Analisi Matematica 2 - 14/7/14 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \sin((xy)^z) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy\, dx \ ,$$

   dove Γ è l'arco semplice

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-2)^2 + y^2 = 4,\ (x-4)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\} \ ,$$

   orientato in modo tale che $(4,0)$ sia il punto iniziale (non è necessario semplificare il risultato).
   Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

   Suggerimento. Si parametrizzi l'arco di circonferenza in modo canonico $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$, determinando dove varia il parametro t.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xye^{x^2y}\,dx + x^2e^{x^2y}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S z\,ds\ ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + \frac{z}{2} = 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x + 2y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{1+t+t^2}\, dt\ ,$$

calcolare la derivata di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+1} y + x \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq x^2,\ x \geq y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D y\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 14/7/14 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \cos((xz)^y) \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy \, dx \; ,$$

   dove Γ è l'arco semplice

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \; (x-2)^2 + y^2 = 4, \; (x-4)^2 + y^2 \leq 1\right\} \; ,$$

   orientato in modo tale che $\vec{t}(4,0) = (0,1)$ (condizione sul versore tangente nel punto $(4,0)$).
   Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

   Suggerimento. Si parametrizzi l'arco di circonferenza in modo canonico $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{array} \right.$, determinando dove varia il parametro t.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$y^2 e^{xy^2}\, dx + 2xye^{xy^2}\, dy \ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S y\, ds \ ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + \frac{y}{2} + z = 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x - y \geq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 5x - 2y \ ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{x^4}^{x^2} \frac{1}{1-t+t^2}\, dt \,,$$

calcolare la derivata di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+2} y + x + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos(3x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \leq -x^2,\, x \geq y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D x\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, x \geq 0\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.