Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Definizione di sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \dots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, …, φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$; si dice che φ_1, φ_2, …, φ_N è un sistema fondamentale di soluzioni di $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ se …

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla base per lo spazio normale ad una sottovarietà in un suo punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m; sia $x_0 \in V$; sia U un intorno aperto di x_0; sia $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^{N-m}$; sia f di classe C^1; sia $U \cap V = \{x \in U; f(x) = 0\}$; sia $(\forall x \in U)$ rango$(f'(x) = N - m$; allora una base dello spazio normale a V in x_0 è …

RISPOSTA

[3]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di segno arbitrario di una variabile**

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta …

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di parte positiva di una funzione.** Sia A un insieme; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; allora la parte positiva di f è la funzione …

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}\, x \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di gradiente di una funzione in un punto.
2. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
3. *** Quali sono le espressioni ha $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
4. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.
5. *** Enunciare il teorema di Schwarz sulle derivate parziali seconde.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Teorema sulla espressione del valore del differenziale di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f differenziabile in a; sia $h \in \mathbf{R}^N$; allora si ha $df(a)(h) = \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $x_0 \in I$; siano $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla derivata parziale di una funzione composta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; siano $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $B \subset \mathbf{R}^M$; sia $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $f(A) \subset B$; sia f differenziabile in a; sia g differenziabile in $f(a)$; sia $j = 1, 2, \ldots, N$; allora si ha $D_j(g \circ f)(a) = \ldots$.

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di orientazione positiva dello spazio normale.** Sia (V, O) una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m < N$; sia $x_0 \in V$; sia $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ una base positiva di $T_{x_0}(V)$; si chiama orientazione positiva di $N_{x_0}(V)$ la classe di equivalenza di una base $(w_1, w_2, \ldots, w_{N-m})$ tale che la base di $\mathbf{R}^N$ ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow g(t, t^2, 3t)$, dove $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1; trovare la derivata) di f, esprimendola attraverso le derivate parziali di g.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
5. * Dire come si ottiene una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali curvilinei.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di segno arbitrario di una variabile**

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di integrale di una funzione integrabile rispetto ad una sottovarietà.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f m-misurabile e m-integrabile; sia $D \subset \mathbf{R}^m$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; si pone $\int_A f(x)\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere la seguente equazione differenziale $y' = -y + 3$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x)$.
4. * Dare la definizione di soluzione per un sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.
5. * Esprimere scalarmente il sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale lineare d'ordine n (scrivere l'equazione) ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in \mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine n di forma normale.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $a \in \mathbf{R}$; siano $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbf{R}$; sia $(a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A$; sia I intervallo non banale di $\mathbf{R}$ tale che $a \in I$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy di incognita $y(x)$,...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. *** Dare la definizione di equazione differenziale di forma normale.
3. *** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
4. * Dare la definizione di equazione differenziale a variabili separate.
5. * Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separate (equivalenza con equazioni implicite ...).

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Teorema sul rapporto fra forme differenziali esatte e forme differenziali chiuse.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di flusso.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $G : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione $N-1$ parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M $N-1$-misurabile; sia G $N-1$-misurabile su M; sia G $N-1$-integrabile su M; si chiama flusso del campo di vettori F attraverso M l'integrale ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione implicita in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non vuoto di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione implicita di incognita $y(x)$, $f(x,y) = 0$ se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di prodotto esterno di due forme lineari.** Siano $L_1, L_2 : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ forme lineari; si chiama prodotto esterno di L_1 e di L_2 la forma bilineare $L_1 \wedge L_2 : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D x \, dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, x+y \leq 1, x-y \leq 1\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di sottovarietà differenziale parametrizzabile di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m.
2. * Spiegare come un segmento aperto siano delle sottovarietà differenziale parametrizzabile di $\mathbf{R}^N$ di dimensione 1.
3. *** Dare la definizione di derivabilità e di derivata direzionale.
4. * Spiegare il significato geometrico di derivata direzionale, anche attraverso un disegno.
5. *** Enunciare il teorema sul rapporto fra differenziabilità e derivate direzionali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale lineare d'ordine n (scrivere l'equazione) ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f, \sigma, \xi)$ è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di primitiva di una forma differenziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è una primitiva di ω se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla soluzione di equazione differenziale di ordine n di forma normale.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora φ è soluzione dell'equazione differenziale d'ordine n di forma normale di funzione incognita $y(x)$,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

se e solo se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^3 e^x, dx \ .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
2. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
3. ** Dare la definizione di insieme stellato rispetto ad un punto. Dare la definizione di insieme stellato.
4. ** Enunciare il teorema di Poincaré.
5. * Cosa significa forma differenziale localmente esatta? Come vengono fuori?

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Teorema sulla formula di Leibniz-Newton.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f, \sigma, \xi)$ è ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di misura di un insieme misurabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; si pone $\mathrm{mis}(A) = \dots$
RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla caratterizzazione di una forma bilineare simmetrica semidefinita positiva attraverso la sua matrice.** Sia $T : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica; sia $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,N}$ la matrice di T; allora T è semidefinita positiva se e solo se ...
RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D y\, dxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, x + y \leq 1, -x + y \leq 1\}$.
RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di misura di un insieme rispetto ad una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
2. ** Utilizzando l'espressione del graamiano per $m = 2$, dire come si esprime l'area di una di un sottoinsieme misurabile di una superficie differenziale parametrizzabile.
3. ** Enunciare il teorema sulla espressione della misura di un sottoinsieme di una ipersuperficie cartesiana.
4. ** Calcolare la lunghezza di una circonferenza.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Definizione dei simboli di Gauss E, F, G.** Sia D un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ derivabile parzialmente rispetto agli indici 1 e 2; sia $(u,v) \in D$; allora i simboli di Gauss $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ sono dati da ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale sul prodotto di due insiemi misurabili di una funzione misurabile positiva.** Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^N$; sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^M$; sia $f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile e positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano di una funzione misurabile positiva.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N \times R^M}$; sia $\mathrm{pr}_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile; sia $f \geq 0$; allora ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla coordinata di una forma lineare rispetto alla base canonica di $L(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma lineare; allora la coordinata di T rispetto alla base canonica di $\mathrm{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D y\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, x+y \leq 1, -x+y \leq 1\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di integrale di una m-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m.
2. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
3. * Dare la definizione di flusso di un campo di vettori G su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale orientata di $\mathbf{R}^N$ di dimensione $N-1$.
4. * Enunciare il teorema che lega il lavoro di un campo di vettori F su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale orientata di $\mathbf{R}^N$ di dimensione $N-1$ all'integrale di una $N-1$-forma
5. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto; enunciare il teorema sulla matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di gradiente in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \dots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora il gradiente di f in a è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di $y' = f(x)$.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia F una primitiva di f; allora l'insieme delle soluzioni di $y' = f(x)$ ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema su forme differenziali chiuse e forme differenziali localmente esatte.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A stellato; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ una forma differenziale lineare; sia ω di classe C^1; sia ω chiusa; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare l'area della superficie cilindrica $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h\}$, con $r, h > 0$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
2. *** Dire il rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
3. * Dare la definizione di traiettoria.
4. ** Dare la definizione di integrale di una forma differenziale su una traiettoria.
5. * Enunciare il teorema sull'integrale su una traiettoria del differenziale di una funzione. Dimostrare il teorema sull'integrale del differenziale di una funzione.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale di tipo normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni negative di una variabile.** Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; sia $f \leq 0$; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme di una sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f m-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}^m$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; si pone $\int_A f\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di insieme sconnesso.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è sconnesso se $ldots$.

RISPOSTA

[5]. (E) Dire se la seguente forma differenziale è esatta; in caso affermativo trovare l'insieme delle primitive: $4x^3y\, dx + x^4\, dy$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale d'ordine n.
3. * Spiegare l'equivalenza fra un'equazione differenziale d'ordine n e un sistema di n equazioni del primo ordine.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema sulle soluzioni costanti di un'equazione a variabili separabili.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sul piano xy.** Sia $A \subset \mathbf{R}^3$; sia A misurabile; sia $p_{1,2}(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di scomposizione di un intervallo.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $\sigma \subset I_{R^N}$; sia σ finita; sia $(\forall J \in \sigma)\ J \subset I$; si dice che σ è una scomposizione di I se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura $\text{mis}(I)$ è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di integrale di Lebesgue della costante $+\infty$.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N}$; poniamo $\int_A +\infty \, dx = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio tangente alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ definita dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^3 \end{cases} \quad , \ t \in \mathbf{R}$$

nel punto corrispondente al valore $t = 1$ del parametro.

RISPOSTA

[6]. (O) **Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Enunciare il teorema che permette di definire una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m attraverso una equazione $f(x) = 0$.
2. * Dare qualche esempio di sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m utilizzando il teorema sopra (coniche e quadriche).
3. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
4. * Dare la definizione di matrice di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.
5. *** Enunciare il teorema riguardante la matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Definizione di forma differenziale chiusa.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i \, dx_i$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; si dice che ω è chiusa se ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di matrice di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia T lineare; allora la matrice di T è ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di insieme stellato.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è stellato se ...
RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di orientazione positiva dello spazio normale.** Sia (V, O) una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m < N$; sia $x_0 \in V$; sia $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ una base positiva di $T_{x_0}(V)$; si chiama orientazione positiva di $N_{x_0}(V)$ la classe di equivalenza di una base $(w_1, w_2, \ldots, w_{N-m})$ tale che la base di $\mathbf{R}^N$ ...
RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di Riemann $\int\int_{[0,1]\times[0,2]} (x + y) \, dxdy$.
RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione integrale di punto iniziale x_0.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
3. *** Enunciare il teorema relativo alla formula di Leibniz-Newton.
4. * Dimostrare il teorema relativo alla formula di Leibniz-Newton.
5. * Enunciare il teorema che collega l'integrale $\int_{(x,y)} f$ con l'integrale $\int_x^y f$ definito come variazione di una primitiva.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Teorema su estremanti relativi e gradiente.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura mis$(I)$ è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di lavoro.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia F 1-misurabile su M; sia F 1-integrabile su M; si chiama lavoro del campo di vettori F su M l'integrale ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla ortogonalità del prodotto vettoriale.** Sia $n \geq 2$; siano $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^N$; allora $v_1 \overline{\wedge} v_2 \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} v_{N-1}$ è ortogonale a ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Dire il rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
5. * Cosa significa forma differenziale localmente esatta? Come vengono fuori?

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano di una funzione misurabile positiva.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N \times R^M}$; sia $\mathrm{pr}_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile; sia $f \geq 0$; allora ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema di Schwarz.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; siano $k, h = 1, 2, \ldots, N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione del flusso tramite l'integrale della $(N-1)$-forma associata in modo complementare al campo di vettori.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $G : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione $N-1$ parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M $N-1$-misurabile; sia G $N-1$-misurabile su M; sia G $N-1$-integrabile su M; allora si ha $\int_M (G|\vec{n})\, ds_{N-1} = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x \sin x \, dx \ .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Dire il rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
5. * Cosa significa forma differenziale localmente esatta? Come vengono fuori?

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Definizione di forma differenziale esatta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; si dice che ω è esatta se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di matrice jacobiana in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la matrice jacobiana di f in a è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ tale che $x_0 \in I$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema implicito di incognita $y(x)$, $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla caratterizzazione di una forma bilineare simmetrica in $\mathbf{R}^2$ con determinante della matrice $= 0$ e $a_{1,1} \geq 0$, $a_{2,2} \geq 0$.** Sia $T : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica; sia $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,2}$ la matrice di T; sia $\det(a) = 0$ e $a_{1,1} \geq 0$, $a_{2,2} \geq 0$; allora T ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio normale alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ definita dalla equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

in un punto (x_0, y_0, z_0) della sottovarietà.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di prodotto vettoriale di $N-1$ vettori di $\mathbf{R}^N$. Esplicitare la definizione in $\mathbf{R}^3$.
2. * Enunciare il teorema sul rapporto fra graamiano e prodotto vettoriale.
3. ** Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme misurabile di una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
4. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una curva differenziale parametrizzabile.
5. ** Calcolare la lunghezza di una elica circolare.

RISPOSTA