Analisi Matematica 2 - 23/1/14 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = (\sin x)^{\cos y} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) dire se f è differenziabile in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, motivando la risposta;

   (c) in caso affermativo determinare la trasformazione lineare derivata di $df(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ ;$$

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S x^2 \, ds \ ,$$

   dove S è la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\} \ .$$

   N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x, y)$

$$\begin{cases} \cos(xyz) + \sin z - 1 + x - y = 0 \\ z(0,0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) dire se esiste un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, I tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I;
   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_\Gamma (x^2 + y)\, dy ,$$

   dove Γ è il segmento

$$[(1,1),(2,0)] ,$$

   orientato in modo che $(1,1)$ sia il punto iniziale e $(2,0)$ il punto finale.

   Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

   Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = xe^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \le y \le -x^2 + 2x\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ z \ge x^2 + y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 2) (**Aut., cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{(e^z - 1)\sin z}{z^3} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 4)(**Aut., cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-1, -2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z}{(z+1)(z+2)} ;$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 0 contenuta nel dominio di f e contenente

$$\{z \in \mathbf{C};\ |z| = \frac{3}{2}\} ;$$

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut., cr. 9**) Calcolare con il metodo dei residui seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx \; .$$

Svolgimento e risposta.