

Analisi Matematica 2 - 9/9/13 - Compito 4

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\log \operatorname{Arctg}(y^2 + 1), \operatorname{Arctg} \log(x^2 + 1)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale

$$\int \int_S dx \wedge dy + x dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, z = 0\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$, sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x, y)$

$$\begin{cases} \sin(x^2 + y^2 - z^2) + \cos(x - y + z) - 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \\ z(0, 0) = 0 \end{cases} ,$$

- (a) provare che esiste un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, I , tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I ;
- (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione

$$\int_{\gamma} y\sqrt{x} \, ds ,$$

dove γ è il segmento $[(1, 0), (0, 1)]$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq x, y \geq -x, x^2 + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x + 2y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2}y + \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} - y''' = x + 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (x + 3y) \, dx dy ,$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(1, 2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $x^2 + 1 > 0$, $\text{Arctg}(y^2 + 1) > 0$

Si ha quindi $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$

b) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(0, \frac{1}{1 + \log^2(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{1}{\text{Arctg}(y^2 + 1)} \cdot \frac{1}{1 + (y^2 + 1)^2} \cdot 2y, 0 \right)$$

Quindi

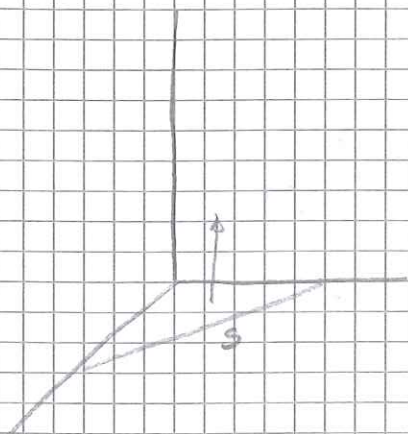
$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2y}{\text{Arctg}(y^2 + 1) (y^4 + 2y^2 + 2)} \\ \frac{2x}{(1 + \log^2(x^2 + 1)) (x^2 + 1)} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \mapsto$$

$$\left(\frac{2y}{\text{Arctg}(y^2 + 1) (y^4 + 2y^2 + 2)} h_2, \frac{2x}{(1 + \log^2(x^2 + 1)) (x^2 + 1)} h_1 \right)$$

Esercizio 2 (1° modulo)



Si ha

$$T = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1 \}$$

Una parametrizzazione di S non orientata è la funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, (u, v) \in T$$

2

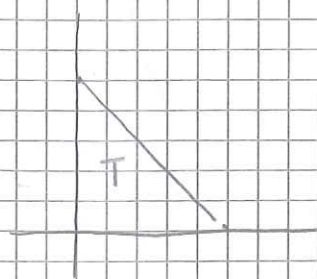
Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$; quindi φ è concordante con l'orientazione di S . Si ha quindi:

$$\iint_S dx \wedge dy + x dy \wedge dz =$$

$$= \iint_T \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) du dv = \iint_T du dv$$



Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ e per ogni $u \in [0, 1]$ si ha

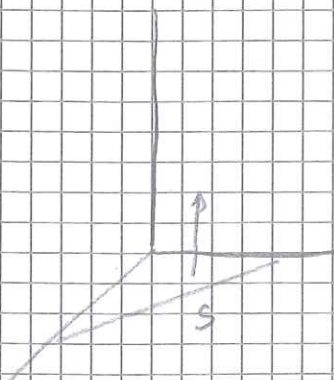
$$T|u| = [0, 1-u]$$

Si ha quindi:

$$\iint_T du dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} dv \right) du = \int_0^1 (1-u) du =$$

$$= \left[u - \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2 (2° modulo)



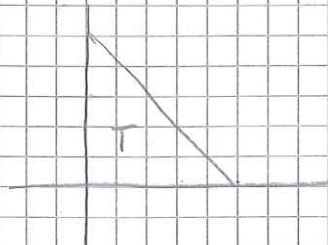
Esistono S parallele al piano xy si ha

$$\iint_S dx \wedge dy + x dy \wedge dz = \iint_S dx \wedge dy$$

La proiezione di S sul piano xy è

$$T = \{ (x, y) ; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \}$$

e la proiezione conserva il segno delle aree



Si ha quindi

$$\iint_S dx \wedge dy = \text{mis}(T) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3

a) Si ha

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \sin(x^2 + y^2 - z^2) + \cos(x - y + z) - 2x + 3y + 4z - 1$$

Si ha

$$f(0,0,0) = 1 - 1 = 0$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 - z^2)(-2z) - \sin(x - y + z) + 4$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 4 \neq 0$$

Per il teorema di Dini, esiste I aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ tale che esiste una ed una sola soluzione del problema assegnato di dominio I

b) Per ogni $(x, y) \in I$ si ha

$$\sin(x^2 + y^2 - (\varphi(x, y))^2) + \cos(x - y + \varphi(x, y)) - 2x + 3y + 4\varphi(x, y) - 1 = 0$$

Quindi

$$\cos(x^2 + y^2 - (\varphi(x, y))^2) (2x - 2\varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)) + \\ - \sin(x - y + \varphi(x, y)) (1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)) - 2 + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0$$

Per $(x, y) = (0, 0)$, essendo $\varphi(0, 0) = 0$, si ha

$$-2 + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 0$$

Quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{2}$

Si ha

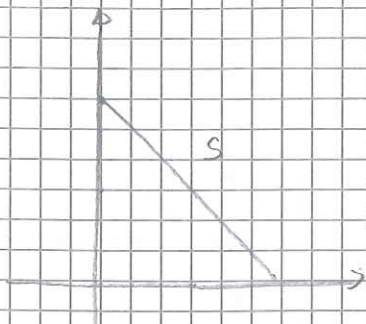
$$\cos(x^2 + y^2 - (\varphi(x, y))^2) (2y - 2\varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) + \\ - \sin(x - y + \varphi(x, y)) (-1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) + 3 + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0$$

Per $(x, y) = (0, 0)$, essendo $\varphi(0, 0) = 0$, si ha

$$3 + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

Esercizio 4



I punti di S sono dati da

$$(x, y) = (1, 0) + t((0, 1) - (1, 0)) = \\ = (1 - t, t)$$

al variare di t in $[0, 1]$

Una parametrizzazione di S è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$\varphi'(t) = (-1, 1);$$

quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma} y \sqrt{x} \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1-t} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^1 t \sqrt{1-t} \, dt$$

Poniamo $\sqrt{1-t} = u$; si ha $1-t = u^2$; quindi

$$t = 1 - u^2; \quad \text{si ha } \frac{dt}{du} = -2u$$

Per $t=0$ si ha $u=1$; per $t=1$ si ha $u=0$

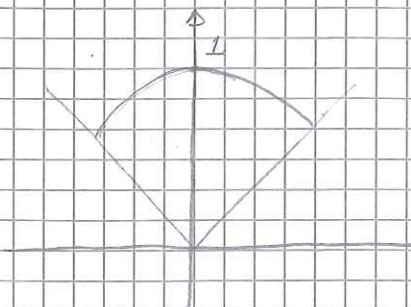
Si ha quindi

$$\sqrt{2} \int_0^1 t \sqrt{1-t} \, dt = \sqrt{2} \int_1^0 (1-u^2) u \cdot (-2u) \, du =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^1 (u^2 - u^4) \, du = 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 \right]_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15} \sqrt{2}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$. Essendo D compatta ed essendo f continua, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x, y) \in D$; si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap D = \emptyset$$

I punti intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con la retta $x = y$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y \end{cases}, \text{ cioè di } \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases}, \text{ cioè di } \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -x \end{cases}$$

Si trovano $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Dei due punti solo $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in D$

I punti intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con la retta $x = -y$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -y \end{cases}, \text{ cioè di } \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases}, \text{ cioè di } \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -x \end{cases}$$

Si trovano

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ e } (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Dei due punti solo $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in D$

Sia

$$F_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$F_2 =](0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})[$$

$$F_3 =] (0,0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) [$$

$$F_4 = \{ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$$

$$F_5 = \{ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$$

$$F_6 = \{ (0,0) \}$$

$$\text{Si ha } F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6$$

Si ha

$$g_1: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow x^2 + y^2 - 1$$

F_1 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g_1(x,y) = 0$.

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow x + 2y$$

Se $(x,y) \in E \cap F_1$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x,y) = \lambda \text{ grad } g_1(x,y)$$

cioè

$$(1, 2) = \lambda (2x, 2y)$$

cioè

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y > 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Per $\lambda \neq 0$ si ha

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Si ha quindi

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

quindi $5 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ si ha $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Si ha $\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ se e solo se $2\sqrt{5} < 5\sqrt{5}$, cioè se e solo

se $20 < 125$; ciò è vero; si ha quindi

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \text{si ha} \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0$$

Si trova quindi il punto $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ si ha $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} < 0$; quindi

non si ottiene alcuna soluzione del sistema

Si ha quindi

$$E \cap F_1 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$$

Si ha

$$g_2: \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y$$

F_2 è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $g_2(x, y) = 0$

Se $(x, y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g_2(x, y)$$

non è tale che

$$(1, 2) = \lambda (1, -1), \text{ non è tale che}$$

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = -2; \text{ non è assurdo.}$$

Sicché quindi:

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

$$\text{Sia } g_3: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$$

F_3 è una sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, di equazione contenuta $g_3(x, y) = 0$

Se $(x, y) \in E \cap F_3$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g_3(x, y)$$

non è tale che

$$(1, 2) = \lambda (1, 1)$$

$$\text{Sicché } \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2; \text{ non è assurdo}$$

Sicché quindi:

$$E \cap F_3 = \emptyset$$

Sicché quindi:

$$E \subset \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 0) \right\}$$

Sicché

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0,0) = 0$$

Si ha $\frac{3}{2}\sqrt{2} < \sqrt{5}$ se e solo se $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$; cioè se e solo

se $9 \cdot 2 < 4 \cdot 5$, cioè se e solo se $18 < 20$; ciò è vero;

quindi si ha $\frac{3}{2}\sqrt{2} < \sqrt{5}$

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{5}$ e $\min(f) = 0$

Esercizio 6

Una primitiva della funzione $\frac{1}{1+x^2}$ è la

funzione $\alpha(x) = \text{Arctg} x$

Si ha

$$\int e^{-\text{Arctg} x} \frac{1}{1+x^2} dx = - \int e^{-\text{Arctg} x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= - e^{-\text{Arctg} x} + C$$

Una primitiva di $e^{-\text{Arctg} x} \frac{1}{1+x^2}$ è quindi

$$\beta(x) = - e^{-\text{Arctg} x}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = e^{\text{Arctg} x} (-e^{-\text{Arctg} x} + C) = C e^{\text{Arctg} x} - 1$$

al variare di C in $\mathbb{R}$

Per $x=0$ si ha $C - 1 = 0$; quindi $C = 1$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$y(x) = e^{\text{Arctg} x} - 1$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 - \lambda^3 = 0$$

cioè

$$\lambda^3(\lambda - 1) = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ triplice e $\lambda = 1$ semplice

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2, \varphi_4(x) = e^x$$

Esistono e sono unici $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x^3(A + Bx)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi(x) = Ax^3 + Bx^4$$

$$\psi'(x) = 3Ax^2 + 4Bx^3$$

$$\psi''(x) = 6Ax + 12Bx^2$$

$$\psi'''(x) = 6A + 24Bx$$

$$\psi^{(4)}(x) = 24B$$

La funzione $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$24B - 6A - 24Bx = x + 1$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} -24B = 1 \\ 24B - 6A = 1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{24} \\ -6A = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -\frac{1}{24} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Si ha

$$y'(x) = C_2 + 2C_3x + C_4e^x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$y''(x) = 2C_3 + C_4e^x - 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y'''(x) = C_4e^x - 2 - x$$

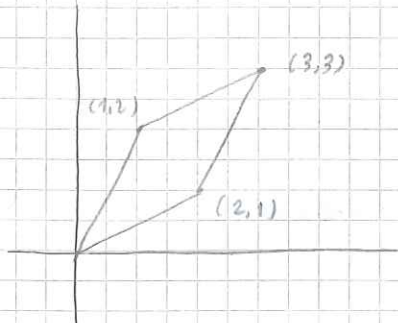
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0 \\ C_2 + C_4 = 0 \\ 2C_3 + C_4 = 0 \\ C_4 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} C_4 = 2 \\ C_1 = -2 \\ C_2 = -2 \\ C_3 = -1 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = -2 - 2x - x^2 + 2e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Esercizio 8



Si ha $(2,1) + (1,2) = (3,3)$

Si ha $A = [0,1] \times [0,1]$

Si ha $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale

che $T(1,0) = (2,1)$ e $T(0,1) = (1,2)$

Si ha $T(A) = D$. Si ha matrice di T è

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una parametrizzazione di D è quindi

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u + 2v \end{cases} \quad (u,v) \in T$$

La matrice jacobiana della parametrizzazione è la matrice a .

Si ha $|\det a| = 3$

Si ha quindi

$$\iint_D (x+3y) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,1]} (2u+v+3(u+2v)) \cdot 3 du dv =$$

$$= 3 \iint_{[0,1] \times [0,1]} (5u+7v) du dv =$$

$$3 \int_0^1 \left(\int_0^1 (5u+7v) dv \right) du =$$

$$= 3 \int_0^1 \left[5uv + \frac{7}{2} v^2 \right]_0^1 du = 3 \int_0^1 \left(5u + \frac{7}{2} \right) du =$$

$$= 3 \left[\frac{5}{2} u^2 + \frac{7}{2} u \right]_0^1 = 3 \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) = 3 \cdot 6 = 18$$

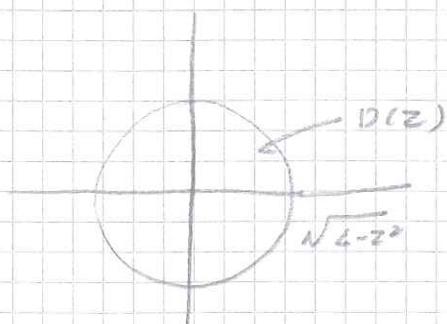
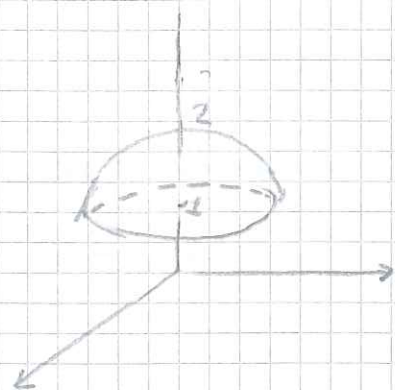
Esercizio 9 (1° modo)

Si ha $p_3(D) = [1, 2]$

Per ogni $z \in [1, 2]$ si ha

$$D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 - z^2 \}$$

Si ha quindi



$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz =$$

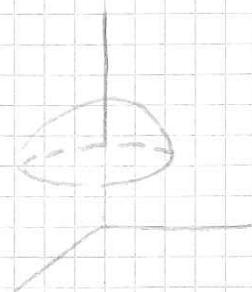
$$= \int_1^2 \left(\iint_{D(z)} z \, dx \, dy \right) dz =$$

$$= \int_1^2 z \left(\iint_{D(z)} 1 \, dx \, dy \right) dz = \int_1^2 z \, \text{mis}(D(z)) \, dz =$$

$$= \int_1^2 z \pi (4 - z^2) \, dz = \pi \int_1^2 (4z - z^3) \, dz =$$

$$= \pi \left[2z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_1^2 = \pi \left(8 - 4 - 2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4} \pi$$

Esercizio 9 (2° modo)



3 punti dell'intersezione della
superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
con il piano $z = 1$

soddisfano l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 4$$

cioè

$$x^2 + y^2 = 3$$

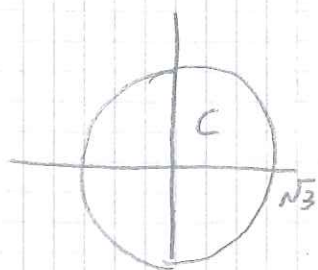
L'intersezione è quindi una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$

Porta

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 3\} \quad \text{tale che} \quad p_{1,2}(D) = C \quad \text{e per ogni} \\ (x, y) \in C \quad \text{tale che} \quad D(x, y) = [1, \sqrt{4 - x^2 - y^2}]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \iint_C \left(\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy = \\ &= \iint_C \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_C (4 - x^2 - y^2 - 1) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_C (3 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$



Una parametrizzazione in misure di C è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2} \iint_C (3 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{[0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]} (3 - s^2) s ds dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} (3s - s^3) ds \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= \pi \left[\frac{3}{2} s^2 - \frac{1}{4} s^4 \right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \pi \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = \frac{9}{4} \pi$$