Analisi Matematica 2 - 25/6/14 - Compito 2 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (\cos(xy), \cos(xy^2)) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(\frac{\pi}{2}, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow T\{h\}$, esplicitando V, W e $T\{h\}$.
   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(\frac{\pi}{2}, 1))$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;
   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(\frac{\pi}{2}, 1))$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(\frac{\pi}{2}, 1)))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Risposta.

2. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:
$$\int_\gamma x \, ds \ ,$$
   dove
$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \ y = x^2, \ 0 \leq x \leq 1\} \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) \ ;$$
   esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ attraverso le derivate parziali di g, $D_1 g$, $D_2 g$, $D_3 g$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forma differenziale:

$$\int\int_S x^2\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz\ ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\}\ ,$$

orientata in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 < 0$.
Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq y \leq x^4,\ -1 \leq x \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow x^4 - 2xy^2 - y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(2x) - \sin(2x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

4

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x + 2y)\, dxdy \,,$$

dove D è il triangolo di vertici $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(4, -2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\, dxdydz \,,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z,\ 1 \leq z \leq 2\} \,.$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(-\sin(xy)\cdot y, -\sin(xy^2)\,y^2\right) =$$

$$(-y\sin(xy), -y^2\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-\sin(xy)\cdot x, \quad -\sin(xy^2)\cdot 2xy$$

$$(-x\sin(xy), - 2xy\sin(xy^2))$$

Si ha quindi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ -y^2\sin(xy) & -2xy\sin(xy^2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f'\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f'\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (h_1, h_2) \to \left(-h_1 - \frac{\pi}{2}h_2, -h_1 - \pi h_2\right)$$

b) Si ha

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \end{vmatrix} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Quindi esiste U intorno aperto di $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tale che

$$U \to f(U), \quad (x,y) \to f(x,y)$$

è un diffeomorfismo

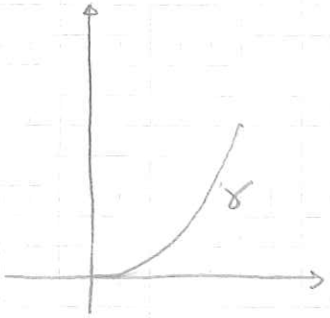
c) Si ha $f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = (0,0)$. Si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\pi & \frac{\pi}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f^{-1}(0,0) ; R^2 \to R^2, \ (k_1, k_2) \to \left(-2k_1 + k_2, \ \frac{2}{\pi} k_1 - \frac{2}{\pi} k_2\right)$$

Esercizio 2



Una parametrizzazione di γ è

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Chiamata φ tale parametrizzazione per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$\varphi'(t) = (1, 2t)$; quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

Si ha quindi

$$\int_\gamma x \, ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{8}\int_0^1 (1+4t^2)^{\frac{1}{2}} 8t \, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Esercizio 3

Per ogni $(x,y) \in R^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 g(x^2 \sin y, \ y^2 \sin x, \ \sin x + \cos y) \cdot 2x \sin y +$$

$+ D_2 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)\, y^2 \cos x +$

$D_3 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) \cos x =$

$= 2x \sin y \; D_1 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) +$

$y^2 \cos x \; D_2 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) +$

$\cos x \; D_3 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)$

e

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_1 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)\; x^2 \cos y +$

$D_2 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)\; 2y \sin x +$

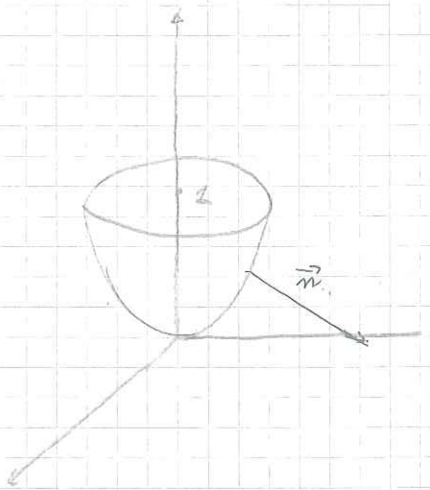
$D_3 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)\,(-\sin y) =$

$= x^2 \cos y \; D_1 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) +$

$2y \sin x \; D_2 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y) -$

$\sin y \; D_3 g(x^2 \sin y, y^2 \sin x, \sin x + \cos y)$

Esercizio 4



Sia

$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,;\, u^2 + v^2 \leq 1\}$

Una parametrizzazione di S non orientata è data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

Per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (1, 0, 2u)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (0, 1, 2v)$;

Si ha quindi

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Il segno della terza componente del versore normale con orientazione definita da φ è uguale al segno di

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

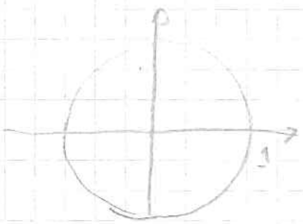
Quindi φ è una parametrizzazione di $-S$

Si ha quindi

$$\iint_S x^2\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz = - \iint_{-S} x^2\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz =$$

$$= - \iint_D \left(u^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} \right) du\, dv =$$

$$= - \iint_D (u^2 - 2u^2)\, du\, dv = \iint_D u^2\, du\, dv$$



La funzione α definita da

$$\begin{cases} u = \rho \cos t \\ v = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$$

è una parametrizzazione in misura di D

Per ogni $(\rho, t) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho, t)| = \rho$

L'espressione sopra è quindi uguale a

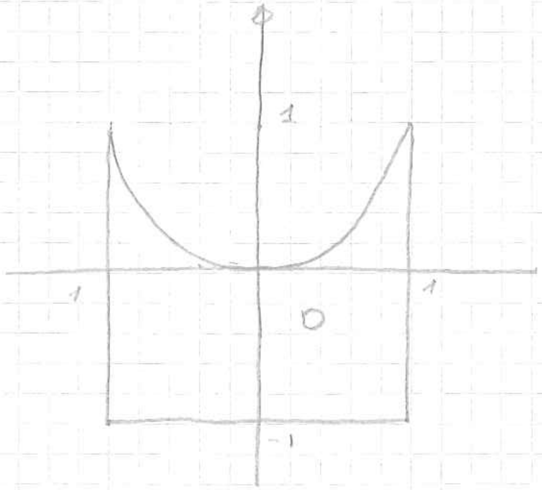
$$- \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \rho^2 \cos^2 t\ \rho\, d\rho\, dt$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3 \cos^2 t \, d\rho \, dt =$$

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$.
Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f.

Sia $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$: si ha,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy - 1$$

Se $(x,y) \in E$, si ha $\mathrm{grad}\, f(x,y) = 0$, cioè

$$\begin{cases} 4x^3 - 2y^2 = 0 \\ -4xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $x \neq 0$. Si ha

$$y = -\frac{1}{4x}$$

quindi $4x^3 - 2\left(-\frac{1}{4x}\right)^2 = 0$; quindi

$$4x^3 - 2\,\frac{1}{16x^2} = 0$$; quindi

$$4x^3 - \frac{1}{8x^2} = 0$$; quindi

$$\frac{32x^5 - 1}{8x^2} = 0$$; quindi

$32x^5 - 1 = 0$; quindi $x^5 = \frac{1}{32}$; quindi $x = \frac{1}{2}$.

Si ha quindi

$$y = -\frac{1}{4}\,2 = -\frac{1}{2}$$

Si trova il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Si ha quindi

$$E \cap \mathring{D} \subset \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Sia

$F_1 = [\,(-1,-1),\ (1,-1)\,]$

$F_2 = \,]\,(1,-1),\ (1,1)\,]$

$F_3 = \,]\,(-1,-1),\ (-1,1)\,]$

$F_4 = \{(x,y) \in R^2;\ y = x^4,\ x \in]-1,1[\,\}$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$

Sia $(x,y) \in F_1$; si ha $y = -1$; si ha quindi

$f(x,y) = f(x,-1) = x^4 - 2x + 1$

Sia

$g_1 : [-1, 1] \to R,\quad x \to x^4 - 2x + 1$

Sia E_1 l'insieme degli estremanti di g_1.

Sia $x \in]-1,1[$. Si ha

$g_1'(x) = 4x^3 - 2$

Si ha $g_1'(x)=0$ se e solo se $4x^3-2=0$, cioè se e solo se $x^3=\frac{1}{2}$, cioè $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Si ha quindi

$E_1 \cap]-1,1[\subset \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\}$

Quindi

$E_1 \subset \left\{ 1, -1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\}$

Quindi

$E \cap F_1 \subset \left\{ (1,-1), (-1,-1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1 \right) \right\}$

Sia $(x,y) \in F_2$; si ha $x=1$; si ha quindi

$f(x,y) = f(1,y) = 1-2y^2-y$. Si ha $-1<y\leq 1$.

Sia

$g_2 :]-1,1] \to R, \; y \to 1-2y^2-y$

Sia E_2 l'insieme degli estremanti di g_2

Sia $y \in]-1,1[$. Si ha

$g_2'(y) = -4y-1$

Si ha $g_2'(y)=0$ se e solo se $-4y-1=0$, cioè $y=-\frac{1}{4}$

Si ha quindi

$E_2 \cap]-1,1[\subset \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$

Quindi

$E_2 \subset \left\{ -\frac{1}{4}, 1 \right\}$

Quindi

$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(1, -\frac{1}{4}\right), (1,1) \right\}$

Sia $(x,y) \in F_3$. Si ha $x=-1$; si ha quindi

$f(x,y) = f(-1,y) = 1+2y^2-y$. Si ha $-1<y\leq 1$

Sia

$g_3 :]-1,1] \to R,\ y \to 1+2y^2-y$

Sia E_3 l'insieme degli estremanti di g_3

Sia $y \in]-1,1[$; si ha $g_3'(y) = 4y-1$

Si ha $g_3'(y)=0$ se e solo se $y = \frac{1}{4}$

Si ha quindi

$E_3 \cap]-1,1[\subset \{ \frac{1}{4} \}$

Quindi

$E_3 \subset \{ \frac{1}{4}, 1 \}$

Quindi si ha

$E \cap F_3 \subset \{ (-1, \frac{1}{4}), (-1,1) \}$

Sia $(x,y) \in F_4$; si ha $y = x^4$; quindi

$f(x,y) = x^4 - 2x(x^4)^2 - x^4 = -2x^9$ e $x \in]-1,1[$

Sia

$g_4 :]-1,1[\to R,\ x \to -2x^9$

Sia E_4 l'insieme degli estremanti di g_4

La funzione g_4 è strettamente decrescente

Si ha quindi $E_4 = \emptyset$

Si ha quindi

$E \cap F_4 = \emptyset$

Si ha quindi

$E \subset \{ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1,-1), (-1,-1), (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1)\ (1, -\frac{1}{4}), (1,1), (-1, \frac{1}{4}), (-1,1) \}$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1-4+8}{16} = \frac{5}{16}$$

$$f(1,-1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$f(-1,-1) = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 - 2\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1$$

$$f\left(1, -\frac{1}{4}\right) = 1 - 2\,\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{8-1+2}{8} = \frac{9}{8}$$

$$f(1,1) = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$f\left(-1, \frac{1}{4}\right) = 1 + 2\,\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8+1-2}{8} = \frac{7}{8}$$

$$f(-1,1) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Si ha quindi

$$\max(f) = 4, \quad \min(f) = -2$$

Esercizio 6

Si tratta di un problema di Cauchy con equazione differenziale a variabili separabili, assegnata per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^*$

Essendo $y(0) = \sqrt{3} > 0$, il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y} & , x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^* \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y} & , \ x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, y' = x \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita di incognita $y(x)$ tale che $0 \in \operatorname{dom}(y)$

$$\int_{\sqrt{3}}^{y} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_0^x dt \quad, \quad x \in \mathbb{R},\ y>0$$

cioè

$$\frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{y} (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} (2t)\, dt = \Big[\, t \,\Big]_0^x \quad, x \in \mathbb{R},\ y>0$$

cioè

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\sqrt{3}}^{y} = x \quad, \quad x \in \mathbb{R},\ y>0$$

cioè

$$\sqrt{1+y^2} - 2 = x, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

cioè

$$\sqrt{1+y^2} = x+2, \quad x \in \mathbb{R},\ y>0$$

Si ha $x+2 \geq 0$; quindi $x \geq -2$

L'equazione implicita sopra è equivalente a

$$\sqrt{1+y^2} = x+2 \quad, x \geq -2 \quad, \quad y>0$$

Quindi a

$$1+y^2 = (x+2)^2, \quad x \geq -\sqrt{2},\ y>0$$

cioè a

$y^2 = x^2 + 4x + 3$, $x \geq -2$, $y > 0$

Si ha $x^2 + 4x + 3 > 0$; quindi

$x < -3$ o $x > -1$; quindi, essendo $x \geq -2$, $x > -1$.

L'equazione implicita sopra è equivalente a

$y^2 = x^2 + 4x + 3$, $x > -1$, $y > 0$

Quindi a

$y = \pm\sqrt{x^2+4x+3}$, $x > -1$, $y > 0$

Quindi, essendo $y > 0$ a

$y = \sqrt{x^2+4x+3}$, $x > -1$, $y > 0$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$\varphi : \,]-1, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{4x^2+4x+3}$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy con equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$\lambda^2 + 1 = 0$

Le soluzioni sono $\lambda = \pm i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$\psi''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = \cos(2x) - \sin(2x)$$

cioè

$$-3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = \cos(2x) - \sin(2x)$$

cioè

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ -3B = -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Si ha

$$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{2}{3}\sin(2x) + \frac{2}{3}\cos(2x)$$

La funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$\begin{cases} c_1 - \dfrac{1}{3} = 0 \\ c_2 + \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè se e solo se} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{3} \\ c_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\cos x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Esercizio 8

Sia

$$T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\}$$

Una parametrizzazione in misura di D è data dalla funzione φ

$$(x,y) = u(1,2) + v(3,1) + (1-u-v)(4,-2), \qquad (u,v) \in T$$

cioè

$$\begin{cases} x = -3u - v + 4 \\ y = 4u + 3v - 2 \end{cases} \qquad (u,v) \in T$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

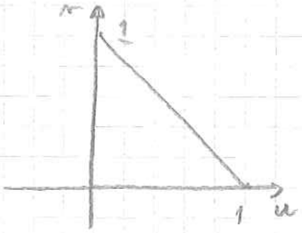
$$|\det \varphi'(u,v)| = \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right| = |-9+4| = |-5| = 5$$

Si ha quindi

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_T \left(-3u - v + 4 + 2(4u + 3v - 2)\right) 5\,du\,dv =$$

$$= 5 \iint_D (5u + 5v)\,du\,dv = 25 \iint_D (u+v)\,du\,dv$$



Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni $u \in [0,1]$

si ha $T(u) = [0, 1-u]$

Si ha quindi

$$25 \iint_T (u+v)\,du\,dv = 25 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (u+v)\,dv \right) du =$$

$$= 25 \int_0^1 \left[uv + \frac{1}{2} v^2 \right]_0^{1-u} du =$$

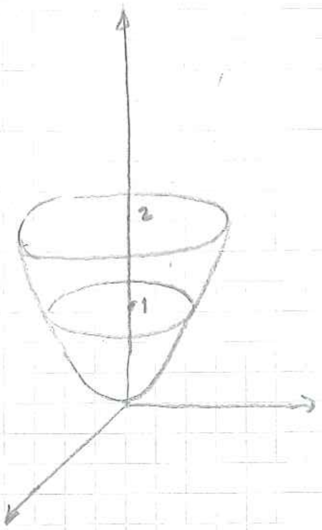
$$= 25 \int_0^1 \left(u(1-u) + \frac{1}{2}(1-u)^2 \right) du =$$

$$= 25 \int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{1}{2} - u + \frac{1}{2} u^2 \right) du =$$

$$25 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} u^2 \right) du = \frac{25}{2} \left[u - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{25}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{25}{2} \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

Esercizio 9



Si ha $p_3(D) = [1,2]$ e per ogni $z \in [1,2]$ si ha

$$D(z) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq z \}$$

Si ha quindi

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \left(\iint_{D(z)} z^2\,dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_1^2 z^2 \left(\iint_{D(z)} dx\,dy \right) dz = \int_1^2 z^2\, \text{mis}(D(z))\,dz =$$

$$= \int_1^2 z^2 \pi z\,dz = \pi \int_1^2 z^3\,dz = \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_1^2 = \frac{\pi}{4}(16-1) = \frac{15}{4}\pi$$