

Analisi Matematica 2 - 7/9/12 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (x + y)^{\sin x + \sin y} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
(b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
(c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

- (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i .

Risposta.

2. (p. 3) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int \int_S (x^2 + y^2) ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, 0 \leq z \leq 2\} .$$

È sufficiente esprimere l'integrale di superficie attraverso un integrale di una funzione di una variabile.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t^5 \\ y = 5t + 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

nel punto corrispondente a $t = 1$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} x^2 dy,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$

orientata in modo che $(-2, 0)$ sia il punto iniziale e $(0, 2)$ il punto finale. Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \cos^n x, dx$, con $n \geq 2$ e simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di funzioni misurabili positive:

$$\int \int_D \frac{1}{y} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 < x \leq 1, 1 \leq y \leq \frac{1}{x}\};$$

dire se l'integrale è convergente o divergente positivamente.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 + 4 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \frac{1}{t^2+a^2} dt$, con $a \neq 1$, e simili.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + y'' = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x^2 dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \cos^n x, dx$, con $n \geq 2$ e simili.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} .$$

Svolgimento e risposta.