Analisi Matematica 2 - 25/6/13 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy)) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S y \, ds \ ,$$

   dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x + 2y + z = 2\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(\cos^2 t, \sin(t^2)) \; ;$$

esprimere $f'(t)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_\Gamma y^2 \, dx \; ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \; x^2 + y^2 = 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0\} \; ,$$

di punto iniziale $(1,0)$ e di punto finale $(0,1)$.

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \; 0 \leq y \leq 1 - x^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 5x + 3y \; ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases},$$

dove $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0,\ y^2 \leq x \leq 2-2y\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}-\{-1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow e^{\frac{z}{z+1}} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C}-\{1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} ;$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 1 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z-1| = 1\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 1 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo direttamente attraverso la definizione e indirettamente applicando un teorema; verificare l'uguaglianza dei risultati:

$$\int_\Gamma z\,dz\ ,$$

dove Γ è il segmento orientato

$$[-1+i, 3+2i]$$

di punto iniziale $-1+i$ e punto finale $3+2i$.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 25/6/13 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (x \cos y, y \sin(5x)) \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S y \, ds \; ,$$

   dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; 2x + y + 2z = 2\} \; .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(\cos\sin(2t), \sin\cos t)) \ ;$$

esprimere $f'(t)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_\Gamma x^2 \, dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \ ,$$

di punto iniziale $(1, 0)$ e di punto finale $(0, 1)$.

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 - y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x + 5y \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{4y^2-9}}{y} \\ y(0) = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases},$$

dove $y \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.
Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D (y-x)\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0,\ 2y-2 \leq x \leq -y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D y^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+z^2 \leq 9,\ 0 \leq y \leq 5\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C} - \{-2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow e^{\frac{2z}{z+2}} \ .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{e^{3z}}{(z+1)^3} \ ;$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro -1 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z+1| = 1\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale -1 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo direttamente attraverso la definizione e indirettamente applicando un teorema; verificare l'uguaglianza dei risultati:

$$\int_\Gamma z\,dz\ ,$$

dove Γ è il segmento orientato

$$[-1+i, 2-i]$$

di punto iniziale $-1+i$ e punto finale $2-i$.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 25/6/13 - Compito 2 - Versione 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = (\sin x \cos y, x\cos(5y)) \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S y\, ds \; ,$$

   dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; \; x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0, \, 3x + 2y + 6z = 6\} \; .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(e^{\sin t}, t^2 \sin(5t)) \ ;$$

esprimere $f'(t)$ attraverso le derivate parziali di g.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_\Gamma y \, dx \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\} \ ,$$

di punto iniziale $(1, 0)$ e di punto finale $(-1, 0)$.

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ x^2 - 1 \leq y \leq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 3y \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{9y^2-4}}{y} \\ y(0) = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases},$$

dove $y \in]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$.
Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = -8\sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D (x+y)\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0,\, y^2 - 1 \leq x \leq -y\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D x^2\, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y^2 + z^2 \leq 1,\, 0 \leq x \leq 4\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow e^{\frac{1}{2z-3}} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-1\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{e^{5z}}{(z+1)^2} ;$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro -1 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z+1| = 1\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale -1 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo direttamente attraverso la definizione e indirettamente applicando un teorema; verificare l'uguaglianza dei risultati:

$$\int_\Gamma z\,dz\ ,$$

dove Γ è il segmento orientato

$$[-1-i, 3+2i]$$

di punto iniziale $-1-i$ e punto finale $3+2i$.

Svolgimento e risposta.