Analisi Matematica 2 - 14/6/13 - Compito 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \frac{xe^y}{z} ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S y\, dz \wedge dx ,$$

   dove S è il triangolo chiuso di vertici $(0,0,0)$, $(1,3,5)$, $(4,4,5)$ orientato in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

   Svolgimento e risposta.

2

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{y}{1+x^2y^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma x\,ds\ ,$$

dove γ è l'arco semplice

$$\{(x,y);\ y=1-x^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y)\longrightarrow 3x+2y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

4

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (2x - y)\, dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ y \leq x\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \neq 0\}$$

b) Per ogni $(x,y,z) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{e^y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{xe^y}{z^2}$$

Si ha quindi

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \left(\frac{e^y}{z},\ \frac{xe^y}{z},\ -\frac{xe^y}{z^2} \right)$$

c) Si ha

$$df(x,y,z): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\quad (h_1,h_2,h_3) \longrightarrow \frac{e^y}{z} h_1 + \frac{xe^y}{z} h_2 - \frac{xe^y}{z^2} h_3$$

d) Si ha

$$df(x,y,z) = \frac{e^y}{z}\, dx + \frac{xe^y}{z}\, dy - \frac{xe^y}{z^2}\, dz$$

Esercizio 2

Sia

$$T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\}$$

Una parametrizzazione di S non orientata è la funzione

$$\varphi : T \to S \quad , \quad (u,v) \to u(1,3,5) + v(4,4,5)$$

La funzione φ si scrive

$$\begin{cases} x = u + 4v \\ y = 3u + 4v \\ z = 5u + 5v \end{cases} \quad , \ (u,v) \in T$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha

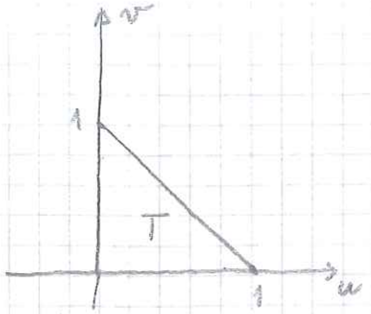
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 < 0$$

Quindi l'orientazione di S definita da φ è tale che il versore normale ha la terza componente negativa. Quindi φ è un'orientazione di $-S$

Si ha

$$\iint_S y \, dz \wedge dx = - \iint_{-S} y \, dz \wedge dx =$$

$$= - \iint_T (3u + 4v) \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} du\, dv = -15 \iint_T (3u + 4v) \, du\, dv$$



Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni $u \in [0,1]$ si ha $T(u) = [0, 1-u]$

Si ha quindi

$$-15 \iint_T (3u + 4v)\, du\, dv =$$

$$= -15 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (3u + 4v)\, dv \right) du =$$

$$= -15 \int_0^1 \left[3uv + 2v^2 \right]_0^{1-u} du =$$

$$= -15 \int_0^1 \left(3u(1-u) + 2(1-u)^2 \right) du =$$

$$= -15 \int_0^1 (3u - 3u^2 + 2 - 4u + 2u^2)\, du =$$

$$= -15 \int_0^1 (-u^2 - u + 2)\, du = -15 \left[-\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u \right]_0^1 =$$

$$= -15 \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = -15 \, \frac{7}{6} = -\frac{35}{2}$$

Esercizio 3

Indicata con ω la forma differenziale, si ha $\operatorname{dom}(\omega) = R^2$

Sia $f: R^2 \to R$, $(x,y) \to \operatorname{Arctg}(xy)$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}\, y = \frac{y}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}\, x = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

Quindi f è una primitiva di ω.

Quindi ω è esatta.

L'insieme delle primitive di ω è

$$\{f + c;\ c \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4

Indicata con ω la forma differenziale, si ha

$\mathrm{dom}(\omega) = \mathbb{R}^2$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{1+x^2y^2} = -x \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$$

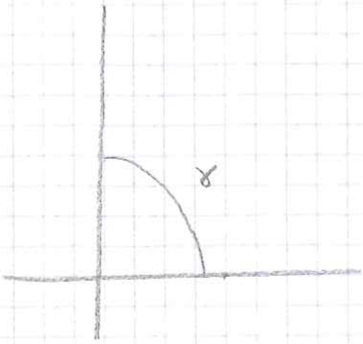
e

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{1+x^2y^2} = -y \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

Quindi la forma differenziale non è chiusa.

Quindi la forma differenziale non è esatta

Esercizio 5



Una parametrizzazione di γ è data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

Per ogni $t \in [0,1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, -2t)$; quindi

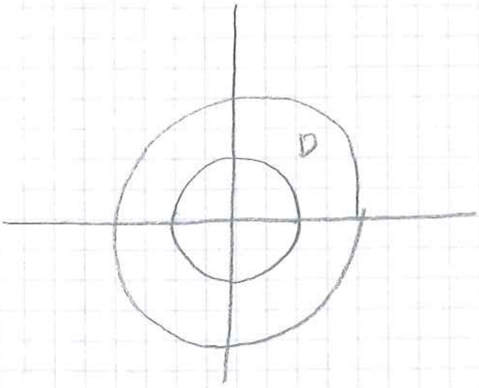
$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

Si ha quindi

$$\int_\gamma x\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{8}\int_0^1 (1+4t^2)^{\frac{1}{2}}(8t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$$

Esercizio 6



a) Sia D il dominio di f.
Essendo D compatto ed essendo f continua, f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f.

Sia $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$.

Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \neq 0$.

Si ha quindi

$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$

Sia

$F_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 = 4 \}$

$F_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 = 1 \}$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2$

Sia

$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \to x^2+y^2-4$

F_1 è una sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g(x,y)=0$

Indichiamo ancora con f la funzione

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \to 3x+2y$

Se $(x,y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\text{grad} f(x,y) = \lambda \ \text{grad} \ g_1(x,y)$

cioè tale che

$(3, 2) = \lambda (2x, 2y)$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni.
Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$x = \dfrac{3}{2\lambda} \quad , y = \dfrac{2}{2\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 4$$

Quindi

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = 4$$

Quindi $13 = 16\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \dfrac{13}{16}$;

quindi $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

Per $\lambda = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ si ha $x = \dfrac{6}{13}\sqrt{13}$, $y = \dfrac{4}{13}\sqrt{13}$

Per $\lambda = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ si ha $x = -\dfrac{6}{13}\sqrt{13}$, $y = -\dfrac{4}{13}\sqrt{13}$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{6}{13}\sqrt{13}, \frac{4}{13}\sqrt{13} \right), \left(-\frac{6}{13}\sqrt{13}, -\frac{4}{13}\sqrt{13} \right) \right\}$$

Sia

$g_2 : R^2 \longrightarrow R$, $(x,y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$

F_2 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 1, di equazione cartesiana $g_2(x,y) = 0$

Se $(x,y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\text{grad}\, f(x,y) = \lambda\, \text{grad}\, g_2(x,y)$$

cioè tale che

$$(3,2) = \lambda(2x, 2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni.

Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

Quindi

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = 1$$

Quindi $13 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{13}{4}$; quindi

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x = \frac{3}{13}\sqrt{13}$, $y = \frac{2}{13}\sqrt{13}$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x = -\frac{3}{13}\sqrt{13}$, $y = -\frac{2}{13}\sqrt{13}$

Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}\right), \left(-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}\right) \right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{6}{13}\sqrt{13}, \frac{4}{13}\sqrt{13}\right), \left(-\frac{6}{13}\sqrt{13}, -\frac{4}{13}\sqrt{13}\right), \left(\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}\right), \right.$$

$$\left. \left(-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\sqrt{13}\right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{6}{13}\sqrt{13}, \frac{4}{13}\sqrt{13}\right) = 2\sqrt{13}$$

$$f\left(-\frac{6}{13}\sqrt{13}, -\frac{4}{13}\sqrt{13}\right) = -2\sqrt{13}$$

$$f\left(\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}\right) = \sqrt{13}$$

$$f\left(\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}\right) = -\sqrt{13}$$

Si ha quindi $\max(f) = 2\sqrt{13}$, $\min(f) = -2\sqrt{13}$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili definita per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^*$

Il problema di Cauchy è equivalente a

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \; y \in]0, +\infty[$$

cioè a

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}\, y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni y tali che $0 \in \mathrm{dom}\, y$:

$$\int_1^y \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = \int_0^x dt \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$$

cioè

$$\frac{1}{2}\int_1^y (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\, 2t\, dt = x \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$$

cioè

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^y = x \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$$

cioè

$$\sqrt{y^2+1} - \sqrt{2} = x \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$$

cioè $\sqrt{y^2+1} = \sqrt{2} + x \quad , x \in R, \ y \in]0,+\infty[$

Se che

$\sqrt{2} + x \geq 0$; quindi $x \geq -\sqrt{2}$

Quindi l'equazione implicita sopra

è equivalente a

$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{2} + x$, $x \in [-\sqrt{2}, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

cioè a

$y^2+1 = (\sqrt{2}+x)^2$, $x \in [-\sqrt{2}, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

cioè a

$y^2 = (\sqrt{2}+x)^2 - 1$, $x \in [-\sqrt{2}, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

L'equazione di secondo grado $(\sqrt{2}+x)^2 - 1 = 0$

è equivalente a $\sqrt{2} + x = \pm 1$; ha quindi

soluzioni $x = -\sqrt{2} \pm 1$

Si ha

$(\sqrt{2}+x)^2 - 1 > 0$; quindi $x < -\sqrt{2} - 1$ o $x > -\sqrt{2} + 1$
Essendo $x \geq -\sqrt{2}$, si ha $x > -\sqrt{2} + 1$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$y^2 = (\sqrt{2}+x)^2 - 1$, $x \in]-\sqrt{2}+1, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

cioè a

$y = \pm\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}$, $x \in]-\sqrt{2}+1, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

cioè, essendo $y \in]0, +\infty[$

$y = \sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}$, $x \in]-\sqrt{2}+1, +\infty[$, $y \in]0, +\infty[$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi :]-\sqrt{2}+1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \to \sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Esercizio 8

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$\lambda^2 + 4\lambda = 0$ cioè

$\lambda(\lambda+4) = 0$

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -4$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-4x}$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$\psi(x) = x(A+Bx)$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$\psi(x) = Ax + Bx^2$

Quindi

$\psi'(x) = A + 2Bx$

$\psi''(x) = 2B$

Quindi φ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$2B + 4(A + 2Bx) = x$$

Quindi se e solo se

$$\begin{cases} 8B = 1 \\ 2B + 4A = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} B = \frac{1}{8} \\ A = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{8}x^2$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}x^2$$

Si ha

$$y'(x) = -4c_2 e^{-4x} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}x$$

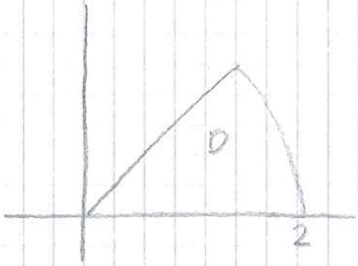
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_2 - \frac{1}{16} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{64} \\ c_1 = \frac{1}{64} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{64} - \frac{1}{64}e^{-4x} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}x^2$$

Esercizio 9



Una parametrizzazione in misura di D è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in [0,2] \times [0, \frac{\pi}{4}]$$

Per ogni $(\rho, t) \in dom(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

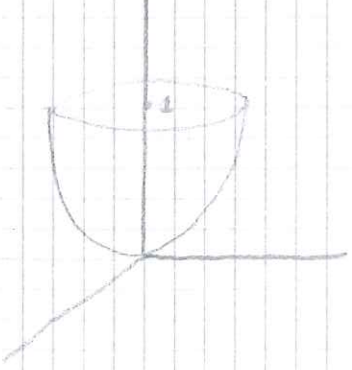
$$\iint_D (2x - y)\, dx\, dy = \iint_{[0,2]\times[0,\frac{\pi}{4}]} (2\rho\cos t - \rho \sin t)\, \rho\, d\rho\, dt =$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos t - \sin t)\, dt\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 \cdot \left[2 \sin t + \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{8}{3}\left(2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{8}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4\sqrt{2} - \frac{8}{3}$$

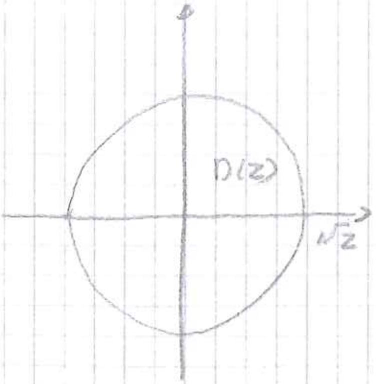
Esercizio 10 (1° modo)



Si ha $p_3(D) = [0, 1]$

Per ogni $z \in [0,1]$ si ha

$$D(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le z\}$$



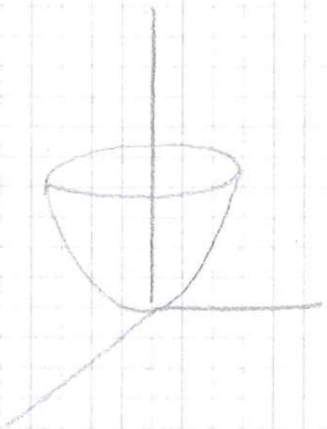
Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \Big(\iint_{D(z)} dx\,dy \Big)\, dz = \int_0^1 \text{mis}(D(z))\, dz =$$

$$= \int_0^1 \pi z\, dz = \pi \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 10 (2° modo)



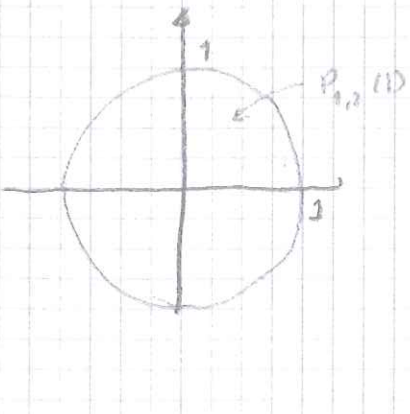
Si ha $P_{1,2}(D) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2 \le 1 \}$

Per ogni $(x,y) \in P_{1,2}(D)$ si ha

$D(x,y) = [x^2+y^2, 1]$

Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz =$$



$$= \iint_{P_{1,2}(D)} \Big(\int_{x^2+y^2}^1 dz \Big)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{P_{1,2}(D)} \big(1 - (x^2+y^2)\big)\, dx\,dy$$

Una parametrizzazione in misura di $P_{1,2}(D)$ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in dom(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho,t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\iint_{P_{1,2}} (1-(x^2+y^2))\, dx\, dy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1-\rho^2)\rho \, d\rho\, dt =$$

$$= \left(\int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$