

Analisi Matematica 2 - 8/1/14 - Compito 5

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (x^{y+z}, y^{x+z}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} ;$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S z^2 ds ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 4x^2 + 4y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Determinare i punti critici e gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2y + xy + x - 6y + 3 .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_{\Gamma} x^2 dz ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 0, x \geq 0\} ,$$

orientato in modo che $\vec{t}(1, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x - 3y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1+x^2}y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 8y = x^3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (5x - y) \, dx dy ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\text{dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0\}$$

b) Per ogni $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = ((y+z)x^{y+z-1}, y^{x+z} \log y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x^{y+z} \log x, (x+z)y^{x+z-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (x^{y+z} \log x, y^{x+z} \log y)$$

Si ha quindi

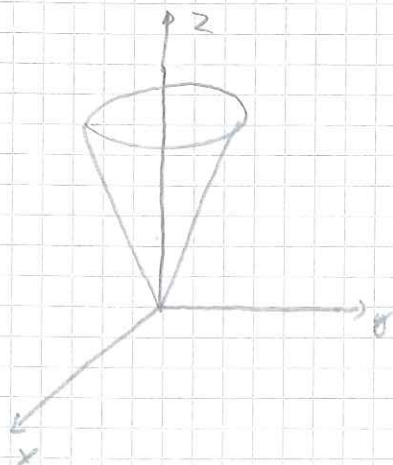
$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} \log x & x^{y+z} \log x \\ y^{x+z} \log y & (x+z)y^{x+z-1} & y^{x+z} \log y \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x, y, z): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2, h_3) \longrightarrow$$

$$((y+z)x^{y+z-1}h_1 + x^{y+z}(\log x)h_2 + x^{y+z}(\log x)h_3, y^{x+z}(\log y)h_1 + (x+z)y^{x+z-1}h_2 + y^{x+z}(\log y)h_3)$$

Esercizio 2



S è la superficie conica di vertice $(0,0,0)$ e base la circonferenza

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 2\}$$

I punti $(x, y, z) \in S$ sono dati da

2.)

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t((\cos \theta, \sin \theta, 2) - (0, 0, 0))$$

$$\text{con } 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Una parametrizzazione φ di S è quindi

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \\ z = 2t \end{cases} \quad (t, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(t, \theta) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha

$$\varphi'(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -t \sin \theta \\ \sin \theta & t \cos \theta \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$E(t, \theta) = 5$$

$$F(t, \theta) = 0$$

$$G(t, \theta) = t^2$$

$$\sqrt{E(t, \theta) \cdot G(t, \theta) - (F(t, \theta))^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5} t$$

Si ha quindi

$$\iint_S z^2 dS = \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} (2t)^2 \sqrt{5} t dt d\theta =$$

$$= 4\sqrt{5} \cdot \left(\int_0^1 t^3 dt \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = 4\sqrt{5} \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 \cdot 2\pi = 2\sqrt{5} \pi$$

Esercizio 3

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x - 6$$

I punti critici di f sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 2xy + y + 1 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \quad ; \text{cioè di} \quad \begin{cases} x = 2 \text{ o } x = -3 \\ 2xy + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Per $x = 2$ si ha $4y + y + 1 = 0$, cioè $5y = -1$,
cioè $y = -\frac{1}{5}$.

Per $x = -3$ si ha $-6y + y + 1 = 0$, cioè $5y = 1$,
cioè $y = \frac{1}{5}$.

I punti critici di f sono quindi $(2, -\frac{1}{5})$ e $(-3, \frac{1}{5})$.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Si ha quindi:

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $(x, y) = (2, -\frac{1}{5})$ si ha

$$df(2, -\frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ quindi}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

Quindi $(2, -\frac{1}{5})$ non è un estremo relativo

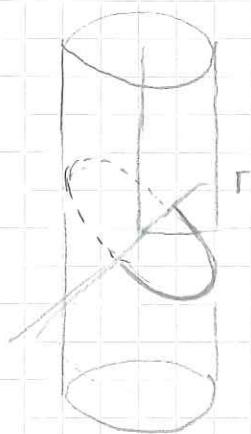
Per $(x, y) = (-3, \frac{1}{5})$ si ha

$$df(-3, \frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ quindi}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

Quindi $(-3, \frac{1}{5})$ non è un estremo relativo.

Esercizio 4



Una parametrizzazione in misure
di Γ senza orientazione è la funzione γ

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\cos t - \sin t \end{cases}$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Per ogni $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$$

Si ha $\varphi(0) = (1, 0, -1)$ e

$$\varphi'(0) = (0, 1, -1)$$

Il vettore tangente a Γ in $(1, 0, -1)$ con Γ orientato da φ è quindi

$$\frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1)$$

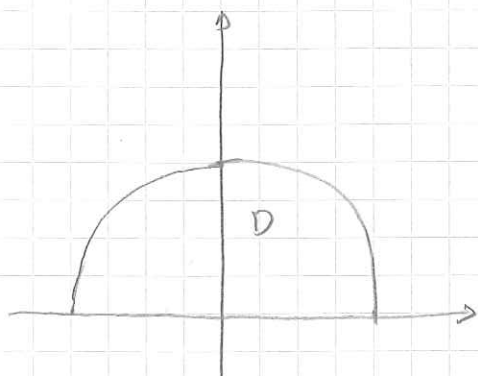
Quindi φ è concorde con l'orientazione di Γ .

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x^2 dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\sin t - \cos t) dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (-\sin t) dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \\ &= - \left[\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \end{aligned}$$

$$= - \left[\sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$; essendo f continue e D compatto, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f .

Sia $(x, y) \in D^\circ$; si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \neq 0$

quindi $(x, y) \notin E$. Si ha quindi

$$E \cap D^\circ = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = [(-1, 0), (0, 1)]$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

$$\text{Si ha } F_2(D) = F_1 \cup F_2$$

Sia $(x, y) \in F_1$; si ha $y = 0$ e $x \in [-1, 1]$; si ha

$$f(x, y) = 2x$$

Sia

$$g_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$$

La funzione g_1 è strettamente crescente

Siccome E_1 è l'insieme dei punti di massimo o di minimo di g_1 . Essendo g_1 strettamente crescente, si ha

$$E_1 = \{-1, 1\}$$

Siccome quindi

$$E \cap F_1 \subset \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

$$\text{Siccome } g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

L'insieme F_2 è la sottoinsieme differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione $g(x, y) = 0$

Indichiamo ancora con f la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x - 3y$$

Se $(x, y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

così tale che

$$(2, -3) = \lambda (2x, 2y)$$

Siccome quindi

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzione. Supponiamo

$\lambda \neq 0$; si ha

$$x = \frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{3}{2\lambda}$$

quindi:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\frac{4 + 9}{4\lambda^2} = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$4\lambda^2 = 13 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ si ha } x = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13} \sqrt{13} \text{ e}$$

$$y = -\frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{13} \sqrt{13}$$

Essendo $y < 0$, non si ha alcuna soluzione

$$\text{Per } \lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2} \text{ si ha } x = -\frac{2}{13} \sqrt{13} \text{ e } y = \frac{3}{13} \sqrt{13}$$

Si ha quindi:

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(-\frac{2}{13} \sqrt{13}, \frac{3}{13} \sqrt{13} \right) \right\}$$

Si ha quindi:

$$E \subset \left\{ (-1, 0), (1, 0), \left(-\frac{2}{13} \sqrt{13}, \frac{3}{13} \sqrt{13} \right) \right\}$$

Si ha

$$f(-1, 0) = -2$$

$$f(1, 0) = 2$$

$$f\left(-\frac{2}{13} \sqrt{13}, \frac{3}{13} \sqrt{13}\right) = -\frac{4}{13} \sqrt{13} - \frac{9}{13} \sqrt{13} = -\sqrt{13}$$

Si ha $-\sqrt{13} < -2$; si ha quindi

$$\max(f) = 2, \quad \min(f) = -\sqrt{13}$$

Esercizio 6

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare.

Si ha

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} (2x) dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

Una primitiva della funzione $\frac{x}{x^2+1}$ è quindi

$$\text{la funzione } \alpha(x) = \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{1}{2} \log(1+x^2)} \cdot 1 dx &= \int \left(e^{\log(1+x^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{Arghsh} x + C \end{aligned}$$

Una primitiva di $e^{-\frac{1}{2} \log(1+x^2)} \cdot 1$ è quindi

$$\text{la funzione } \beta(x) = \operatorname{Arghsh} x$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = e^{\frac{1}{2} \log(1+x^2)} (\operatorname{Arghsh} x + C) =$$

$$= C \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} \operatorname{Arghsh} x$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$

Per $x=0$ si ha $C=0$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2} \operatorname{Arghsh} x$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea associata è

$$\lambda^3 + 8 = 0 \quad ; \quad \text{cioè}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

Le soluzioni sono 2 e $1 \pm \sqrt{3}i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{-2x}, \quad \varphi_2(x) = e^x \cos(\sqrt{3}x), \quad \varphi_3(x) = e^x \sin(\sqrt{3}x)$$

Esistono A, B, C, D tali che

$$\psi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2$$

$$\psi''(x) = 2C + 6Dx$$

$$\psi'''(x) = 6D$$

Quindi ψ è soluzione di $y''' + 8y = x^3$ se e solo se

$$6D + 8(A + Bx + Cx^2 + Dx^3) = x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} 8D = 1 \\ 8C = 0 \\ 8B = 0 \\ 6D + 8A = 0 \end{cases}, \text{ case particolare}$$

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \\ D = \frac{1}{8} \\ A = -\frac{3}{32} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$y(x) = -\frac{3}{32} + \frac{1}{8}x^3$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos(\sqrt{3}x) + C_3 e^x \sin(\sqrt{3}x) - \frac{3}{32} + \frac{1}{8}x^3$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos(\sqrt{3}x) - \sqrt{3}C_2 e^x \sin(\sqrt{3}x) \\ &\quad + C_3 e^x \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}C_3 e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{3}{8}x^2 = \\ &= -2C_1 e^{-2x} + (C_2 + \sqrt{3}C_3)e^x \cos(\sqrt{3}x) + (-\sqrt{3}C_2 + C_3)e^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{3}{8}x^2 \\ y''(x) &= 4C_1 e^{-2x} + (C_2 + \sqrt{3}C_3)e^x \cos(\sqrt{3}x) + (-C_2\sqrt{3} - 3C_3)e^x \sin(\sqrt{3}x) \\ &\quad + (-\sqrt{3}C_2 + C_3)e^x \sin(\sqrt{3}x) + (-3C_2 + \sqrt{3}C_3)e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{3}{4}x = \\ &= 4C_1 e^{-2x} + (-2C_2 + 2\sqrt{3}C_3)e^x \cos(\sqrt{3}x) + (-2C_2\sqrt{3} - 2C_3)e^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{3}{4}x \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{3}{32} = 0 \\ -2c_1 + c_2 + \sqrt{3} c_3 = 0 \\ 4c_1 - 2c_2 + 2\sqrt{3} c_3 = 0 \end{cases}, \text{ non se e solo se}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{32} \\ -2c_1 + c_2 + \sqrt{3} c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + \sqrt{3} c_3 = 0 \end{cases}$$

Sommando le 2 ultime equazioni si trova $c_3 = 0$

Si ha quindi

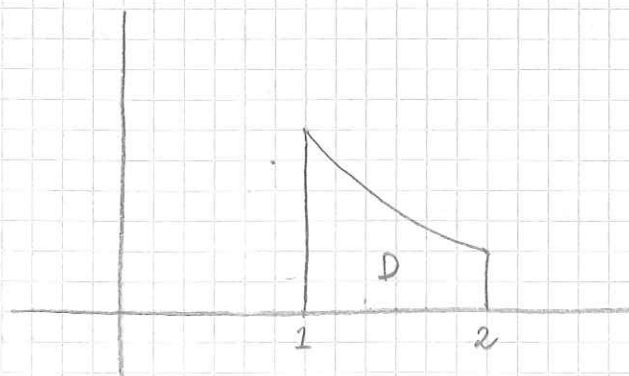
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{32} \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

quindi $c_1 = \frac{1}{32}, c_2 = \frac{1}{16}$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{32} e^{-2x} + \frac{1}{16} e^x \cos(\sqrt{3}x) - \frac{3}{32} + \frac{1}{8} x^3$$

Esercizio 8



Si ha $p_1(D) = [1, 2]$ e

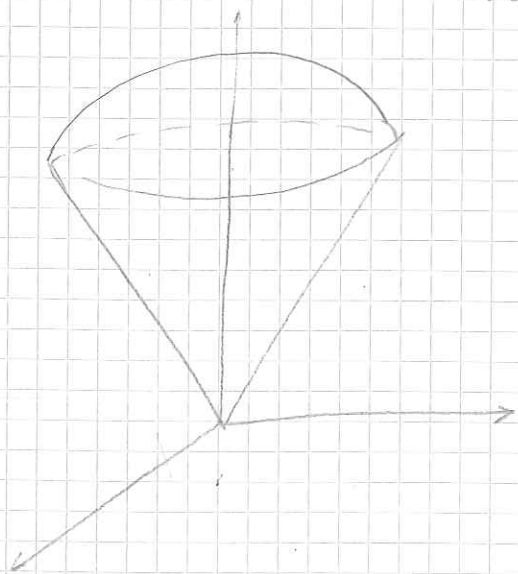
per ogni $x \in [1, 2]$ si ha

$$D(x) = \left[0, \frac{1}{x}\right]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \iint_D (5x - y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} (5x - y) \, dy \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left[5xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(5x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left(5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[5x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \right]_1^2 = \\
 &= 10 + \frac{1}{4} - 5 - \frac{1}{2} = \frac{19}{4}
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 (1° modo)



L'insieme D è un settore sferico di asse il semiasse positivo delle z e ampiezza $\frac{\pi}{4}$ della palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 2. Una parametrizzazione in misure di D è la funzione α

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \in [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, \varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha

$$|\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \varphi$$

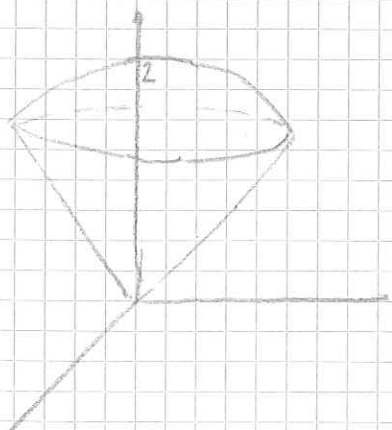
Si ha quindi

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0,2] \times [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi]} \rho \cos \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$\left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi$$

Esercizio 9 (2° modo)



l'intersezione della superficie
conica

$$x^2 + y^2 = z^2$$

con la superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

e date dagli $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali
che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Si ha $2z^2 = 4$; quindi $z^2 = 2$; quindi $z = \sqrt{2}$

Si ha $p_z(D) = [0, 2]$

Per $z \in [0, \sqrt{2}]$ si ha

$$D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z^2 \}$$

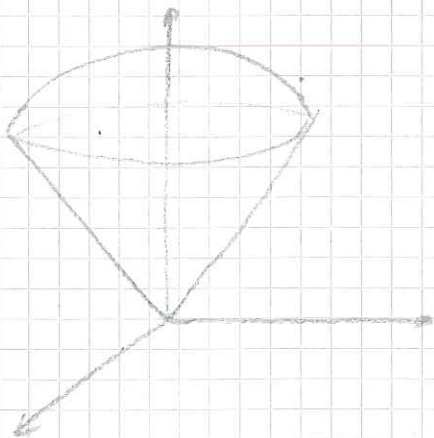
Per $z \in [\sqrt{2}, 2]$ si ha

$$D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2 - z^2 \}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \left(\iint_{D(z)} z \, dx \, dy \, dz \right) dz = \\
 &= \int_0^2 z \left(\iint_{D(z)} dx \, dy \right) dz = \int_0^2 z \, \text{mis}(D(z)) \, dz = \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} z \, \pi z^2 \, dz + \int_{\sqrt{2}}^2 z \, \pi (4 - z^2) \, dz = \\
 &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} z^3 \, dz + \pi \int_{\sqrt{2}}^2 (4z - z^3) \, dz = \\
 &= \pi \left(\left[\frac{1}{4} z^4 \right]_0^{\sqrt{2}} + \left[2z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{\sqrt{2}}^2 \right) = \\
 &\pi (1 + 8 - 4 - 4 + 1) = 2\pi
 \end{aligned}$$

Esercizio 9 (3° modo)



L'intersezione delle superficie
comune

$$x^2 + y^2 = z^2$$

con la superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

è data dagli $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali
che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Si ha $2z^2 = 4$; quindi $z = \sqrt{2}$; e si ha quindi

$$x^2 + y^2 = 2$$

Posto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 2\}$ si ha

$P_{1,2}(D) = C$ e per ogni $(x, y) \in C$ si ha

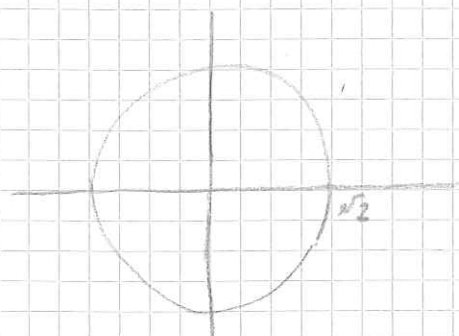
$$D(x, y) = \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right]$$

Si ha quindi

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy =$$

$$\iint_C \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_C (4 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) dx \, dy =$$

$$= \iint_C (2 - x^2 - y^2) dx \, dy$$



Una parametrizzazione in misure d'arco
è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\iint_C (2 - x^2 - y^2) dx \, dy = \iint_{[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]} (2 - \rho^2) \rho \, d\rho \, dt =$$

$$= \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi (2 - 1) = 2\pi$$