

Analisi Matematica 2 - 25/6/14 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (\cos(xy), \cos(xy^2)) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(\frac{\pi}{2}, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(\frac{\pi}{2}, 1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(\frac{\pi}{2}, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(\frac{\pi}{2}, 1))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:

$$\int_{\gamma} x \, ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = x^2, 0 \leq x \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g , D_1g , D_2g , D_3g .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale:

$$\int \int_S x^2 dx \wedge dy + x dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leq 1\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 < 0$.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; -1 \leq y \leq x^4, -1 \leq x \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^4 - 2xy^2 - y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(2x) - \sin(2x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (x + 2y) \, dx dy ,$$

dove D è il triangolo di vertici $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(4, -2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z^2 \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x^2 + y^2 \leq z, \, 1 \leq z \leq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 25/6/14 - Compito 2 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (\cos(x^2 y), \cos(xy)) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, \frac{\pi}{2})$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, \frac{\pi}{2})$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, \frac{\pi}{2})$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, \frac{\pi}{2}))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:

$$\int_{\gamma} x \, ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow g(x^2 \sin(yz), 2x - 3y + \cos z) ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ e attraverso le derivate parziali di g , $D_1 g$, $D_2 g$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale:

$$\int \int_S x^2 dx \wedge dy - x dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; -x^4 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^4 - 2xy^2 + y ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{3+y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 3 \cos x - 2 \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D (2x + y) \, dx dy ,$$

dove D è il triangolo di vertici $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(-2, 4)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (z + 1) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, z \leq 3 - x^2 - y^2, \, 1 \leq z \leq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.