \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \, y \geq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.