Analisi Matematica 2 - 10/6/14 - Compito 1 - Versione 1

1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da
$$f(x,y) = ((x-y)^x, (x-y)^y) \; ;$$
   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie
$$\int\int_S (x+z)\, ds \; ,$$
   dove S è la superfice
$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \; x^2+y^2=4, \; 0 \le z \le 1, \; x \ge 0\} \; .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x^2y + xy + 3 \; .$$

   Svolgimento e risposta.

2

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma (x^2 + y)dy \; ,$$

dove Γ è la curva orientata

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\} \; ,$$

con orientazione per la quale il punto iniziale di Γ è $(3,0)$ e il punto finale $(0,2)$.

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$, per $n \neq 1$, o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\; 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x - y + z \; ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di una funzione razionale non figurante negli integrali indefiniti di base.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^{2x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ 1 \leq z \leq 2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y>0\}$$

b) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f(x,y) = \left(e^{x\log(x-y)},\ e^{y\log(x-y)} \right)$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(e^{x\log(x-y)}\left(\log(x-y)+\frac{x}{x-y}\right),\ e^{y\log(x-y)}\, y\frac{1}{x-y} \right) =$$

$$= \left((x-y)^x\left(\log(x-y)+\frac{x}{x-y}\right),\ (x-y)^y\frac{y}{x-y} \right) =$$

$$= \left((x-y)^x\left(\log(x-y)+\frac{x}{x-y}\right),\ y\,(x-y)^{y-1} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(e^{x\log(x-y)}\, x\frac{1}{x-y}(-1),\ e^{y\log(x-y)}\left(\log(x-y)+y\frac{1}{x-y}(-1)\right) \right) =$$

$$= \left(-(x-y)^x\frac{x}{x-y},\ (x-y)^y\left(\log(x-y)-\frac{y}{x-y}\right) \right)$$

$$= \left(-x\,(x-y)^{x-1},\ (x-y)^y\left(\log(x-y)-\frac{y}{x-y}\right) \right)$$

Si ha quindi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (x-y)^x\left(\log(x-y)+\frac{x}{x-y}\right) & -x\,(x-y)^{x-1} \\ y\,(x-y)^{y-1} & (x-y)^y\left(\log(x-y)-\frac{y}{x-y}\right) \end{pmatrix}$$

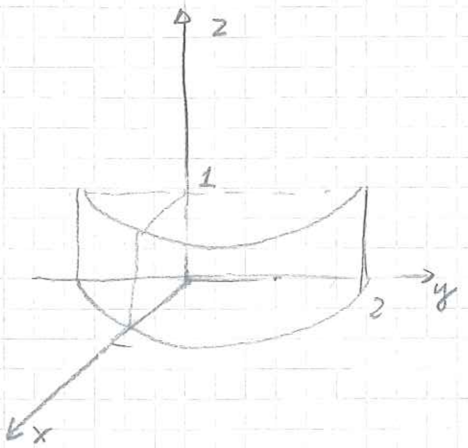
c) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$f'(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (h_1, h_2) \to$

$$\left((x-y)^x \left(\log(x-y) + \frac{x}{x-y}\right) h_1 - x(x-y)^{y-1} h_2 , \right.$$

$$\left. y(x-y)^{y-1} h_1 + (x-y)^y \left(\log(x-y) - \frac{y}{x-y}\right) h_2 \right)$$

Esercizio 2



Una parametrizzazione di S è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = u \end{cases} \quad (t,u) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$$

Per ogni $(t,u) \in \operatorname{dom} \varphi$ si ha

$$\varphi'(t,u) = \begin{pmatrix} -2\sin t & 0 \\ 2\cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$E(t,u) = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$

$F(t,u) = 0$

$G(t,u) = 1$

$\sqrt{E(t,u)\,G(t,u) - (F(t,u))^2} = \sqrt{4} = 2$

Si ha quindi

$$\iint_S (x+z)\, ds = \iint_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]} (2\cos t + u) \cdot 2 \, dt\, du =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (2\cos t + u)\, du \right) dt =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[2u\cos t + \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 \right) dt =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos t + \frac{1}{2} \right) dt = 2 \left[2 \sin t + \frac{1}{2} t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2 \left(2 + \frac{\pi}{4} + 2 + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(4 + \frac{\pi}{2} \right) = 8 + \pi$$

Esercizio 3

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x$$

Il punto (x, y) è critico per f se e solo se

$$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ o } x = -1 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ si ha $y = 0$; si trova $(0,0)$

Se $x = -1$ si ha $-2y + y = 0$, cioè $-y = 0$, cioè $y = 0$

si trova $(-1, 0)$

I punti critici di f sono quindi $(0,0)$ e $(-1,0)$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x+1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Si ha quindi

$$\mathcal{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $(x,y) = (0,0)$ si ha

$$\mathcal{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$; quindi $(0,0)$ è punto di sella

Per $(x,y) = (-1,0)$ si ha

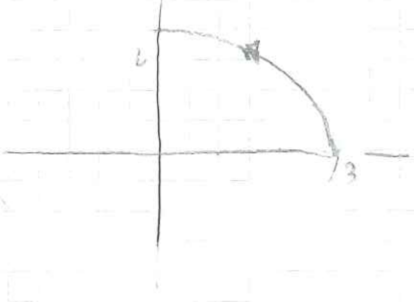
$$\mathcal{H} f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$; quindi $(-1,0)$ è punto di sella

Quindi f non ammette estremanti relativi.

Esercizio 4



Una parametrizzazione di Γ orientata è

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma (x^2+y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\cos^2 t + 2\sin t)\, 2\cos t \, dt =$$

$$= 2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos t \, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt\right) =$$

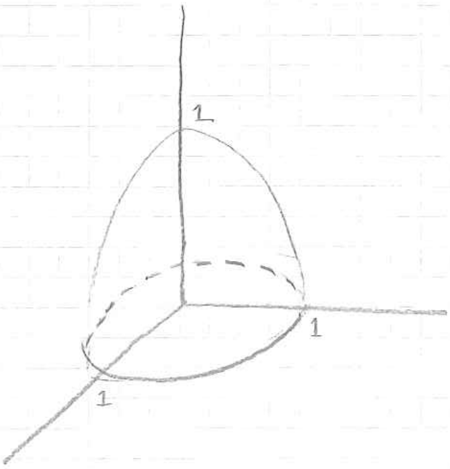
$$= 2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\cos t \, dt + 2\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt - 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \cos t \, dt + 2\,\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(9\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 9\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) =$$

$$= 2(9 - 3 + 1) = 2 \cdot 7 = 14$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, f ammette massimo e minimo

Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x,y,z) \in \mathring{D}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap \mathring{D} = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{(x,y,z) \in R^3 ;\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in R^3 ;\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$$

$$F_3 = \{(x,y,z) \in R^3 ;\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$

Sia

$$g : \{(x,y,z) \in R^3 ;\ z > 0\} \longrightarrow R,\ (x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z - 1$$

F_1 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x,y,z) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$R^3 \longrightarrow R,\ (x,y,z) \rightarrow x - y + z$$

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z);$$ quindi

$$(1,-1,1) = \lambda(2x, 2y, 1).$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = \lambda \\ z = 1 - x^2 - y^2 \\ z > 0 \end{cases} ; \quad \text{quindi } (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Sia

$$h : \{ (x,y,z) \in R^3, \ x^2+y^2<1 \} \longrightarrow R, \quad (x,y,z) \to z$$

F_2 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 2 di equazione cartesiana $h(x,y,z)=0$

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange se $(x,y,z) \in F_2 \cap E$ esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} h(x,y,z) \quad ; \text{ quindi}$$

$$(1,-1,1) = \lambda (0,0,1)$$

Si ha quindi $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia $K : R^3 \longrightarrow R^2, \ (x,y,z) \to (x^2+y^2-1, z)$

F_3 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 1 di equazione cartesiana $K(x,y,z)=0$

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange se $(x,y,z) \in F_3 \cap E$, esistono $\lambda, \mu \in R$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} K_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} K_2(x,y,z)$$

quindi

$$(1,-1,1) = \lambda (2x, 2y, 0) + \mu (0,0,1) \quad , \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = \mu \\ x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases} ;$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$; si ha

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda};$$

quindi

$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1$; quindi $\frac{1}{2\lambda^2} = 1$; quindi

$\lambda^2 = \frac{1}{2}$; quindi $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Per $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; si trova

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Per $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; si trova

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$$

quindi si ha

$$E \subset \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Si ha $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ se e solo se $3 > 2\sqrt{2}$, cioè se e solo se $9 > 8$; ciò è vero; quindi si ha $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$

Si ha quindi $\max(f) = \frac{3}{2}$, $\min(f) = -\sqrt{2}$

Esercizio 6

Si tratta di un'equazione a variabili separabili definite per $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}$
Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^*, \; y \in \mathbb{R}$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x > 0, \; y \in \mathbb{R}$$

L'equazione differenziale $y' = \dfrac{3(1-y^2)}{x}$ ha le

soluzioni costanti

$\varphi_1 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \to 1$

e

$\varphi_2 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \to -1$

Dal teorema di unicità della soluzione di un problema di Cauchy segue subito che il problema di Cauchy sopra è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3(1-y^2)}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x > 0, \; -1 < y < 1 \;;$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-y^2}\, y' = \dfrac{3}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x > 0, \; -1 < y < 1$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita di incognita $y(x)$ con soluzioni tali che $1 \in dom(y)$

$$\int_0^y \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int_1^x \frac{3}{t}\, dt, \quad x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$-\int_0^y \frac{1}{t^2-1}\, dt = 3\left[\log t\right]_1^x, \quad x>0, \quad -1<y<1$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}, \quad x>0, \quad -1<y<1$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

Per $t=1$, si ha $1 = 2A$; quindi $A = \frac{1}{2}$; per $t=-1$ si ha $1 = -2B$; quindi $B = -\frac{1}{2}$.

Quindi

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$$

L'equazione implicita sopra diventa

$$-\int_0^y \left(\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) dt = 3\log x, \quad x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\left[\log|t-1| - \log|t+1|\right]_0^y = 3\log x, \quad x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_0^y = 3\log x, \quad x>0, \quad -1<y<1,$$

cioè

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 3\log x \quad , x>0, \quad -1<y<1$$

cioè, essendo, per $-1<y<1$, $\frac{y-1}{y+1}<0$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1-y}{1+y} = 3\log x, \quad x>0, \quad -1<y<$$

cioè

$$-\log\frac{1-y}{1+y} = 6\log x \quad , x>0 \quad , -1<y<1$$

$$\log\frac{1+y}{1-y} = \log x^6, \quad x>0, \quad -1<y<1,$$

cioè

$$\frac{1-y}{1+y} = x^6 \quad , x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$1-y = x^6 + x^6 y \quad , x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$y\,(x^6+1) = 1-x^6 \quad , x>0, \quad -1<y<1$$

cioè

$$y = \frac{1-x^6}{1+x^6}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi:\ ]0,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{1-x^6}{1+x^6}$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale lineare non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

Le soluzioni sono ± 2

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{2x}, \quad \varphi_2(x) = e^{-2x}$$

Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A x e^{2x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha che

$$\psi'(x) = A e^{2x} + 2 A x e^{2x}$$

$$\psi''(x) = 2A e^{2x} + 2A e^{2x} + 4Ax e^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4Axe^{2x} = e^{2x}$$

cioè

$$4Ae^{2x} = e^{2x}$$

cioè $4A = 1$, cioè $A = \frac{1}{4}$

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{4} x e^{2x}$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

Si ha

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

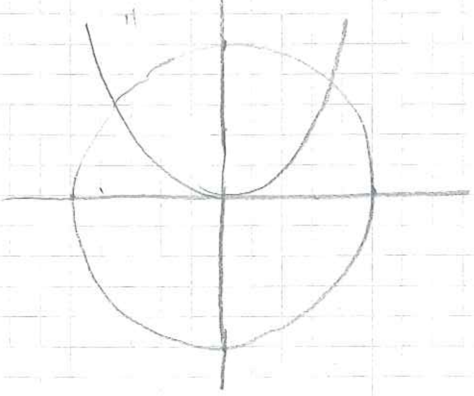
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_1 \\ 2c_1 + 2c_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{16} \\ c_2 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = -\frac{1}{16} e^{2x} + \frac{1}{16} e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

Esercizio 8



I punti comuni alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e alla parabola $y = x^2$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si ha $x^4 + x^2 = 1$; quindi

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Essendo $x^2 \geq 0$, si ha $x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; quindi

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Si ha quindi

$$P_1(D) = \left[-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} , \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right]$$

Per ogni $x \in P_1(D)$ si ha

$$D(x) = \left[x^2, \sqrt{1-x^2} \right]$$

Si ha quindi

$$\iint_D y \, dx \, dy =$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (1 - x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right)^5 =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\,\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{5} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{5}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{13}{15} - \frac{1}{15}\sqrt{5}\right)} =$$

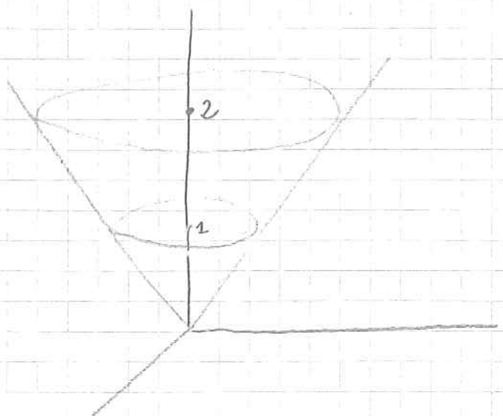
$$\frac{1}{15}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sqrt{(13-\sqrt{5})^2} = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}(169+5-26\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)(174-26\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{15}\sqrt{(\sqrt{5}-1)(87-13\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{87\sqrt{5}-65-87+13\sqrt{5}} = \frac{1}{15}\sqrt{100\sqrt{5}-152} =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{25\sqrt{5}-38}$$

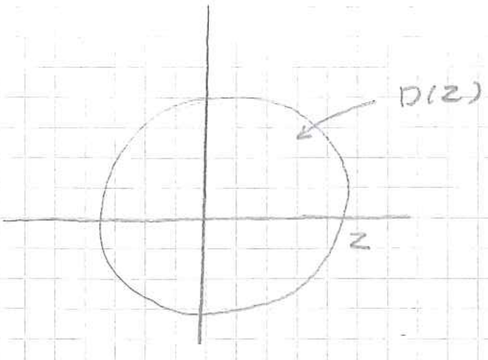
Esercizio 9



Si ha $p_3(D) = [1,2]$ e per ogni $z \in p_3(D)$ si ha

$$D(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le z^2\}$$

quindi $D(z)$ è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio z



Si ha quindi

$$\iiint_D z^2 \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_1^2 \left(\iint_{D(z)} z^2 \, dx\, dy \right) dz =$$

$$= \int_1^2 \left(z^2 \iint_{D(z)} dx\, dy \right) dz = \int_1^2 z^2 \, \text{mis}\,(D(z))\, dz =$$

$$= \int_1^2 z^2 \pi z^2 \, dz = \pi \int_1^2 z^4 \, dz = \pi \left[\frac{1}{5} z^5 \right]_1^2 =$$

$$\frac{\pi}{5} (32 - 1) = \frac{31}{5} \pi$$