

Analisi Matematica 2 - 23/1/14 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y} ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) dire se f è differenziabile in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, motivando la risposta;
- (c) in caso affermativo determinare la trasformazione lineare derivata di $df(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} ;$$

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S x^2 ds ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\} .$$

N.B. Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$ per $n \neq 1$ o formule simili.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x, y)$

$$\begin{cases} \cos(xyz) + \sin z - 1 + x - y = 0 \\ z(0, 0) = 0 \end{cases},$$

- (a) dire se esiste un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, I tale che il problema ammette una ed una sola soluzione di dominio I ;
(b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y) dy,$$

dove Γ è il segmento

$$[(1, 1), (2, 0)],$$

orientato in modo che $(1, 1)$ sia il punto iniziale e $(2, 0)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = xe^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D y \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq y \leq -x^2 + 2x\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq x^2 + y^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sin x > 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (\exists k \in \mathbb{Z}) k\pi \leq x \leq (k+1)\pi\} \end{aligned}$$

b) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos y (\sin x)^{\cos y - 1} \cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\sin x)^{\cos y} \log \sin x (-\sin y)$$

Essendo f di classe C^1 f è differenziabile su $\text{dom}(f)$ e quindi in particolare in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

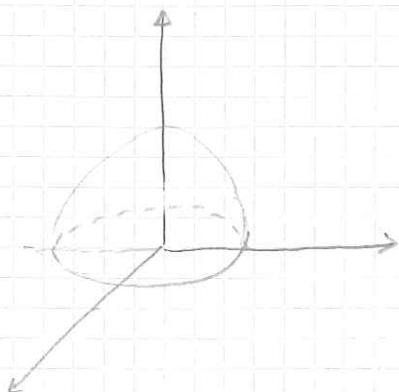
c) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = -\log \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \log 2$$

Si ha quindi

$$df\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (h_1, h_2) \rightarrow \frac{1}{2}(\log 2) h_2$$

Esercizio 2



Una parametrizzazione in
norme di S è la funzione α

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha

$$\alpha'(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$E(\varphi, \vartheta) = 1$$

$$F(\varphi, \vartheta) = 0$$

$$G(\varphi, \vartheta) = \sin^2 \varphi$$

Quindi:

$$\sqrt{E(\varphi, \vartheta) G(\varphi, \vartheta) - (F(\varphi, \vartheta))^2} = \sqrt{\sin^2 \varphi} = \sin \varphi$$

Si ha quindi:

$$\iint_S x^2 ds = \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} (\sin \varphi \cos \vartheta)^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} d\vartheta \right) =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \right) \frac{1}{2} \left[\vartheta + \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi (-\sin \varphi) d\varphi \right) =$$

$$= \pi \left(\left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi$$

Esercizio 3

a) S.e

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \cos(xyz) + \sin z - 1 + x - y$$

S.e h.e

$$f(0,0,0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\sin(xyz)xy + \cos z$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0 + \cos 0 = 1 \neq 0$$

Per il teorema di Dini esiste I aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ su cui il problema ammette una ed una sola soluzione

b) Per ogni $(x, y) \in I$ si ha

$$\cos(xy \varphi(x, y)) + \sin \varphi(x, y) - 1 + x - y = 0$$

Quindi derivando rispetto a x si ha

$$-\sin(xy \varphi(x, y)) y \left(\varphi(x, y) + x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right) + \cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + 1 = 0$$

Per $(x, y) = (0, 0)$, si trova

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) + 1 = 0$$

$$\text{Quindi } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = -1$$

Derivando rispetto a y si ha

$$-\sin(xy \varphi(x, y)) x \left(\varphi(x, y) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) + \cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0$$

4

$$+ \cos(\varphi(x,y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) - 1 = 0$$

Per $(x,y) = (0,0)$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) - 1 = 0$$

quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 1$$

Esercizio 4



Una parametrizzazione di Γ è la funzione

$$(x,y) = (1,1) + t((2,0) - (1,1)), \quad t \in [0,1]$$

cioè

$$(x,y) = (1+t, 1-t), \quad t \in [0,1]$$

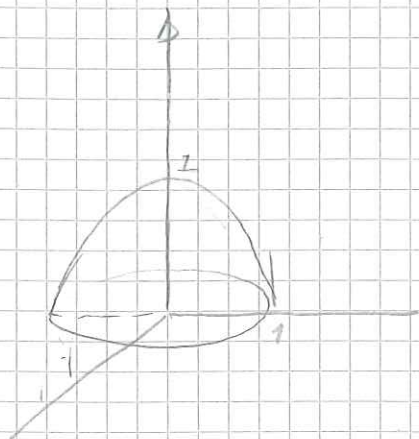
cioè scalarmente

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x^2 + y) dy &= \int_0^1 ((1+t)^2 + (1-t)) (-1) dt = \\ &= - \int_0^1 (1 + 2t + t^2 + 1 - t) dt = - \int_0^1 (t^2 + t + 2) dt = \\ &= - \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t + 2t \right]_0^1 = - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) = - \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f .

Sia $(x, y, z) \in D^\circ$; si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap D^\circ = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

Si ha

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

Sia

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z - 1$$

F_1 è la superficie differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 2x - 3y + 4z$$

Se $(x, y, z) \in E$, allora esiste λ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(2, -3, 4) = \lambda (2x, 2y, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ 4 = \lambda \\ z = 1 - x^2 - y^2 \\ z > 0 \end{cases}$$

Si ha $\lambda = 4$; quindi $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{3}{8}$, $z = 1 - \frac{1}{16} - \frac{9}{64} = \frac{51}{64}$

Si ha quindi

$$E \cap E_1 \subset \left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{51}{64} \right) \right\}$$

Sia

$$h: \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1 \} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow z$$

F_2 è la superficie differenziale di $\mathbb{R}^3$ di equazione
contesaion 2 $h(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } h(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(2, -3, 4) = \lambda (0, 0, 1)$$

Si ha $z = 0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia

$$K: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x^2 + y^2 - 1, z)$$

F_3 è la curva differenziale di $\mathbb{R}^3$ di equazione
contenome $K(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali
che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } K_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } K_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(2, -3, 4) = \lambda (2x, 2y, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ 4 = \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni.

Supponiamo $\lambda \neq 0$

Si ha $x = \frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{3}{2\lambda}$; quindi

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1; \text{ quindi}$$

$$13 = 4\lambda^2; \text{ quindi } \lambda^2 = \frac{13}{4}; \text{ quindi } \lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x = \frac{2}{13}\sqrt{13}$, $y = -\frac{3}{13}\sqrt{13}$, $z = 0$

quindi $(x, y, z) = \left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right)$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x = -\frac{2}{13}\sqrt{13}$, $y = \frac{3}{13}\sqrt{13}$, $z = 0$

quindi $(x, y, z) = \left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right)$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{51}{64}\right), \left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right), \left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{51}{64}\right) = 2\frac{1}{4} + 3\frac{3}{8} + 4\frac{51}{64} = \frac{8+18+51}{16} = \frac{77}{16}$$

$$f\left(\frac{2}{13}\sqrt{13}, -\frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) = \sqrt{13}$$

$$f\left(-\frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{13}\sqrt{13}, 0\right) = -\sqrt{13}$$

Si ha $\sqrt{13} < \frac{77}{16}$ se e solo se $13 \cdot 16^2 < 77^2$ cioè

se e solo se $3328 < 5929$ e ciò è vero.

Si ha quindi

$$\max(f) = \frac{77}{16}, \quad \min(f) = -\sqrt{13}$$

Esercizio 6

L'equazione differenziale è di forma normale e a variabili separabili ed è assegnata su $\mathbb{R} - \{1\} \times \mathbb{R}^*$

Essendo il dominio della soluzione un intervallo e dovendo tale intervallo contenere $1-\epsilon < 1$, possiamo supporre $x < 1$.

Dovendo essere la soluzione diversa da 0 e assumendo il valore $-\sqrt{2} < 0$, possiamo supporre $y < 0$

Il problema di Cauchy assegnato è quindi equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y(x-1)} \\ y(1-\epsilon) = -\sqrt{2} \end{cases} \quad x < 1, \quad y < 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = \frac{1}{x-1} \\ y(1-e) = -\sqrt{2} \end{cases}, \quad x < 1, \quad y < 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita di incognite $y(x)$ con soluzioni tali che $1-e \in \text{dom}(y)$

$$\int_{-\sqrt{2}}^y t \, dt = \int_{1-e}^x \frac{1}{t-1} \, dt, \quad x < 1, \quad y < 0$$

$$\text{cioè} \quad \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\sqrt{2}}^y = \left[\log |t-1| \right]_{1-e}^x, \quad x < 1, \quad y < 0$$

$$\text{cioè} \quad \frac{1}{2} (y^2 - 2) = \log(1-x) - \log e, \quad x < 1, \quad y < 0$$

$$\text{cioè} \quad y^2 - 2 = 2 \log(1-x) - 2, \quad x < 1, \quad y < 0$$

$$\text{cioè} \quad y^2 = 2 \log(1-x), \quad x < 1, \quad y < 0$$

Se $y(x)$ è soluzione, si ha $\log(1-x) > 0$;

quindi $1-x > 1$; quindi $x < 0$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$y^2 = 2 \log(1-x), \quad x < 0, \quad y < 0$$

cioè a

$$y = \pm \sqrt{2 \log(1-x)} \quad , \quad x < 0, \quad y < 0$$

cioè, essendo $y < 0$, o

$$y = -\sqrt{2 \log(1-x)} \quad , \quad x < 0, \quad y < 0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{2 \log(1-x)}$$

Esercizio 7

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Le soluzioni sono -1 e -2

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = e^{-2x}$$

Determiniamo una soluzione dell'equazione non omogenea

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = (A + Bx) e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi(x) = A e^x + B x e^x$$

$$\psi'(x) = Ae^x + Be^x + Bxe^x = (A+B)e^x + Bxe^x$$

$$\psi''(x) = (A+B)e^x + Be^x + Bxe^x = (A+2B)e^x + Bxe^x$$

La funzione $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$(A+2B)e^x + Bxe^x + 3((A+B)e^x + Bxe^x) + 2(Ae^x + Bxe^x) = xe^x$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} A+2B+3A+3B+2A=0 \\ B+3B+2B=1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} B = \frac{1}{6} \\ 6A+5B=0 \end{cases}, \text{ cioè} \begin{cases} B = \frac{1}{6} \\ A = -\frac{5}{36} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\psi(x) = \left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{6}x\right)e^x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - \frac{5}{36} e^x + \frac{1}{6} x e^x$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} - \frac{5}{36} e^x + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} x e^x = \\ &= -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{36} e^x + \frac{1}{6} x e^x \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{5}{36} = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{36} = 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

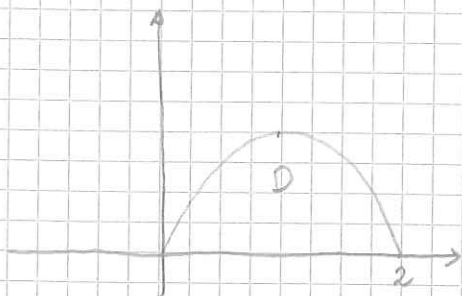
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{36} \\ -c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{36} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{9} \\ c_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{9} e^{-2x} - \frac{5}{36} e^x + \frac{1}{6} x e^x$$

Esercizio 8

La parabola $y = -x^2 + 2x$ ha vertice uguale a $(1, 1)$ e incontra l'asse x in 0 e 2



Si ha quindi $p_1(D) = [0, 2]$

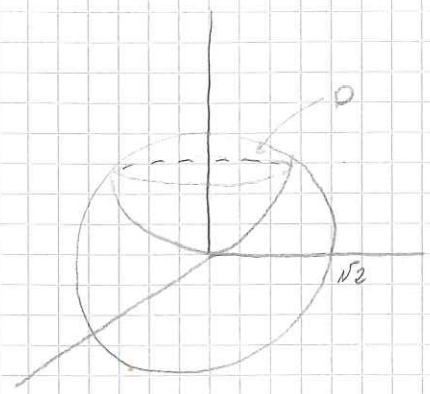
e per ogni $x \in [0, 2]$ si ha

$$D(x) = [0, -x^2 + 2x]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{-x^2+2x} y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{-x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (-x^2+2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right) = \frac{16}{5} - 8 + \frac{16}{3} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Esercizio 3 (1° modo)



L'intersezione della superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

con il paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

è data da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} z + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ cioè} \quad \begin{cases} z = -2 \quad \vee \quad z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Per $z = -2$ si ha $x^2 + y^2 = -2 < 0$

quindi il sistema non ha soluzioni reali.

Per $z = 1$ si ottiene la circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Si ha quindi $P_{1,2}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

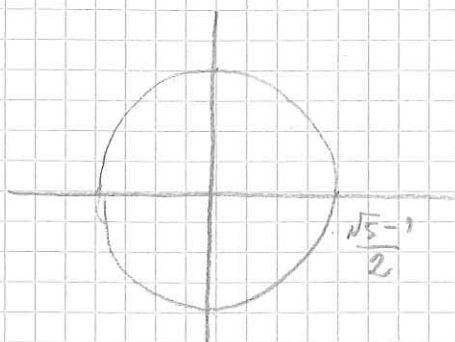
quindi $P_{1,2}(D)$ è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1

Per ogni $(x, y) \in P_{1,2}(D)$ si ha $D(x, y) = [x^2 + y^2, \sqrt{2 - x^2 - y^2}]$

Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx \, dy \, dz = \iint_{P_{1,2}(D)} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dx \, dy =$$

$$= \iint_{P_{1,2}(D)} (\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)) dx dy$$



Una parametrizzazione in
misura di $P_{1,2}(D)$ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$.

L'integrale sopra è quindi uguale a

$$\iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) \rho d\rho dt =$$

$$= \left(\int_0^1 (\rho \sqrt{2-\rho^2} - \rho^3) d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 (2-\rho^2)^{\frac{1}{2}} (-2\rho) d\rho - \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) =$$

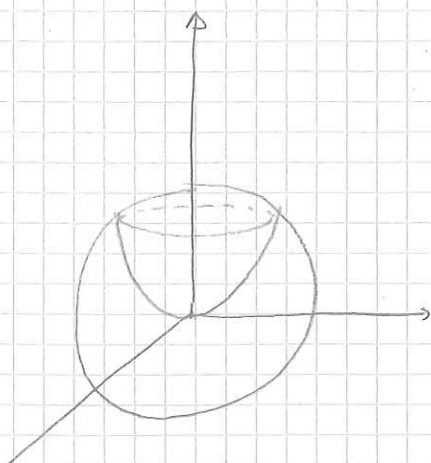
$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3} \left(1 - 2^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \left(\frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{7}{12} \right) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi$$

Esercizio 3 (2° modo)



l'intersezione della
superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

con il paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

è data da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} z + z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} z = -2 \text{ o } z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Per $z = -2$ si ha $x^2 + y^2 = -2 < 0$; quindi il sistema non ha soluzioni.

Per $z = 1$ si ottiene la circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

si ha $P_z(D) = [0, \sqrt{2}]$; per $z \leq 1$ si ha

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z\};$$

per $1 < z \leq \sqrt{2}$ si ha

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2 - z^2\}$$

si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx dy dz = \int_{P_z(D)} \left(\iint_{D(z)} dx dy \right) dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \text{mis}(D(z)) dz =$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}(D(z)) dz + \int_1^{\sqrt{2}} \operatorname{Im}(D(z)) dz =$$

$$= \int_0^1 \pi z dz + \int_1^{\sqrt{2}} \pi (2 - z^2) dz =$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 + \left[2z - \frac{1}{3} z^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \pi \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6} \right) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \pi$$