

Analisi Matematica 2 - 7/2/14 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (ze^{x^2y}, x \sin(xyz)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S x \, dx \wedge dy + x \, dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, z = 1\}$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$e^y dx + xe^y dy .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$ye^y dx + e^x dy .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare la lunghezza della seguente curva

$$\gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t); t \in [0, 2\pi]\} .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 2y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^3$

b) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \left(z e^{x^2 y} (2xy), \sin(xyz) + x \cos(xyz) yz \right) = \\ &= \left(2xyz e^{x^2 y}, \sin(xyz) + xyz \cos(xyz) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \left(z e^{x^2 y} x^2, x \cos(xyz) xz \right) = \\ &= \left(x^2 z e^{x^2 y}, x^2 z \cos(xyz) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \left(e^{x^2 y}, x \cos(xyz) xy \right) = \\ &= \left(e^{x^2 y}, x^2 y \cos(xyz) \right)\end{aligned}$$

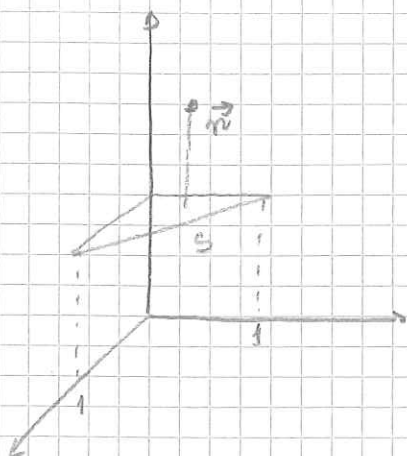
Si ha quindi

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz e^{x^2 y} & x^2 z e^{x^2 y} & e^{x^2 y} \\ \sin(xyz) + xyz \cos(xyz) & x^2 z \cos(xyz) & x^2 y \cos(xyz) \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned}f'(x, y, z): \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2, h_3) \longrightarrow \\ &\left(2xyz e^{x^2 y} h_1 + x^2 z e^{x^2 y} h_2 + e^{x^2 y} h_3, \right. \\ &\quad \left. (\sin(xyz) + xyz \cos(xyz)) h_1 + x^2 z \cos(xyz) h_2 + x^2 y \cos(xyz) h_3 \right)\end{aligned}$$

Esercizio 2



Sic

$$T = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 ; u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1 \}$$

Una parametrizzazione di S
non orientata è la funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

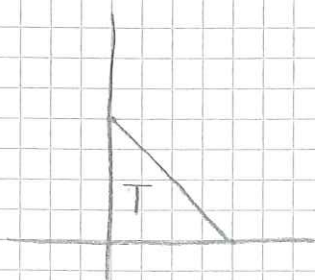
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Quindi φ è concorde con l'orientazione di S

Si ha quindi

$$\iint_S x dx \wedge dy + x dy \wedge dz =$$

$$= \iint_T \left(u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) du dv = \iint_T u du dv$$



Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ e per ogni $u \in [0, 1]$

$T(u) = [0, 1-u]$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \iint_T u \, du \, dv &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u \, dv \right) du = \\
 &= \int_0^1 u(1-u) \, du = \int_0^1 (u - u^2) \, du = \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia w la forma differenziale. Si ha $\text{dom}(w) = \mathbb{R}^2$

Si ha

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow x e^y$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^y$$

Quindi f è una primitiva di w . Quindi w è esatta.

L'insieme delle primitive di w è

$$\{f + c; c \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4

Sia w la forma differenziale. Si ha $\text{dom}(w) = \mathbb{R}^2$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(y e^y) = e^y + y e^y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x) = e^x$$

quindi la forma differenziale non è chiusa;
quindi non è esatta.

Esercizio 5

Una parametrizzazione di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (e^t \cos t + e^t(-\sin t), e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\sin t + \cos t))^2 + e^{2t}} =$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t) + e^{2t}} =$$

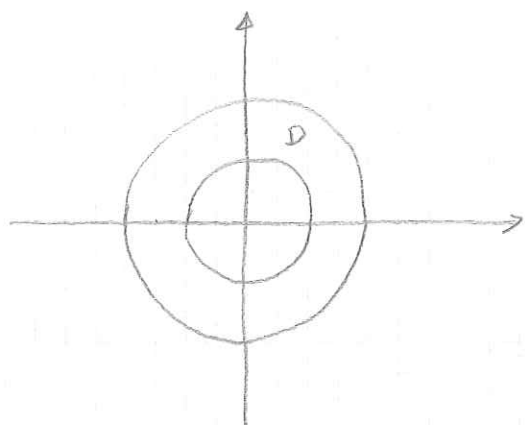
$$= \sqrt{e^{2t}(1 + 1 + 1)} = \sqrt{3} e^t$$

Si ha quindi

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^t dt =$$

$$= \sqrt{3} \left[e^t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{3} (e^{2\pi} - 1)$$

Esercizio 6



a) Sia $D = \text{dom}(f)$. Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x, y) \in D$; si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap D = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\text{Si ha } F_2(D) = F_1 \cup F_2$$

Sia

$$g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 - 4$$

F_1 è la curva differenziale di $\mathbb{R}^2$ di equazione $g_1(x, y) = 0$

Indichiamo ancora con f la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow 5x - 2y$$

Se $(x, y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y)$$

cioè tale che

$$(5, -2) = \lambda (2x, 2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.

Si ha $x = \frac{5}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$; quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4 \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$29 = 16\lambda^2 \quad ; \quad \text{quindi} \quad \lambda^2 = \frac{29}{16} \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{29}}{4}$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{\sqrt{29}}{4}, \text{ si ha } x = \frac{5}{2} \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{10\sqrt{29}}{29} \quad e$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{29}} = -\frac{4\sqrt{29}}{29} \quad ; \quad \text{cioè } (x, y) = \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29} \right)$$

$$\text{Per } \lambda = -\frac{\sqrt{29}}{4}, \text{ si ha } (x, y) = \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29} \right)$$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29} \right), \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29} \right) \right\}$$

$$\text{Sia } g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 - 1$$

F_2 è la curva differenziale di $\mathbb{R}^2$ di equazione
cartesiana $g_2(x, y) = 0$

Se $(x, y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g_2(x, y)$$

cioè tale che

$$(5, -2) = \lambda (2x, 2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$.

Si ha $x = \frac{5}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$; quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1; \text{ quindi}$$

$$29 = 4\lambda^2; \text{ quindi } \lambda^2 = \frac{29}{4}; \text{ quindi}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $x = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}; \text{ cioè } (x, y) = \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)$$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $(x, y) = \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right)$

Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right) \right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right), \left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right), \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{4\sqrt{29}}{29}\right) = \frac{50\sqrt{29}}{29} + \frac{8\sqrt{29}}{29} = \frac{58}{29}\sqrt{29} = 2\sqrt{29}$$

$$f\left(-\frac{10}{29}\sqrt{29}, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right) = -2\sqrt{29}$$

$$f\left(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = \frac{25}{29}\sqrt{29} + \frac{4}{29}\sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$$f\left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -\sqrt{29}$$

Si ha quindi

$$\max(f) = 2\sqrt{29}, \quad \min(f) = -2\sqrt{29}$$

Esercizio 7

L'equazione differenziale è a variabili separabili ed è assegnata su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Essendo $y(0) = 1 > 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y}{e^{y^2}} y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè

$$\begin{cases} y e^{-y^2} y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_1^y t e^{-t^2} dt = \int_0^x dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè

$$-\frac{1}{2} \int_1^y e^{-t^2} (-2t) dt = x, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè

$$\left[e^{-t^2} \right]_1^y = -2x, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè

$$e^{-y^2} - \frac{1}{e} = -2x, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

cioè

$$e^{-y^2} = \frac{1-2ex}{e}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

Si ha

$$\frac{1-2ex}{e} > 0;$$

quindi $1-2ex > 0$; quindi $x < \frac{1}{2e}$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$e^{-y^2} = \frac{1-2ex}{e}, \quad x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

cioè a

$$-y^2 = \log \frac{1-2ex}{e}, \quad x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

cioè a

$$y^2 = -\log \frac{1-2ex}{e}, \quad x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

Si ha

$$-\log \frac{1-2ex}{e} > 0;$$

$$\text{quindi } \log \frac{1-2ex}{e} < 0; \text{ quindi } \frac{1-2ex}{e} < 1$$

$$\text{quindi } 1-2ex < e; \text{ quindi } 2ex > 1-e; \text{ quindi}$$

$$x > \frac{1-e}{2e}$$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$y^2 = -\log \frac{1-2ex}{e}, \quad \frac{1-e}{2e} < x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

ovvero a

$$y = \pm \sqrt{\log \frac{e}{1-2ex}}, \quad \frac{1-e}{2e} < x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

ovvero, essendo $y > 0$, a

$$y = \sqrt{\log \frac{e}{1-2ex}}, \quad \frac{1-e}{2e} < x < \frac{1}{2e}, \quad y > 0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi:] \frac{1-e}{2e}, \frac{1}{2e} [\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\log \frac{e}{1-2ex}}$$

Esercizio 8

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \text{ cioè}$$

$$\lambda^2(\lambda + 1) - (\lambda + 1) = 0, \text{ cioè}$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = 0, \text{ cioè}$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0, \text{ cioè}$$

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = 1$ semplice e $\lambda = -1$ doppia

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^x, \varphi_2(x) = e^{-x}, \varphi_3(x) = x e^{-x}$$

Essendo -1 soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A x^2 e^{-x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi'(x) = 2Ax e^{-x} - A x^2 e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= 2A e^{-x} - 2Ax e^{-x} - 2Ax e^{-x} + A x^2 e^{-x} = \\ &= 2A e^{-x} - 4Ax e^{-x} + A x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'''(x) &= -2A e^{-x} - 4A e^{-x} + 4Ax e^{-x} + 2Ax e^{-x} - A x^2 e^{-x} = \\ &= -6A e^{-x} + 6Ax e^{-x} - A x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

quindi y è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$\begin{aligned} & -6Ae^{-x} + 6AXe^{-x} - AX^2e^{-x} + 2Ae^{-x} - 4AXe^{-x} + AX^2e^{-x} \\ & - 2AXe^{-x} + AX^2e^{-x} - AX^2e^{-x} = 2e^{-x} \end{aligned}$$

cioè se e solo se

$$-4Ae^{-x} = 2e^{-x}$$

cioè se e solo se $A = -\frac{1}{2}$

Si ha quindi

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3e^{-x} - c_3xe^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} = \\ &= c_1e^x + (-c_2 + c_3)e^{-x} - c_3xe^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= c_1e^x + (c_2 - c_3)e^{-x} - c_3e^{-x} + c_3xe^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\ &+ xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = \\ &= c_1e^x + (c_2 - 2c_3)e^{-x} + c_3xe^{-x} - e^{-x} + 2xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 - c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se}$$

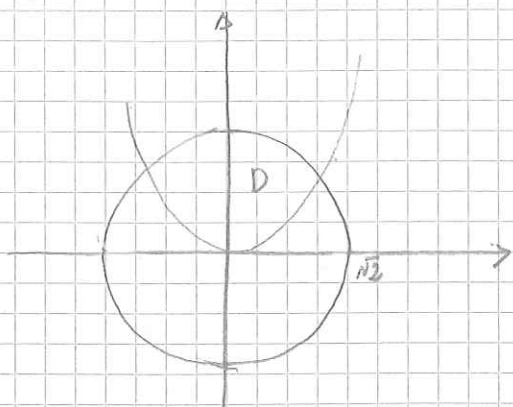
$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -2c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_3 = 1 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se}$$

$$\begin{cases} c_3 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{4} \\ c_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Biendry è quindi la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

Esercizio 3



I punti comuni alle circonferenze $x^2 + y^2 = 2$ e alla parabola $y = x^2$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Si ha

$$x^2 + x^4 = 2; \text{ cioè}$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0; \text{ quindi}$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} ; \text{ quindi}$$

$$x^2 = 1 \text{ o } x^2 = -2$$

L'equazione $x^2 = -2$ non ha soluzioni; quindi
si ha $x^2 = 1$; quindi $x = \pm 1$

La condizione $x \geq 0$ per i punti di D dà $x = 1$.

Si ha quindi

$p_1(D) = [0, 1]$ e per ogni $x \in [0, 1]$

$$D(x) = [x^2, \sqrt{2-x^2}]$$

Si ha quindi

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x (\sqrt{2-x^2} - x^2) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx =$$

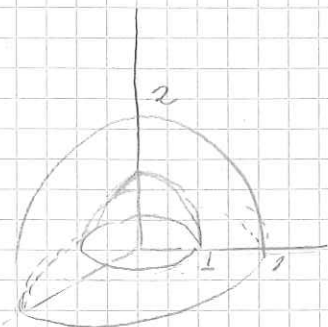
$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 (2-x^2)^{\frac{1}{2}} (-2x) \, dx - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(1 - 2^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{7}{12}$$

Esercizio 10

Una parametrizzazione in misure di ρ è data dalla funzione α



$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \in [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, \varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \varphi$

Si ha quindi

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} \rho \cos \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \left(\int_1^2 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$\left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi =$$

$$\left(4 - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{15}{4} \pi$$