Analisi Matematica 2 - 7/2/14 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (ze^{x^2y}, x \sin(xyz)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
(b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
(c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S x dx \wedge dy + x dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, z = 1\}$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$e^y dx + xe^y dy .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$ye^y dx + e^x dy .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare la lunghezza della seguente curva

$$\gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t); t \in [0, 2\pi]\} .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 2y ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

11. (p. 2) (**Aut.**, **cr. 9**) Studiare la singolarità della funzione

$$f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z - \sin z}{z^6} .$$

Svolgimento e risposta.

12. (p. 4) (**Aut.**, **cr. 9**) Sia

$$f : \mathbf{C} - \{-1, -2\} \longrightarrow \mathbf{C}, z \longrightarrow \frac{z}{(z+1)(z+2)} ;$$

(a) determinare la corona circolare aperta massimale B di centro 0 contenuta nel dominio di f e contenente

$$\{z \in \mathbf{C}; |z| = 3\} ;$$

(b) determinare la serie di Laurent di punto iniziale 0 su B ed esprimere $f(z)$ come somma della serie di Laurent.

Svolgimento e risposta.

13. (p. 4) (**Aut.**, **cr. 9**) Calcolare il seguente integrale curvilineo :

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{(z+1)(z+2)} dz ,$$

dove Γ è la circonferenza

$$\{z \in \mathbf{C}; |z| = 3\}$$

orientata canonicamente.

Svolgimento e risposta.