Analisi Matematica 2 - 10/7/13 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (x^2 - 3y, xy + y^2) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 2)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 2)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 2)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1, 2)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale
$$\int\int_S x\, dy \wedge dz \ ,$$
   dove S è la superficie
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \ ,$$
   orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$, con $z \neq 0$, sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

   N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} e^{x^2+y^2}+x+y-1=0 \\ y(0)=0 \end{cases} ,$$

(a) provare che esiste un intervallo aperto I, tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I;

(b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione

$$\int_\gamma y^2\, ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2;\ (x-1)^2+(y-1)^2=4\} .$$

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y)\in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y)\longrightarrow 2x-5y ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y + 1 \\ x(0) = 0, \; y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = e^x \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 0, \, y''(0) = \frac{1}{4}, \, y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x^2 + y)\, dxdy \ ,$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(-1,2)$, $(-3,0)$, $(-2,-2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^3\, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z,\ 1 \le z \le 2\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z - \sin z}{z^3} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z - \sin z}{z^3} .$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 0 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo :

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2-1}\, dz \ ,$$

dove Γ è la circonferenza

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 2\}$$

orientata canonicamente.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 10/7/13 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (xy + x^2, y^2 - 3x) \; ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(2, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(2, 1)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(2, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(2, 1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale
$$\int\int_S y \, dx \wedge dz \; ,$$
   dove S è la superficie
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \; x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0, \, x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \; ,$$
   orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$, con $z \neq 0$, sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

   N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} e^{x^2+y} + 3x - 2y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) provare che esiste un intervallo aperto su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione

$$\int_\gamma x^2 \, ds ,$$

   dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9\} .$$

   N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

   Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2y - 5x ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

   Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = 2y - x \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = 8e^{-x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2,\ y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (y^2 + x)\, dxdy \ ,$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,-1)$, $(0,-3)$, $(-2,-2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z,\ 2 \leq z \leq 3\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1 - \cos z}{z^2} \; .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{1 - \cos z}{z^2} \; .$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 0 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo :

$$\int_\Gamma \frac{e^{-z}}{z^2-4}\,dz \;,$$

dove Γ è la circonferenza

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 3\}$$

orientata canonicamente.

Svolgimento e risposta.