Analisi Matematica 2 - 15/6/13 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = \frac{xe^y}{z} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S y \, dz \wedge dx \ ,$$

   dove S è il triangolo chiuso di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 3, 5)$, $(4, 4, 5)$ orientato in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 >$ 0.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{y}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma x\,ds\ ,$$

dove γ è l'arco semplice

$$\{(x,y);\ y=1-x^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}\longrightarrow \mathbf{R}, (x,y)\longrightarrow 3x+2y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (2x - y)\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ y \leq x\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Verificare le condizioni di monogenia complesse e reali per la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow 1 + z + z^2 \ ;$$

verificare le formule sull'espressione della derivata; si chiede di non utilizzare nel calcolo delle derivate parziali, la derivabilità delle funzioni di variabile complessa.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1 - \cos z}{z^3} \ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z+2} \ ;$$

(a) determinare il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f;

(b) determinare la serie di Taylor di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 15/6/13 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = \frac{ye^{z+1}}{x-1} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S x\, dy \wedge dz \ ,$$

   dove S è il triangolo chiuso di vertici $(0, 0, 0)$, $(-1, 2, 3)$, $(1, 2, -3)$ orientato in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1+4x^2y^2}\,dx + \frac{y}{1+4x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+4x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+4x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma y\,ds\ ,$$

dove γ è l'arco semplice

$$\{(x,y);\ x=y^2,\, y\geq 0,\, x\leq 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in \mathbf{R}^2;\ 1\leq x^2+y^2\leq 9\}\longrightarrow \mathbf{R}, (x,y)\longrightarrow 2x-3y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{2y^2+3}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y' = 3x + 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x - 3y)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq x\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Verificare le condizioni di monogenia complesse e reali per la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow 2 - z + z^2 \ ;$$

verificare le formule sull'espressione della derivata; si chiede di non utilizzare nel calcolo delle derivate parziali, la derivabilità delle funzioni di variabile complessa.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2} \ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-3\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z+3} \ ;$$

(a) determinare il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f;

(b) determinare la serie di Taylor di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 15/6/13 - Compito 1 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \frac{(z+1)e^x}{y+1} \;;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z \, dx \wedge dy \; ,$$

   dove S è il triangolo chiuso di vertici $(0,0,0)$, $(3,-1,-2)$, $(-1,2,4)$ orientato in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+9x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+9x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1+9x^2y^2}\,dx + \frac{y}{1+9x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma x\,ds\ ,$$

dove γ è l'arco semplice

$$\{(x,y);\ y=x^2-1,\ x\geq 0, y\leq 0\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ 4\leq x^2+y^2\leq 9\}\longrightarrow\mathbf{R}, (x,y)\longrightarrow 2x-y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{3y^2+2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' = -x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (2x+3y)\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4,\ -x \leq y \leq x\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2-1 \leq z \leq 0\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Verificare le condizioni di monogenia complesse e reali per la funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow 1 - 2z - z^2 \; ;$$

verificare le formule sull'espressione della derivata; si chiede di non utilizzare nel calcolo delle derivate parziali, la derivabilità delle funzioni di variabile complessa.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z - \sin z}{z^5} \ .$$

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-4\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1}{z+4} \ ;$$

(a) determinare il massimo cerchio aperto di centro 0 contenuto nel dominio di f;

(b) determinare la serie di Taylor di punto iniziale 0 ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Taylor.

Svolgimento e risposta.