Analisi Matematica 2 - 8/1/13

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 - y, y^2 - xz, z^2 - xy) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(2, -1, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(2, -1, 1)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(2, -1, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(2, -1, 1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie:
$$\int\int_S x^2 \, ds \ ,$$
   dove
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ y^2 + z^2 = 4, \ 0 \leq x \leq 4\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \cos(xy) \ ;$$
determinare la derivata direzionale
$$D_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} f(1, 1) \ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo
$$\int_\Gamma x\,dx + x\,dy + x\,dz \ ,$$
dove Γ è l'arco semplice
$$\{(\cos t, \sin t, t); \ t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$
orientata in modo che $(1, 0, 0)$ sia il punto iniziale e $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ il punto finale. Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \cos^n x, dx$ o $\int \sin^n x, dx$, con $n \geq 2$ o simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione
$$f : \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x - 2y \ ,$$
   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin^2 x \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente $\int \sin^2 t \, dt$, con $a \neq 1$, o simili.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 4y' = \sin(2x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare in risultato):

$$\int\int_D (2x+y)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0,\ x+y \geq 1,\ x+2y \leq 2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del tetraedro D di vertici $(3,2,-1)$, $(1,-1,2)$, $(3,-2,1)$, $(1,3,2)$. Si chiede di non usare formule che diano direttamente il volume di un tetraedro, ma di calcolare il corrispondente integrale triplo.

Svolgimento e risposta.