Analisi Matematica 2 - 9/9/13 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = (\log \operatorname{Arctg}(y^2+1), \operatorname{Arctg} \log(x^2+1)) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale

$$\int\int_S dx \wedge dy + x \, dy \wedge dz \ ,$$

   dove S è la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ z = 0\} \ ,$$

   orientata in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$, sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x,y)$

$$\begin{cases} \sin(x^2+y^2-z^2) + \cos(x-y+z) - 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \\ z(0,0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) provare che esiste un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, I, tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I;

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione

$$\int_\gamma y\sqrt{x}\,ds \ ,$$

dove γ è il segmento $[(1,0),(0,1)]$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq x,\ y \geq -x,\ x^2+y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x+2y \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2} y + \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - y''' = x + 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x+3y)\,dxdy\;,$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,3)$, $(1,2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z\,dxdydz\;,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\; z \geq 1,\, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}\;.$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-1, -2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z}{(z+1)(z+2)} \ .$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 0 contenuta nel dominio di f e contenente $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = \frac{1}{2}\}$;

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

11. (p. 5) (**Aut., cr. 9**) Calcolare con il metodo dei residui seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx \ .$$

Svolgimento e risposta.