Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Teorema sul cambiamento di variabile negli integrali di funzioni misurabili positive.** Siano A e B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un diffeomorfismo; sia $D \subset A$; sia D misurabile; sia $f : \varphi(D) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di spazio normale ad una sottovarietà differenziale in un punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m; sia $x_0 \in V$; allora lo spazio normale a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla derivata parziale di una funzione composta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; siano $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $B \subset \mathbf{R}^M$; sia $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $f(A) \subset B$; sia f differenziabile in a; sia g differenziabile in $f(a)$; sia $j = 1, 2, \ldots, N$; allora si ha $D_j(g \circ f)(a) = \ldots$.

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sul campo di vettori associato al differenziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f differenziabile; allora il campo di vettori associato a df è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
2. * Dare la definizione di integrale della costante $+\infty$. Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori in $\overline{\mathbf{R}}$.
3. * Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva convergente e di integrale divergente positivamente.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse y, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(y)$.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli, con proiezione del dominio sull'asse z, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(z)$..

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse** z**.** Sia $A \subset \mathbf{R}^3$; sia A misurabile; sia $p_3(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema di Schwarz.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; siano $k, h = 1, 2, \ldots, N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f, \sigma, \xi)$ è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; si dice che V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m se esiste D aperto di $\mathbf{R}^m$, se esiste $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$ tale che ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f :]0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y) \longrightarrow (x^{\sin x}, x^{\sin y}, y \log x)$; determinare la trasformazione lineare $f'(x, y)$. in un punto $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di equazione differenziale di forma normale.
2. *** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
3. * Dare la definizione di equazione differenziale a variabili separate.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separate (equivalenza con equazioni implicite ...).
5. ** Enunciare il teorema sul problema di Cauchy relativo ad equazione differenziale a variabili separate (equivalenza con un'equazione implicita ...).

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Definizione di sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, ..., φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; si dice che φ_1, φ_2, ..., φ_N è un sistema fondamentale di soluzioni di $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di derivabilità secondo una direzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; si dice che f è derivabile secondo la direzione e in a se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di gradiente in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora il gradiente di f in a è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di parte negativa di una funzione.** Sia A un insieme; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; allora la parte negativa di f è la funzione ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{2x+3}\, dx \; .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni implicite. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
2. *** Dare la definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.
3. * Dare la definizione di matrice di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$ ed enunciare il teorema che ne caratterizza le colonne.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la matrice della derivata.
5. ** Enunciare il teorema di Dini in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Teorema su estremanti relativi e gradiente.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla condizione sufficiente per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura $\mathrm{mis}(I)$ è ...
RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla sottovarietà cartesiana come sottovarietà parametrizzabile** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^{N-1}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^1; sia $V = \ldots$
RISPOSTA

[5]. (E) Determinare il gradiente ed il differenziale della seguente funzione scalare in un punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; esprimere il differenziale in forma canonica: $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2y + x$.
RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Enunciare il teorema sull'integrale sul prodotto cartesiano di due insiemi misurabili, per una funzione misurabile positiva.
2. * Definire l'immagine $G(x)$ di un punto mediante un insieme $G \subset A \times B$.
3. ** Enunciare il teorema sull'integrale su un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, per una funzione misurabile positiva.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse x, per funzioni misurabili positive.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse y, per funzioni misurabili positive.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla relazione fra differenziabilità e derivate direzionali.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia f di classe C^2; allora $\mathcal{H}f(a)$ è la matrice ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'equivalenza fra equazione differenziale lineare di ordine n e sistema lineare di n equazioni del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora l'equazione differenziale lineare d'ordine n, $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$, è equivalente al sistema di n ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow e^{xyz}$; sia $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$; determinare il grad $f(x, y, z)$, e $df(x, y, z)$; esprimere $df(x, y, z)$ attraverso i differenziali dx, dy, dz.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.
2. * Dare la definizione di sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.
3. **Perchè si può parlare di spazio vettoriale delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo?
4. Enunciare il teorema sulla dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.
5. ** Dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni e di integrale generale per un sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione dei simboli di Gauss E, F, G.** Sia D un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ derivabile parzialmente rispetto agli indici 1 e 2; sia $(u, v) \in D$; allora i simboli di Gauss $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ sono dati da ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ tale che $x_0 \in I$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema implicito di incognita $y(x)$, $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla espressione della primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali su traiettorie.**: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A connesso; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $a \in A$; allora una primitiva di ω è la funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $f(x) = \int_\varphi \omega$ dove φ ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di immagine di un punto in un grafico.** Siano A, B insiemi; sia $G \subset A \times B$; sia $x \in A$; l'insieme $G(x)$ è uguale a ...

RISPOSTA

[5]. (E) Trasformare il seguente integrale mediante cambiamento di variabile ponendo $\sqrt{x} = t$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx \,.$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di m-forma differenziale.
2. * Come risuta scritta una m forma definita su un aperto A di $\mathbf{R}^N$?
3. ** Dare la definizione di integrale di una m-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m.
4. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
5. *** Dare la definizione funzione derivabile in un punto secondo una direzione e di derivata direzionale. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Enunciare il teorema che lega differenziabilità e derivate direzionali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse z.** Sia $A \subset \mathbf{R}^3$; sia A misurabile; sia $p_3(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di due variabili positive.** Sia $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; sia $f \geq 0$; allora l'integrale $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta su traiettorie con gli stessi estremi.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia $\psi : [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine n di forma normale.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $a \in \mathbf{R}$; siano $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbf{R}$; sia $(a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A$; sia I intervallo non banale di $\mathbf{R}$ tale che $a \in I$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy di incognita $y(x)$,...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D x\, dxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \leq 1, x \geq y^2\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante il rapporto fra differenziabilità e derivate direzionali.
3. * Enunciare il teorema dell'invertibilità locale.
4. * Dare la definizione di diffeomorfismo locale ed enunziare e dimostrare il teorema che caratterizza i diffeomorfismi locali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di scomposizione di un intervallo.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $\sigma \subset I_{R^N}$; sia σ finita; sia $(\forall J \in \sigma)\, J \subset I$; si dice che σ è una scomposizione di I se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non vuoto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione implicita di incognita $y(x)$, $f(x, y) = 0$ se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni integrabili attraverso l'integrale della parte positiva e della parte negativa.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N}$; sia $f \in \mathcal{M}(A; \overline{\mathbf{R}})$; allora f è integrabile se e solo ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di una forma differenziale su una traiettoria:

$$\int_{\varphi} xydx + xdy \,,$$

dove $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (2t, 2 - t)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
2. *** Enunciare il teorema riguardante il cambiamento di variabile negli integrali di Lebesgue.
3. * Definire il cono di base E e vertice (x_0, y_0, z_0) e calcolarne il volume.
4. ** Calcolare il volume della regione limitata da un ellissoide.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Teorema sull'espressione dell'incremento di una funzione differenziabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla relazione fra continuità e differenziabilità.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della primitiva di una forma differenziale attraverso le derivate parziali.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$; sia $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx_i$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; allora f è una primitiva di ω se e solo se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di diffeomorfismo.** Siano A, B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow B$; si dice che f è un diffeomorfismo se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \sin x \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x)$.
4. * Dare la definizione di soluzione per un sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.
5. * Esprimere scalarmente il sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione di (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di lavoro.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia F 1-misurabile su M; sia F 1-integrabile su M; si chiama lavoro del campo di vettori F su M l'integrale ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di orientazione di uno spazio vettoriale reale.** Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita; sia $V \neq \{0\}$; sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle basi di V; siano $\mathcal{B}/\sim$ l'insieme quoziente di $\mathcal{B}$ rispetto alla relazione d'equivalenza delle basi equivalenti; si chiama una orientazione di V ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \cos x, dx \; .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di equazione differenziale di forma normale. Enunciare il teorema che caratterizza le soluzioni di un'equazione differenziale di forma normale (cioè che cosa significa che φ è soluzione di un'equazione di forma normale).
2. *** Dare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
3. *** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
4. ** Dare la definizione di sistema di equazioni differenziali di forma normale. Enunciare il teorema che caratterizza le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali di forma normale (cioè che cosa significa che φ è soluzione di un sistema di forma normale).
5. * Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un sistema di equazioni differenziali differenziale di forma normale.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Definizione di integrale generale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, ..., φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di una variabile negative.** Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; sia $f \leq 0$; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di derivabilità secondo una direzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; si dice che f è derivabile secondo la direzione e in a se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema di media integrale per funzioni continue.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f \in C(I)$; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. * Enunciare e dimostrare i teoremi sull'integrale su traiettorie con gli stessi punto iniziale e punto finale e su una traiettoria chiusa di una forma differenziale esatta.
5. * Dare un esempio di una forma differenziale chiusa e non esatta. Dimostrare che tale forma non è esatta.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Definizione di forma differenziale esatta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; si dice che ω è esatta se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di matrice jacobiana in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la matrice jacobiana di f in a è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di una variabile di segno arbitrario.** Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Espressione scalare di un sistema differenziale lineare.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R})$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}^N$; siano a, b continue; esprime il sistema scritto vettorialmente $y' = a(x)y + b(x)$ in forma scalare.

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale curvilineo: $\int_\gamma (x+y)\, ds$ dove γ è il segmento $[(1,2),(3,1)]$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$. Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di insieme integrabile.
2. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
3. *** Dare la definizione di integrale inferiore e di integrale superiore.
4. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
5. * Enunciare il teorema che lega l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue per funzioni di Riemann positive, su intervalli.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Teorema sul cambiamento di variabile negli integrali di funzioni misurabili positive.** Siano A e B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un diffeomorfismo; sia $D \subset A$; sia D misurabile; sia $f : \varphi(D) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura $\text{mis}(I)$ è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di derivabilità parziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; si dice che f è derivabile parzialmente secondo l'indice k in a se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari lineari non omogeneo.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}^N$; siano a, b continue; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo $y' = a(x)y$; sia ψ una soluzione del sistema non omogeneo $y' = a(x)y + b(x)$; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il gradiente della seguente funzione: $f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \frac{e^t}{t}\, dt$, $(x, y) \in \{(u, v) \in \mathbf{R}^2, u + v > 0, u - v > 0\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di misura di un insieme rispetto ad una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
2. ** Utilizzando l'espressione del graamiano per $m = 2$, dire come si esprime l'area di una di un sottoinsieme misurabile di una superficie differenziale parametrizzabile.
3. ** Enunciare il teorema sulla espressione della misura di un sottoinsieme di una ipersuperficie cartesiana.
4. ** Calcolare la lunghezza di una circonferenza.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Teorema sull'espressione di un integrale curvilineo.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 1-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f 1-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha $\int_A f\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla relazione fra continuità e differenziabilità.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di equazione caratteristica di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$; allora l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale lineare (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di integrale di Lebesgue di una funzione continua positiva su un compatto** Sia K un compatto di $\mathbf{R}^N$; sia $f : K \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia $f \geq 0$; allora l'integrale di Lebesgue di f è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \log x \, dx \; .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di forma m-lineare alternante.
2. * Definire lo spazio vettoriale $\mathrm{A}_m(\mathbf{R}^N)$; dire a che cosa è uguale pe $m > N$.
3. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
4. *** Dare la definizione funzione derivabile in un punto secondo una direzione e di derivata direzionale. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Enunciare il teorema che lega differenziabilità e derivate direzionali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Teorema sull'espressione di un integrale curvilineo.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 1-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f 1-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha $\int_A f\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di gradiente in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora il gradiente di f in a è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'integrale particolare di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti con termine noto $P(x)e^{\alpha x}$, con α radice dell'equazione caratteristica.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$; sia $\alpha \in \mathbf{C}$; sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti complessi non nullo; sia $p = \deg(P(x))$; sia m la molteplicità di α nel polinomio caratteristico $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$; allora esiste uno ed uno solo polinomio a coefficienti complessi $Q(x)$ di grado p tale che ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare un integrale generale di $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Quale è la base canonica dello spazio vettoriale $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$. qual'è la coordinata di una forma lineare rispetto a tale base?
2. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
3. *** Quale espressione ha $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
4. ** Esprimere $df(a)(h)$ attraverso un prodotto scalare.
5. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.

RISPOSTA