Analisi Matematica 2 - 8/1/14 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = (x^{y+z}, y^{x+z}) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ ;$$

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z^2 \, ds \ ,$$

   dove S è la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \ 4x^2 + 4y^2 \le z^2, \ 0 \le z \le 2\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Determinare i punti critici e gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x^2y + xy + x - 6y + 3 \ .$$

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_\Gamma x^2 \, dz \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ x^2+y^2=1; x+y+z=0, x \geq 0\right\} \ ,$$

orientato in modo che $\vec{\mathbf{t}}(1,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \ y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 2x - 3y \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1+x^2} y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 8y = x^3 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (5x - y)\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}\right\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z\, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z^2, z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2)(**Aut., cr. 9**) Dire se la seguente funzione

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow z + \overline{z}$$

è derivabile (come funzione complessa di variabile complessa).

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Studiare le singolarità della seguente funzione complessa di variabile complessa definita naturalmente da

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3 + iz^2} \ ;$$

in ciascuna singolarità determinare il residuo.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare con il metodo dei residui seguente integrale curvilineo:

$$\int_\Gamma \frac{z}{z^2-4}\,dz\ ,$$

dove Γ è circonferenza

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z-2| = 2\}$$

orientata in senso antiorario.

Svolgimento e risposta.