Analisi Matematica 2 - 14/7/14 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \sin((xy)^z) ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow T\{h\} .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy\, dx ,$$

   dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-2)^2 + y^2 = 4,\ (x-4)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\} ,$$

   orientato in modo tale che $(4,0)$ sia il punto iniziale (non è necessario semplificare il risultato).

   Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

   Suggerimento. Si parametrizzi l'arco di circonferenza in modo canonico $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$, determinando dove varia il parametro t.

   Svolgimento e risposta.

2

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xye^{x^2y}\,dx + x^2e^{x^2y}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S z\,ds\ ,$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + \frac{z}{2} = 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 5x + 2y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 1) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{1+t+t^2}\, dt\,,$$

calcolare la derivata di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+1} y + x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\, dxdy\ ,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y \geq x^2,\ x \geq y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D y\, dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ xy > 0\}$$

b) Per ogni $(x,y,z) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \cos((xy)^z)\, z\, (xy)^{z-1} y =$$

$$= x^{z-1} y^z z \cos((xy)^z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \cos((xy)^z)\, z\, (xy)^{z-1} \cdot x =$$

$$= x^z y^{z-1} \cdot z \cos((xy)^z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos((xy)^z)\,(xy)^z \log(xy) = x^z y^z \cos((xy)^z) \log(xy)$$

Si ha quindi

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) =$$

$$= \left(x^{z-1} y^z z \cos((xy)^z),\ x^z y^{z-1} z \cos((xy)^z),\ x^z y^z \cos((xy)^z)\log(xy)\right)$$

c) Per ogni $(x,y,z) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$df(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (h_1, h_2, h_3) \to$$

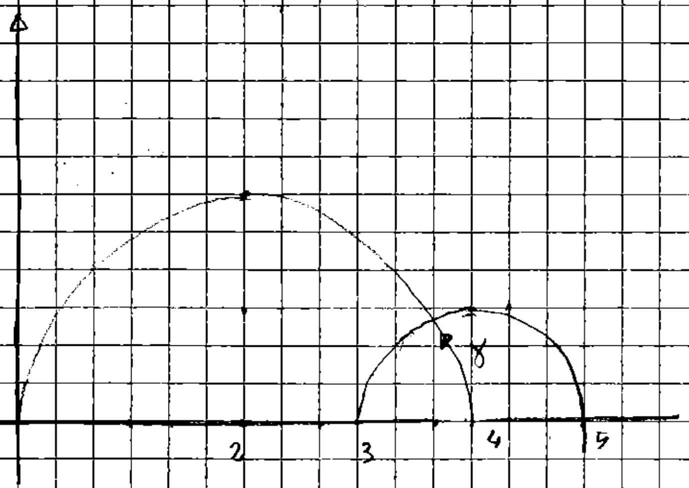
$$x^{z-1} y^z z \cos((xy)^z) h_1 + x^z y^{z-1} z \cos((xy)^z) h_2 + x^z y^z \cos((xy)^z) \log(xy) h_3$$

d) Si ha

$$df(x,y,z) = x^{z-1} y^z z \cos((xy)^z)\, dx +$$

$$+ x^2 y^{z-1} z \cos((xy)^2)\,dy + x^2 y^2 \cos((xy)^2) \log(xy)\, dz$$

Esercizio 2



Determiniamo il punto intersezione fra le due semicirconferenze del semipiano $y \geq 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ e $(x-4)^2 + y^2 = 1$

Il punto soddisfa

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 - (x-4)^2 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 8x + 16) = 3 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} 4x - 12 = 3 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ \left(\frac{15}{4} - 2\right)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ \frac{49}{16} + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y^2 = \frac{15}{16} \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

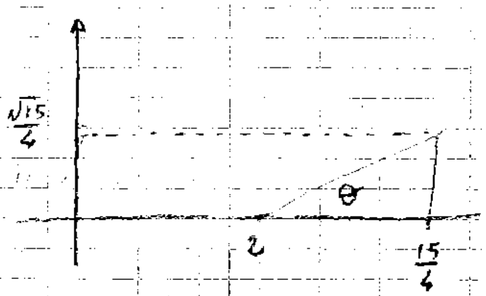
Quindi il punto intersezione delle due semicirconferenze è $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$

Γ è l'arco semplice

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ (x-2)^2 + y^2 = 4 ;\ y \geq 0 ,\ \frac{11}{4} \leq x \leq 4 \right\}$$

orientato da $(4,0)$ a $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$

Sia θ l'angolo al centro della circonferenza $(x-2)^2+y^2=4$ corrispondente all'arco Γ



L'angolo θ è tale che

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{15}{4} - 2} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

Essendo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\theta = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{15}}{7}$$

Una parametrizzazione di Γ è quindi

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{15}}{7} \right]$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma xy\, dx = \int_0^{\operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{15}}{7}} (2 + 2\cos t)\, 2 \sin t\, (-2 \sin t)\, dt =$$

$$= -8\left(\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}} \sin^2 t\, dt + \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}} \sin^2 t \cos t\, dt\right) =$$

$$-8\left(\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt + \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}} \sin^2 t \cos t\, dt\right)$$

$$= \left[-4t + 2\sin(2t) - \frac{8}{3}\sin^3 t\right]_0^{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}} =$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + 2\sin\left(2\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}\right) - \frac{8}{3}\sin^3 \operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + 4\sin\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}\cos\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$- \frac{8}{3}\sin^3 \operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} =$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + 4\,\frac{\operatorname{tg}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}}}\;\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}}}$$

$$- \frac{8}{3}\left(\frac{\operatorname{tg}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\sqrt{15}}{7}}}\right)^3 =$$

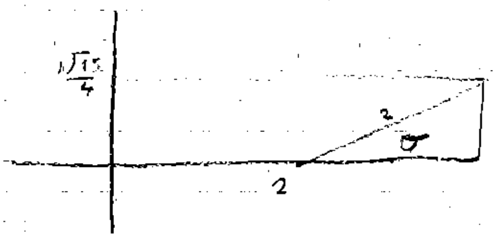
$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + 4\,\frac{\frac{\sqrt{15}}{7}}{\sqrt{1+\frac{15}{49}}}\;\frac{1}{\sqrt{1+\frac{15}{49}}} - \frac{8}{3}\left(\frac{\frac{\sqrt{15}}{7}}{\sqrt{1+\frac{15}{49}}}\right)^3 =$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + 4\,\frac{\frac{\sqrt{15}}{7}}{\frac{64}{49}} - \frac{8}{3}\,\frac{\frac{15}{49}\,\frac{\sqrt{15}}{7}}{\frac{64}{49}\cdot\frac{8}{7}} =$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} + \frac{7}{16}\sqrt{15} - \frac{5}{64}\sqrt{15} =$$

$$= -4\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7} - \frac{23}{64}\sqrt{15}$$

NB 1 L'angolo θ è anche tale che



$$\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Essendo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\theta = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Si ha quindi anche

$$\int_\Gamma xy\,dx = \left[-4t + 2\sin(2t) - \frac{8}{3}\sin^3 t \right]_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 2\sin\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}\right) - \frac{8}{3}\sin^3 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 4\sin\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^3 =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + 4\frac{\sqrt{15}}{8}\sqrt{1-\sin^2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}} - \frac{8}{3}\,\frac{15}{64}\,\frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{1-\frac{15}{64}} - \frac{5}{64}\sqrt{15} =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{2}\,\frac{7}{8} - \frac{5}{64}\sqrt{15} =$$

$$= -4\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{23}{64}\sqrt{15}$$

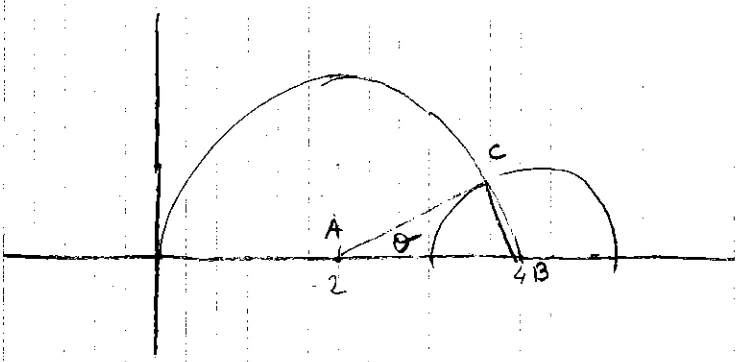
Per ogni $x \in]-1,1[$ si ha $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Quindi si ha

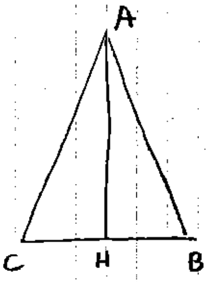
$$\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8} = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}}{\sqrt{1-\frac{15}{64}}} = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}}{\frac{7}{8}} = \operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{15}}{7}$$

Il risultato ottenuto si riconduce quindi al precedente

NB 2



Il triangolo ABC è isoscele, di lato $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ e di base $\overline{CB} = 1$. Si ha



$$\overline{CH} = \overline{CA} \sin\frac{\theta}{2} \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1}{2} = 2 \sin\frac{\theta}{2} \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$$

Essendo $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}$

quindi $\theta = 2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}$

Si ha quindi anche

$$\int_\Gamma x y \, dx = \left[-4t + 2\sin(2t) - \frac{8}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}}$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + 2\sin\left(4\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right) - \frac{8}{3}\sin^3\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + 4\sin\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right)\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right)$$

$$- \frac{8}{3}\sin^3\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + 8\sin\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} \cdot \left(1 - 2\sin^2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{8}{3}\left(2\sin \operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\cos \operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}\right)^3 =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + 8\,\frac{1}{4}\sqrt{1-\sin^2 \operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}}\cdot\left(1 - 2\,\frac{1}{16}\right)$$

$$-\frac{8}{3}\left(2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{1-\sin^2 \operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}}\right)^3 =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + 2\,\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{7}{8} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3 =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\sqrt{15} - \frac{8}{3}\,\frac{15}{8^3}\sqrt{15} =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\sqrt{15} - \frac{5}{64}\sqrt{15} =$$

$$= -8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} - \frac{23}{64}\sqrt{15}$$

Per $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Si ha quindi

$$2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4} = \operatorname{Arcsin}\left(2\,\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{16}}\right) =$$

$$= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{8}$$

Il risultato ottenuto si riconduce quindi ai precedenti

Esercizio 3

Si tratta di una forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2$

Sia

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow e^{x^2 y}$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2 y}\, 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2 y}\, x^2$$

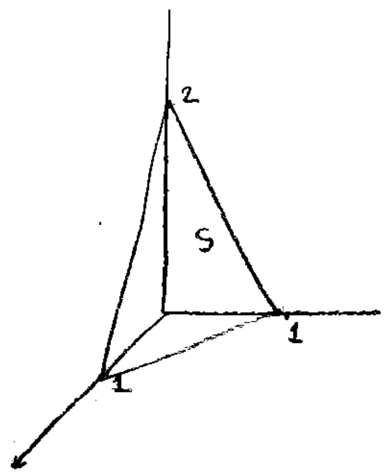
Quindi f è una primitiva della forma differenziale.

Quindi la forma differenziale è esatta

L'insieme delle primitive è

$$\{ f + c \,;\ c \in \mathbb{R} \}$$

Esercizio 4



Sia $T = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1 \}$

Una parametrizzazione di S è la φ:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2(1-u-v) \end{cases}$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

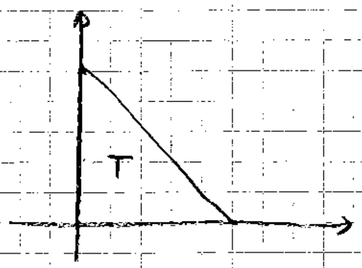
Si ha quindi

$$E(u,v) = 5 \ ,\ F(u,v) = 4 \ ,\ G(u,v) = 5$$

$$\sqrt{E(u,v)\, G(u,v) - (F(u,v))^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

Si ha quindi

$$\iint_S z \, dS = \iint_T 2(1-u-v) \cdot 3 \, du\, dv = 6 \iint_T (1-u-v)\, du\, dv$$



Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni u

$u \in [0,1]$, $T(u) = [0, 1-u]$

Si ha quindi

$$6 \iint_T (1-u-v)\, du\, dv = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)\, dv \right) du =$$

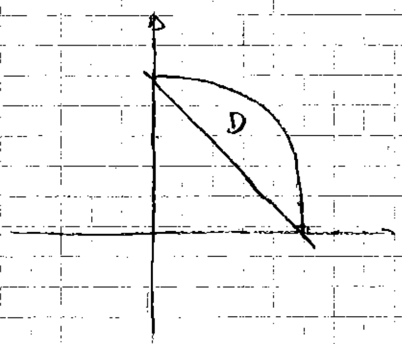
$$= 6 \int_0^1 \left[v - uv - \frac{1}{2} v^2 \right]_0^{1-u} du =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(1-u - u(1-u) - \frac{1}{2}(1-u)^2\right) du =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - u + \frac{1}{2} u^2 \right) du = 3 \int_0^1 (1 - 2u + u^2)\, du =$$

$$= 3 \left[u - u^2 + \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 = 3 \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = 1$$

Esercizio 4



a) Sia D il dominio di f. Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f.

Sia $(x,y) \in \mathring{D}$. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5 \neq 0$

Si ha quindi

$E \cap \mathring{D} = \emptyset$

Sia

$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0\}$

$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1,\ x>0,\ y>0$

$F_3 = \{(1,0)\}$

$F_4 = \{(0,1)\}$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$

Identifichiamo f con la funzione

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to 5x+2y$

Sia

$g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0, y>0\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \to x^2+y^2-1$

F_1 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y)=0$

Se $(x,y) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\text{grad} f(x,y) = \lambda \text{ grad } g(x,y)$

cioè tale che

$(5,2) = \lambda(2x,2y)$

Si ha

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo

$\lambda \neq 0$. Si ha $x = \dfrac{5}{2\lambda}$, $y = \dfrac{1}{\lambda}$; quindi

$\left(\dfrac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$; quindi $\lambda^2 = \dfrac{29}{\lambda^2}$;

quindi $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

Per $\lambda = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$ si ha $x = \dfrac{5}{29}\sqrt{29}$, $y = \dfrac{2}{29}\sqrt{29}$

quindi $(x,y) = \left(\dfrac{5}{29}\sqrt{29}, \dfrac{2}{29}\sqrt{29}\right)$

Per $\lambda = -\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ si ha $x = -\dfrac{5}{29}\sqrt{29} < 0$; incompatibile con $x > 0$.

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{\left(\frac{5}{29}\sqrt{29}, \frac{2}{29}\sqrt{29}\right)\right\}$$

Sia

$h: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x>0, y>0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \to 1-x-y$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $h(x,y)=0$

Se $(x,y) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} h(x,y)$$

cioè tale che

$$(5,2) = \lambda(-1,-1)$$

Si ha $5 = -\lambda$; quindi $\lambda = 5$; si ha $2 = -\lambda$; quindi $\lambda = -2$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si ha quindi

$E \subset \left\{ \left(\frac{5}{29}\sqrt{29}, \frac{2}{29}\sqrt{29} \right), (1,0), (0,1) \right\}$

Si ha

$$f\left(\frac{5}{29}\sqrt{29}, \frac{2}{29}\sqrt{29} \right) = \frac{25}{29}\sqrt{29} + \frac{4}{29}\sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$f(1,0) = 5$

$f(0,1) = 2$

Si ha $2 < 5 < \sqrt{29}$

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{29}$, $\min(f) = 2$

Esercizio 6

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4+x^8} 4x^3 - \frac{1}{1+x^2+x^4} \cdot 2x =$$

$$= \frac{4x^3}{1+x^4+x^8} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$$

Esercizio 7

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine, definita su $\mathbb{R} - \{-1\}$

Possiamo supporre $x \in]-1, +\infty[$

Una primitiva di $\frac{1}{x+1}$ è $\alpha(x) = \log(x+1)$

Si ha

$$e^{-\alpha(x)} x = e^{-\log(x+1)} \cdot x = \frac{x}{x+1}$$

Si ha

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$= x - \log(x+1)$

Una primitiva di $e^{-\alpha(x)} \cdot x$ è quindi $\beta(x) = x - \log(x+1)$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è quindi dato da

$$y(x) = e^{\log(x+1)} (x - \log(x+1) + c) =$$

$$= (x+1)\left(x - \log(x+1) + c\right) = c(x+1) + x^2 + x - (x+1)\log(x+1)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$

Per $x = 0$ si ha $\quad 0 = c$, cioè $c = 0$.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},\ x \rightarrow x^2 + x - (x+1)\log(x+1)$$

Esercizio 8

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = \pm 2i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos(2x), \quad \varphi_2(x) = \sin(2x)$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\varphi(x) = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$$

$$\varphi'(x) = A\cos(2x) - 2Ax\sin(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x)$$

$$\varphi''(x) = -2A\sin(2x) - 2A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$+ 2B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x) =$$

$$= -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$$

La funzione φ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$$

$$+ 4Ax\cos(2x) + 4Bx\sin(2x) = \sin(2x)$$

cioè se e solo se

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = \sin(2x)$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ B = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Si ha

$$y'(x) = -2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x)$$

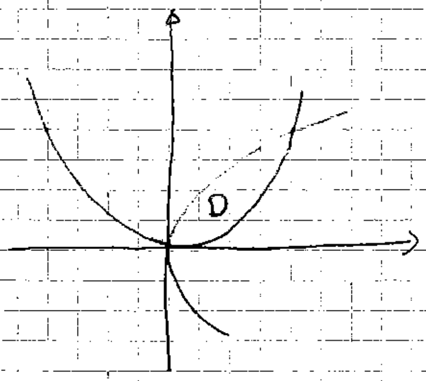
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

Esercizio 9



Si ha $p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$D(x) = [x^2, \sqrt{x}]$$

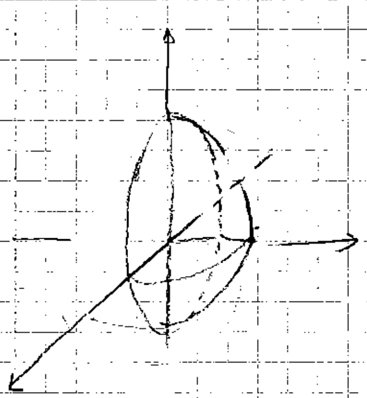
Si ha quindi

$$\iint_D x \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^3)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Esercizio 9



Una parametrizzazione in misura di D è la funzione α

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad (\rho, \varphi, \theta) \in [0,1] \times [0,\pi] \times [0,\pi] \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Per ogni $(\rho, \varphi, \theta) \in \operatorname{dom}(\alpha)$ si ha

$$|\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin\varphi$$

Si ha quindi

$$\iiint_D y \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} \rho \sin\varphi \sin\theta \; \rho^2 \sin\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin^2\varphi\right) d\varphi \cdot \left(\int_0^\pi \sin\theta\right) d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \cdot \int_0^\pi \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} d\varphi \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_0^\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{4}$$