

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int \int_S y \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + z = 2\} .$$

Svolgimento e risposta.

- 2
3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, t \rightarrow g(\cos^2 t, \sin(t^2)) ;$$

esprimere $f'(t)$ attraverso le derivate parziali di g .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_{\Gamma} y^2 dx ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\} ,$$

di punto iniziale $(1, 0)$ e di punto finale $(0, 1)$.

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq y \leq 1 - x^2\} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow 5x + 3y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases},$$

dove $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Si esprima la soluzione (massimale) φ nella forma $\varphi : U \longrightarrow V, x \longrightarrow \mathcal{T}\{x\}$ esplicitando gli insiemi U e V e l'espressione $\mathcal{T}\{x\}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int \int_D (x+y) \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, y^2 \leq x \leq 2-2y\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z^2 \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\} .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ b) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y \cos(xy), -y \sin(xy))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x \cos(xy), -x \sin(xy))$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ -y \sin(xy) & -x \sin(xy) \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f'(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \rightarrow (y \cos(xy)h_1 + x \cos(xy)h_2, -y \sin(xy)h_1 - x \sin(xy)h_2)$$

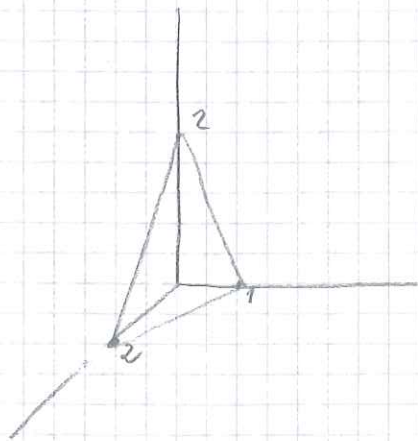
Esercizio 2

Si ha

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u + 2v \leq 2\}$$

Una parametrizzazione di S è data da

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 - u - 2v \end{cases} \quad (u, v) \in T$$



Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si ha

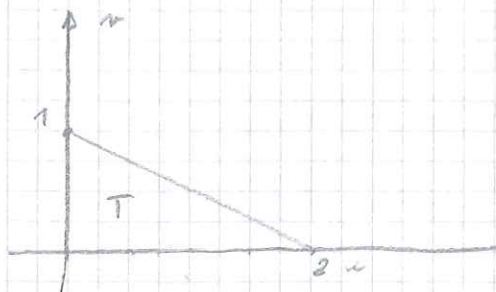
$$E(u, v) = 2, \quad F(u, v) = 2, \quad G(u, v) = 5$$

Si ha

$$\sqrt{E(u, v)G(u, v) - (F(u, v))^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}$$

Si ha quindi

$$\iint_S y \, dS = \iint_T v \sqrt{6} \, du \, dv = \sqrt{6} \iint_T v \, du \, dv$$



Si ha

$$P_2(T) = [0, 1] \quad \text{e per ogni}$$

$$v \in [0, 1] \quad \text{si ha}$$

$$T(v) = 2 - 2v \quad \text{si ha quindi}$$

$$\sqrt{6} \iint_T v \, du \, dv = \sqrt{6} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2v} v \, du \right) dv =$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 v(2 - 2v) \, dv = 2\sqrt{6} \int_0^1 (v - v^2) \, dv =$$

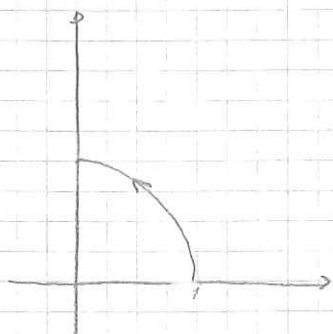
$$= 2\sqrt{6} \left[\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{3} v^3 \right]_0^1 = 2\sqrt{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 2\sqrt{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$$

Esercizio 3

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(t) &= D_1 g(\cos^2 t, \sin(t^2)) \cdot 2 \cos t (-\sin t) + \\ &\quad + D_2 g(\cos^2 t, \sin(t^2)) \cos(t^2) \cdot 2t = \\ &= -2 D_1 g(\cos^2 t, \sin(t^2)) \cos t \sin t + 2t D_2 g(\cos^2 t, \sin(t^2)) \cos(t^2) \end{aligned}$$

Esercizio 4



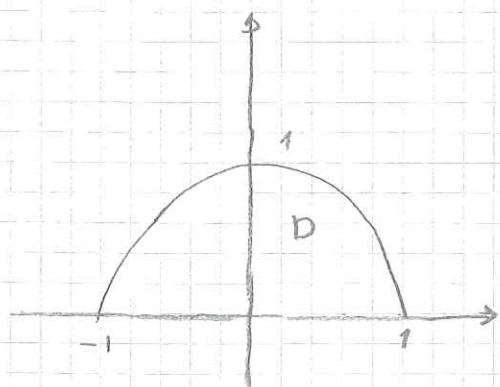
Una parametrizzazione di Γ è

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (-\sin t) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sin t dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = - \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (-\sin t) dt = \\ &= \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 5



a) S.e. $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto e f continua per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo

b) S.e. E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f

S.e. $(x, y) \in D^0$; n.h.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \neq 0$

quindi n.h.e.

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

S.e.

$$F_1 = [(-1, 0), (1, 0)]$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 1 - x^2, x \in]-1, 1[\}$$

S.h.e.

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2$$

S.e. $(x, y) \in F_1$; n.h.e. $y = 0$ e $x \in [-1, 1]$. S.h.e. quindi

$$f(x, y) = 5x$$

S.e.

$$g_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5x$$

S.e. E_1 l'insieme dei punti di massimo e minimo di g_1 .

Essendo g_1 strettamente crescente, n.h.e.

$$E_1 = \{-1, 1\}$$

S.h.e. quindi

$$E \cap F_1 \subset \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

Sia $(x, y) \in F_2$; allora $y = 1 - x^2$ e $x \in]-1, 1[$

quindi

$$f(x, y) = f(x, 1 - x^2) = 5x + 3(1 - x^2) = -3x^2 + 5x + 3$$

Sia

$$g_2:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -3x^2 + 5x + 3$$

Sia E_2 l'insieme degli estremanti di g_2

Sia $x \in]-1, 1[$; allora

$$g_2'(x) = -6x + 5$$

Sia che $g_2'(x) = 0$ ne consegue $-6x + 5 = 0$, cioè ne segue

$$\text{che } x = \frac{5}{6}$$

Sia che quindi

$$E_2 \subset \left\{ \frac{5}{6} \right\}$$

$$\text{Per } x = \frac{5}{6}, \text{ allora } y = 1 - x^2 = \frac{11}{36}$$

Sia che quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{36} \right) \right\}$$

Sia che quindi

$$E \subset \left\{ (1, 0), (-1, 0), \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{36} \right) \right\}$$

Sia che

$$f(1, 0) = 5, \quad f(-1, 0) = -5$$

$$f\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{36}\right) = \frac{61}{12}$$

Si ha $-5 < 5 < \frac{61}{12}$. Si ha quindi

$$\max(f) = \frac{61}{12}, \quad \min(f) = -5$$

Esercizio 6

Si tratta di un'equazione a variabili separabili
definite per $x \in \mathbb{R}$ e per $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} y' = 1 \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

Tale problema di Cauchy è equivalente alla
equazione implicita con soluzione $y(x)$ tale che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_{\sqrt{2}}^y \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int_0^x dt, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

caso 1

$$\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^y (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (2t) dt = x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

caso 2

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\sqrt{2}}^y = x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

caso 3

$$\sqrt{y^2 - 1} - 1 = x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

caso 4

$$\sqrt{y^2 - 1} = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]1, +\infty[$$

Si ha $x + 1 > 0$; quindi $x > -1$

L'equazione implicata sopra è equivalente a

$$\sqrt{y^2 - 1} = x + 1, \quad x \in]-1, +\infty[, y \in]1, +\infty[$$

quindi a

$$y^2 - 1 = (x + 1)^2, \quad x \in]-1, +\infty[, y \in]1, +\infty[$$

quindi a

$$y^2 = (x + 1)^2 + 1, \quad x \in]-1, +\infty[, y \in]1, +\infty[$$

Si ha $(x + 1)^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in]-1, +\infty[$

quindi l'equazione implicata sopra è equivalente a

$$y = \pm \sqrt{(x+1)^2 + 1}, \quad x \in]-1, +\infty[, \quad y \in]1, +\infty[$$

quindi, essendo $y > 0$ a

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in]-1, +\infty[, \quad y \in]1, +\infty[$$

è la soluzione del problema di Cauchy e quindi la funzione

$$\varphi:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

cioè

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ doppie

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos x, \quad \varphi_2(x) = \sin x, \quad \varphi_3(x) = x \cos x, \quad \varphi_4(x) = x \sin x.$$

Essendo i soluzioni dell'equazione caratteristica di molteplicità 2, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x^2 (A \cos x + B \sin x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha:

$$\psi(x) = Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x$$

$$\psi'(x) = 2Ax \cos x - Ax^2 \sin x + 2Bx \sin x + Bx^2 \cos x$$

$$\psi''(x) = 2A \cos x - 2Ax \sin x - 2Ax \sin x - Ax^2 \cos x + 2B \sin x$$

$$+ 2Bx \cos x + 2Bx \cos x - Bx^2 \sin x =$$

$$= -Ax^2 \cos x - Bx^2 \sin x + 4Bx \cos x - 4Ax \sin x + 2A \cos x + 2B \sin x$$

$$\psi'''(x) = -2Ax \cos x + Ax^2 \sin x - 2Bx \sin x - Bx^2 \cos x + 4B \cos x$$

$$- 4Bx \sin x - 4A \sin x - 4Ax \cos x - 2A \sin x + 2B \cos x =$$

$$= -Bx^2 \cos x + Ax^2 \sin x - 6Ax \cos x - 6Bx \sin x + 6B \cos x - 6A \sin x$$

$$\psi^{(4)}(x) = -2Bx \cos x + Bx^2 \sin x + 2Ax \sin x + Ax^2 \cos x - 6A \cos x$$

$$+ 6Ax \sin x - 6B \sin x - 6Bx \cos x - 6B \sin x - 6A \cos x =$$

$$= Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x - 8Bx \cos x + 8Ax \sin x - 12A \cos x - 12B \sin x.$$

La funzione ψ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x - 8Bx \cos x + 8Ax \sin x - 12A \cos x - 12B \sin x$$

$$+ 2(-Ax^2 \cos x - Bx^2 \sin x + 4Bx \cos x - 4Ax \sin x + 2A \cos x + 2B \sin x)$$

$$+ Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x = \sin x$$

cioè se e solo se

$$-8A \cos x - 8B \sin x = \sin x$$

quindi se e solo se

$$A=0 \quad \text{e} \quad -8B=1; \quad \text{quindi} \quad A=0 \quad \text{e} \quad B=-\frac{1}{8}$$

$$\text{Si ha quindi} \quad \psi(x) = -\frac{1}{8}x^2 \sin x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \cos x - C_3 x \sin x + C_4 \sin x \\ &\quad + C_4 x \cos x - \frac{1}{4} x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \cos x = \\ &= (C_2 + C_3) \cos x + (-C_1 + C_4) \sin x + C_4 x \cos x - C_3 x \sin x \\ &\quad - \frac{1}{4} x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= -(C_2 + C_3) \sin x + (-C_1 + C_4) \cos x + C_4 \cos x - C_4 x \sin x \\ &\quad - C_3 \sin x - C_3 x \cos x - \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} x \cos x - \frac{1}{4} x \cos x \\ &\quad + \frac{1}{8} x^2 \sin x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-C_1 + 2C_4) \cos x + (-C_2 - 2C_3) \sin x - C_3 x \cos x - C_4 x \sin x \\ &- \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{8} x^2 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= -(-C_1 + 2C_4) \sin x + (-C_2 - 2C_3) \cos x - C_3 \cos x + C_3 x \sin x \\ &\quad - C_4 \sin x - C_4 x \cos x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{4} x \sin x + \frac{1}{8} x^2 \cos x = \\ &= (-C_2 - 3C_3) \cos x + ((C_1 - 3C_4) \sin x - C_4 x \cos x \\ &\quad + C_3 x \sin x - \frac{3}{4} \cos x + \frac{3}{4} x \sin x + \frac{1}{8} x^2 \cos x \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_4 = 0 \\ -c_2 - 3c_3 - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

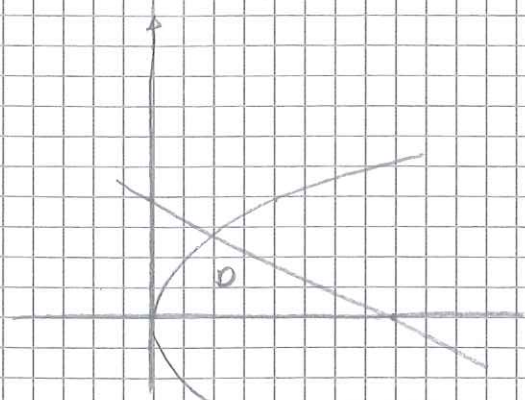
cioè

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_3 = -\frac{3}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Boundary è quindi

$$\varphi(x) = \frac{3}{8} \sin x - \frac{3}{8} x \cos x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$$

Esercizio 8



L'intersezione delle parabole $x = y^2$ e della retta $x = 2 - 2y$ è data dalle soluzioni di

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2 - 2y \end{cases}$$

Si ha $y^2 = 2 - 2y$; quindi

$$y^2 + 2y - 2 = 0; \quad \text{quindi } y = -1 \pm \sqrt{3}$$

Si ha quindi $P_2(D) = [0, \sqrt{3}-1]$

Per ogni $y \in [0, \sqrt{3}-1]$ si ha

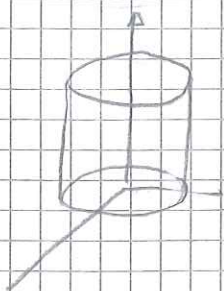
$$D(y) = [y^2, 2-2y]$$

Si ha quindi

$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt{3}-1} \left(\int_{y^2}^{2-2y} (x+y) \, dx \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sqrt{3}-1} \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_{y^2}^{2-2y} dy = \\
&= \int_0^{\sqrt{3}-1} \left(\frac{1}{2} (2-2y)^2 + y(2-2y) - \frac{1}{2} y^4 - y^3 \right) dy = \\
&= \int_0^{\sqrt{3}-1} \left(2 - 4y + 2y^2 + 2y - 2y^2 - \frac{1}{2} y^4 - y^3 \right) dy = \\
&= \int_0^{\sqrt{3}-1} \left(-\frac{1}{2} y^4 - y^3 - 2y + 2 \right) dy = \\
&= \left[-\frac{1}{10} y^5 - \frac{1}{4} y^4 - y^2 + 2y \right]_0^{\sqrt{3}-1} = \\
&= -\frac{1}{10} (\sqrt{3}-1)^5 - \frac{1}{4} (\sqrt{3}-1)^4 - (\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1) = \\
&= -\frac{44\sqrt{3}-76}{10} - \frac{28-16\sqrt{3}}{4} - (4-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}-2 = \\
&= -\frac{22\sqrt{3}-38}{5} - 7 + 4\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = \\
&= \frac{38-22\sqrt{3}}{5} - 13 + 8\sqrt{3} = \frac{38-22\sqrt{3}-65+40\sqrt{3}}{5} = \\
&= \frac{18\sqrt{3}-27}{5} = \frac{9}{5} (2\sqrt{3}-3)
\end{aligned}$$

Esercizio 9 (10 punti)



Sicché $p_3(D) = [0, 3]$ e per ogni

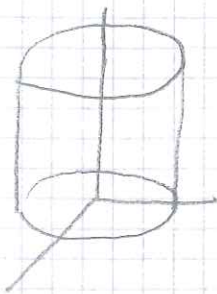
$z \in [0, 3]$ si ha

$$D(z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z^2 dx dy dz &= \int_0^3 \left(\iint_{D(z)} z^2 dx dy \right) dz = \\
 &= \int_0^3 z^2 \text{mis}(D(z)) dz = \int_0^3 z^2 4\pi dz = \\
 &= 4\pi \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^3 = 36\pi
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 (2° modulo)



$$\text{Si ha } A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

$$\text{Si ha } D = A \times [0, 3]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z^2 dx dy dz &= \\
 &= \left(\iint_A dx dy \right) \left(\int_0^3 z^2 dz \right) = \text{mis}(A) \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^3 = 36\pi
 \end{aligned}$$