

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (x^2 - 3y, xy + y^2) ;$$

- (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 2)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.
 (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 2)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

- (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 2)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 2))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale

$$\int \int_S x \, dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$, con $z \neq 0$, sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

- 2
3. (p. 2) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $y(x)$

$$\begin{cases} e^{x^2+y^2} + x + y - 1 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

- (a) provare che esiste un intervallo aperto I , tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I ;
(b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\varphi'(0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione

$$\int_{\gamma} y^2 ds,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}.$$

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x - 5y,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y + 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = e^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = \frac{1}{4}, y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (x^2 + y) \, dx dy ,$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(-1, 2)$, $(-3, 0)$, $(-2, -2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z^3 \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z, 1 \leq z \leq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-3, x + 2y)$$

Si ha quindi:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -3 \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$f'(1, 2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \mapsto (2h_1 - 3h_2, 2h_1 + 5h_2)$$

b) Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Quindi esiste un intorno di $(1, 2)$ tale che $f(u)$ è aperta e

$$u \mapsto f(u), (x, y) \mapsto f(x, y)$$

è un diffeomorfismo

c) Si ha

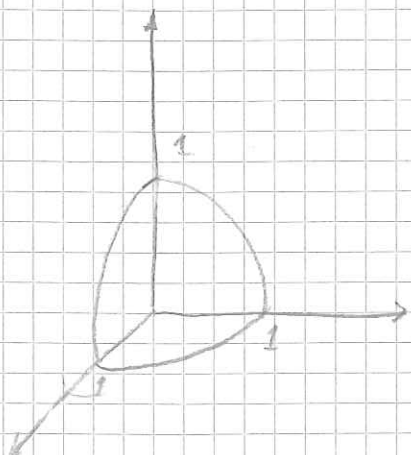
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha } f(1, 2) = (-5, 6)$$

Si ha quindi:

$$(\mathcal{F}^{-1})'(-5, 6) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (K_1, K_2) \rightarrow \left(\frac{5}{16} K_1 + \frac{3}{16} K_2, -\frac{1}{8} K_1 + \frac{1}{8} K_2 \right)$$

Esercizio 2



Una parametrizzazione di S non orientata è la funzione α

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

Per ogni $(\varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha

$$\alpha'(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \sin \varphi \cos \varphi > 0 \quad \text{per } \varphi \neq 0$$

Quindi α è concorde con l'orientazione di S

Si ha quindi:

$$\iint_S x \, dy \wedge dz =$$

$$= \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin \varphi \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{vmatrix} d\varphi d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin \varphi \cos \sigma \sin^2 \varphi \cos \sigma \, d\varphi \, d\sigma = \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \sigma \, d\sigma \right) = \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\sigma)}{2} \, d\sigma \right) = \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \right) \frac{1}{2} \left[\sigma + \frac{1}{2} \sin(2\sigma) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi (-\sin \varphi) \, d\varphi \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 3

a) Soit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2} + x + y - 1$$

Soit

$$f(0,0) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$$

Par ailleurs $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y^2} (2y) + 1$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$$

Quindi esiste un intervallo aperto I sul quale il problema ammette una ed una sola soluzione

b) Per ogni $x \in I$ si ha

$$e^{x^2 + (\varphi(x))^2} + x + \varphi(x) - 1 = 0$$

Quindi:

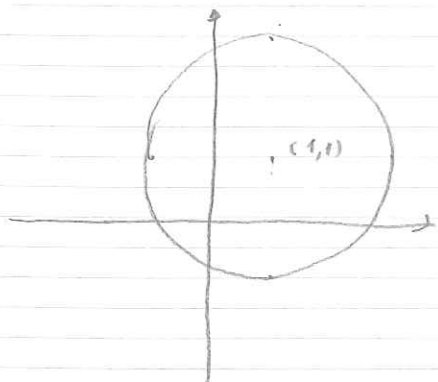
$$e^{x^2 + (\varphi(x))^2} (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x)) + 1 + \varphi'(x) = 0$$

Per $x=0$, essendo $\varphi(0)=0$, si ha quindi:

$$1 + \varphi'(0) = 0$$

$$\text{Quindi } \varphi'(0) = -1$$

Esercizio 4



Una parametrizzazione di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 1 + 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\varphi'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$

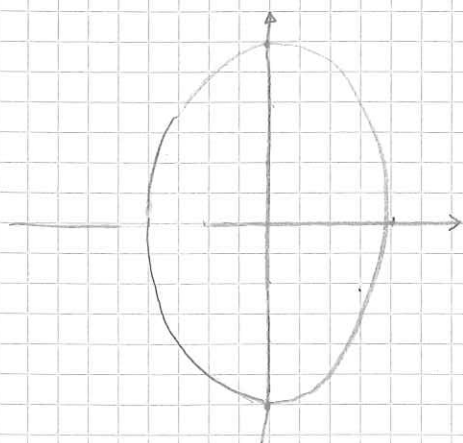
$$\text{Quindi } \|\varphi'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{4} = 2$$

Si ha quindi:

$$\iint_{\Gamma} y^2 \, ds = \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin t)^2 \cdot 2 \, dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos t + 4 \cos^2 t) dt = \\
&= 2 \left(\int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos t) dt + 4 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \right) = \\
&= 2 \left(\left[t + 4 \sin t \right]_0^{2\pi} + 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} \right) = \\
&= 2(2\pi + 2 \cdot 2\pi) = 2 \cdot 6\pi = 12\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremi assoluti di f

Sia $(x, y) \in D^0$; si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$. Si ha quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sia

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

$F_1(D)$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione costante $g(x, y) = 0$.

Indichiamo ancora con f la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x - 5y$$

6
Sic $(x, y) \in E \cap F_2(D)$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

ovvero

$$(2, -5) = \lambda \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{3}y \right)$$

Sic ha quindi

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{2} \lambda x \\ -5 = \frac{2}{3} \lambda y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo

$$\lambda \neq 0. \text{ Sic ha } x = \frac{4}{\lambda} \text{ e } y = -\frac{45}{2\lambda}$$

Sic ha quindi

$$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(-\frac{45}{2\lambda} \right)^2 = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{225}{4\lambda^2} = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\lambda^2 = \frac{241}{4} \quad ; \text{ quindi } \lambda = \pm \frac{\sqrt{241}}{2}$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{\sqrt{241}}{2} \text{ si ha } x = \frac{8}{241} \sqrt{241} \text{ e } y = -\frac{45}{241} \sqrt{241}$$

$$\text{Per } \lambda = -\frac{\sqrt{241}}{2} \text{ si ha } x = -\frac{8}{241} \sqrt{241} \text{ e } y = \frac{45}{241} \sqrt{241}$$

Sic ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{8}{241} \sqrt{241}, -\frac{45}{241} \sqrt{241} \right), \left(-\frac{8}{241} \sqrt{241}, \frac{45}{241} \sqrt{241} \right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{8}{241}\sqrt{241}, -\frac{45}{241}\sqrt{241}\right) = \sqrt{241}$$

$$f\left(-\frac{8}{241}\sqrt{241}, \frac{45}{241}\sqrt{241}\right) = -\sqrt{241}$$

Si ha quindi

$$\max(f) = \sqrt{241}, \quad \min(f) = -\sqrt{241}$$

Esercizio 6 (1° modulo)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una primitiva di 1 è la funzione $\alpha(t) = t$

Una primitiva di $e^{-t} \cdot 1$ è la funzione $\beta(t) = -e^{-t}$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

lineare $y' = y + 1$ è quindi

$$y(t) = e^t (e^{-t} + c) = ce^t + 1$$

al variare di c in $\mathbb{R}$

Per $t = 0$ si ha

$$c + 1 = 0$$

$$\text{quindi } c = -1$$

Si ha quindi

$$y(t) = e^t - 1$$

Si ottiene il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2x - e^t + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Una primitiva di 2 è la funzione $\alpha(t) = 2t$

Una primitiva di

$$e^{-2t}(-e^t + 1) = -e^{-t} + e^{-2t}$$

è la funzione $\beta(t) = e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $x' = 2x - e^t + 1$ è quindi

$$x(t) = e^{2t} \left(e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + C \right) = C e^{2t} + e^t - \frac{1}{2}$$

al variare di C in $\mathbb{R}$.

Per $t = 0$ si ha

$$C + 1 - \frac{1}{2} = 0 ; \text{ quindi } C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Quindi } x(t) = -\frac{1}{2} e^{2t} + e^t - \frac{1}{2}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} e^{2t} + e^t - \frac{1}{2} \\ y(t) = e^t - 1 \end{cases}$$

Esercizio 6 2° modo

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y + 1$$

Una primitiva di 1 è la funzione $\alpha(t) = t$

Una primitiva di $e^{-t} \cdot 1$ è la funzione $\beta(t) = -e^{-t}$

L'insieme delle soluzioni di $y' = y + 1$ è quindi

$$y(t) = e^t (e^{-t} + c_1) = c_1 e^t + 1$$

Consideriamo l'equazione

$$x' = 2x - c_1 e^t + 1$$

Una primitiva di 2 è la funzione $\alpha(t) = 2t$

Una primitiva di $e^{-2t} (-c_1 e^t + 1) = -c_1 e^{-t} + e^{-2t}$

è la funzione $\beta(t) = c_1 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è quindi

$$x(t) = e^{2t} (c_1 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + c_2) = c_2 e^{2t} + c_1 e^t - \frac{1}{2}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato è quindi

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \\ y(t) = c_1 e^t - 1 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Per $t=0$ si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ c_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Da cui $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$

Da cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} x(t) = e^t - \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} \\ y(t) = e^t - 1 \end{cases}$$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

cioè

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = \pm 1$ doppie

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = x e^x, \quad \varphi_3(x) = e^{-x}, \quad \varphi_4(x) = x e^{-x}$$

Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A x^2 e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\psi'(x) = 2Ax e^x + A x^2 e^x$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= 2A e^x + 2Ax e^x + 2Ax e^x + A x^2 e^x = \\ &= 2A e^x + 4Ax e^x + A x^2 e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'''(x) &= 2A e^x + 4A e^x + 4Ax e^x + 2Ax e^x + A x^2 e^x = \\ &= 6A e^x + 6Ax e^x + A x^2 e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^{(4)}(x) &= 6A e^x + 6A e^x + 6Ax e^x + 2Ax e^x + A x^2 e^x = \\ &= 12A e^x + 8Ax e^x + A x^2 e^x \end{aligned}$$

Se funzione y è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$12Ae^x + 8Ax e^x + Ax^2 e^x - 2(2Ae^x + 4Ax e^x + Ax^2 e^x) + Ax^2 e^x = e^x$$

quindi se e solo se

$$8Ae^x = e^x$$

quindi se e solo se $A = \frac{1}{8}$

Si ha quindi:

$$y(x) = \frac{1}{8} x^2 e^x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \frac{1}{8} x^2 e^x$$

Si ha

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x - c_3 e^{-x} + c_4 e^{-x} - c_4 x e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{8} x^2 e^x =$$

$$= (c_1 + c_2) e^x + c_2 x e^x + (-c_3 + c_4) e^{-x} - c_4 x e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{8} x^2 e^x$$

$$y''(x) = (c_1 + c_2) e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + (c_3 - c_4) e^{-x} - c_4 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{8} x^2 e^x =$$

$$= (c_1 + 2c_2) e^x + c_2 x e^x + (c_3 - 2c_4) e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{8} x^2 e^x$$

$$\begin{aligned}
 y'''(x) &= (C_1 + 2C_2)e^x + C_2e^x + C_2xe^x + (-C_3 + 2C_4)e^{-x} + C_4e^{-x} \\
 &\quad - C_4xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x = \\
 &= (C_1 + 3C_2)e^x + C_2xe^x + (-C_3 + 3C_4)e^{-x} - C_4xe^{-x} \\
 &\quad + \frac{3}{4}e^x + \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x
 \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases}
 C_1 + C_3 = 0 \\
 C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0 \\
 C_1 + 2C_2 + C_3 - 2C_4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\
 C_1 + 3C_2 - C_3 + 3C_4 + \frac{3}{4} = 0
 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}
 C_1 = -C_3 \\
 -C_3 + C_2 - C_3 + C_4 = 0 \\
 -C_3 + 2C_2 + C_3 - 2C_4 = 0 \\
 -C_3 + 3C_2 - C_3 + 3C_4 + \frac{3}{4} = 0
 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}
 C_1 = -C_3 \\
 C_2 - 2C_3 + C_4 = 0 \\
 C_2 - C_4 = 0 \\
 3C_2 - 2C_3 + 3C_4 + \frac{3}{4} = 0
 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = c_4 \\ c_1 - 2c_3 + c_4 = 0 \\ 3c_4 - 2c_3 + 3c_1 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = c_4 \\ c_3 = c_4 \\ 4c_4 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

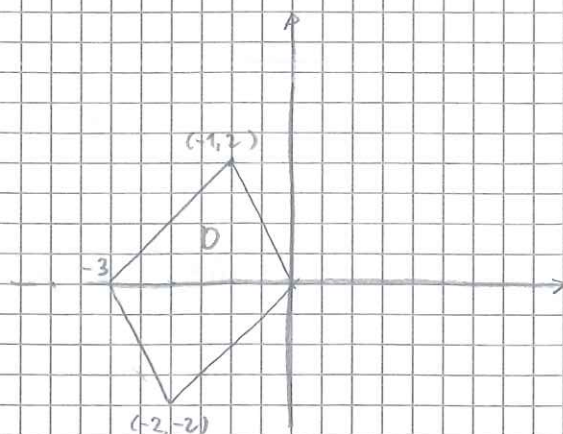
cioè

$$\begin{cases} c_4 = -\frac{3}{16} \\ c_3 = -\frac{3}{16} \\ c_2 = -\frac{3}{16} \\ c_1 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{3}{16} e^x - \frac{3}{16} x e^x - \frac{3}{16} e^{-x} - \frac{3}{16} x e^{-x} + \frac{1}{8} x^2 e^x$$

Esercizio 8



Si ha $(-1, 2) + (-2, -2) = (-3, 0)$

Si ha $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la

trasformazione lineare tale che

$T(1, 0) = (-1, 2)$ e $T(0, 1) = (-2, -2)$

Si ha $T([0, 1] \times [0, 1]) = D$

La matrice di T è

$$a = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Una parametrizzazione di D è quindi

$$\begin{cases} x = -u - 2v \\ y = 2u - 2v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ nhe $|\det T'(u, v)| =$

$$|\det T'(u, v)| = |\det \varphi| = 6$$

Si ha quindi:

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,1]} ((-u-2v)^2 + 2u-2v) 6 du dv$$

$$= 6 \iint_{[0,1] \times [0,1]} (u^2 + 4uv + 4v^2 + 2u - 2v) du dv =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(\int_0^1 (u^2 + 4uv + 4v^2 + 2u - 2v) dv \right) du =$$

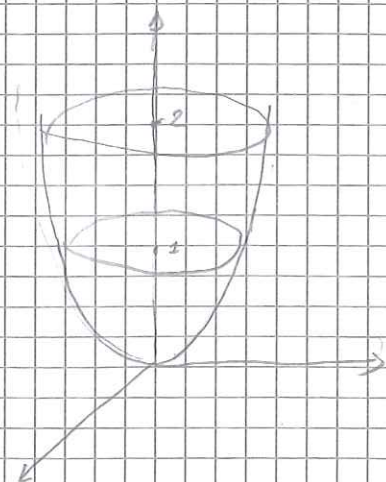
$$= 6 \int_0^1 \left[u^2 v + 2u v^2 + \frac{4}{3} v^3 + 2u v - v^2 \right]_0^1 du =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(u^2 + 2u + \frac{4}{3} + 2u - 1 \right) du =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(u^2 + 4u + \frac{1}{3} \right) du =$$

$$= 6 \left[\frac{1}{3} u^3 + 2u^2 + \frac{1}{3} u \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$$

Esercizio 9



Si ha $p_3(0) = [1, 2]$

Per ogni $z \in [1, 2]$ nhe

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z\}$$

So he quonoh

$$\iiint_D z^3 dx dy dz = \int_1^2 \left(\iint_{D(z)} z^3 dx dy \right) dz =$$

$$= \int_1^2 z^3 \left(\iint_{D(z)} dx dy \right) dz = \int_1^2 z^3 \text{mis}(D(z)) dz =$$

$$= \int_1^2 z^3 \pi z dz = \pi \int_1^2 z^4 dz =$$

$$= \pi \left[\frac{z^5}{5} \right]_1^2 = \frac{\pi}{5} (32 - 1) = \frac{31}{5} \pi$$