Analisi Matematica 2 - 8/9/14

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = (x^y, y^x)\ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}\ .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z\, dx \wedge dy\ ,$$

dove S è il triangolo di vertici $(1,3,5)$, $(4,1,0)$, $(7,2,1)$ orientato in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma y^2 \, ds \, ,$$

dove

$$\gamma = [(0,0),(2,2)] \cup \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2=8,\ y \geq 0, y \leq x \right\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ y \leq x\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 3x+2y \, ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = x\log(x-y) \; ;$$

(a) determinare il dominio di f;

(b) determinare e classificare gli estremanti relativi di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}_+$; trovare in funzione di α, in forma reale, tutte le soluzioni di

$$y'' + \alpha y = e^{\alpha x} .$$

Suggerimento. Si considerino i casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy\,,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4,\ -1 \leq x \leq 1,\ y \geq 0\}\,.$$

Suggerimento. Si utilizzino le simmetrie.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D x\,dxdydz\,,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2, x \geq 0,\ y \geq 0\}\,.$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in R^2;\ x>0,\ y>0\}$$

b) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(y\,x^{y-1},\ y^x \log y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(x^y \log x,\ x\,y^{x-1}\right)$$

Si ha quindi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\,x^{y-1} & x^y \log x \\ y^x \log y & x\,y^{x-1} \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f'(x,y) : R^2 \longrightarrow R^2,\ (h_1,h_2) \rightarrow \Big(y\,x^{y-1}h_1 + x^y(\log x)h_2,$$

$$y^x(\log y)h_1 + x\,y^{x-1}h_2\Big)$$

Esercizio 2

Sia

$$T = \{(u,v) \in R^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\}$$

I punti di S sono dati da

$$(x,y,z) = u(1,3,5) + v(4,1,0) + (1-u-v)(7,2,1)$$

al variare di $(u,v) \in T$

Una parametrizzazione di S non orientata è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = -6u - 3v + 7 \\ y = u - v + 2 \\ z = 4u - v + 1 \end{cases} \qquad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha

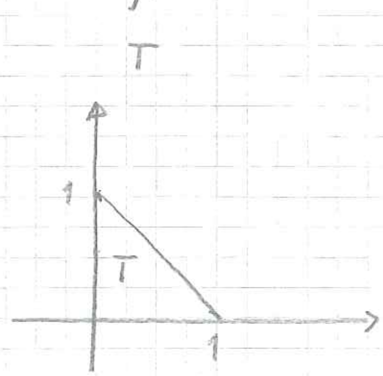
$$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9 > 0$$

Quindi φ è concorde con l'orientazione di S

Si ha quindi

$$\iint_S z \, dx \wedge dy = \iint_T (4u - v + 1) \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} du \, dv =$$

$$= 9 \iint_T (4u - v + 1) \, du \, dv$$



Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ e per ogni $u \in [0, 1]$, si ha

$$T(u) = [0, 1 - u]$$

Si ha quindi

$$9 \iint_T (4u - v + 1) \, du \, dv = 9 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (4u - v + 1) \, dv \right) du =$$

$$= 9 \int_0^1 \left[4uv - \frac{1}{2} v^2 + v \right]_0^{1-u} du =$$

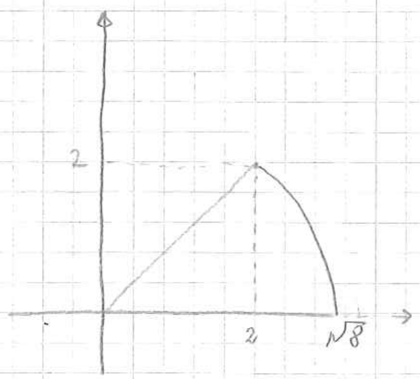
$$= 9 \int_0^1 \left(4u(1-u) - \frac{1}{2}(1-u)^2 + 1 - u \right) du =$$

$$= 9 \int_0^1 \left(4u - 4u^2 - \frac{1}{2} + u - \frac{1}{2}u^2 + 1 - u \right) du =$$

$$= 9 \int_0^1 \left(-\frac{9}{2}u^2 + 4u + \frac{1}{2} \right) du =$$

$$= 9 \left[-\frac{3}{2}u^3 + 2u^2 + \frac{1}{2}u \right]_0^1 = 9\left(-\frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} \right) = 9 \cdot 1 = 9$$

Esercizio 3



Sia $\gamma_1 = [(0,0), (2,2)]$ e

$\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 8,\ y \geq 0,\ y \leq x\}$

Si ha

$$\int_\gamma y^2 ds = \int_{\gamma_1} y^2 ds + \int_{\gamma_2} y^2 ds$$

Una parametrizzazione di γ_1 è la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,2]$$

Per ogni $t \in [0,2]$, si ha $\varphi'(t) = (1,1)$; quindi

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma_1} y^2\, ds = \int_0^2 t^2 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Una parametrizzazione di γ_2 è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ si ha $\varphi'(t) = (-2\sqrt{2}\sin t, 2\sqrt{2}\cos t)$;

quindi $\|\varphi'(t)\| = 2\sqrt{2}$

Si ha quindi

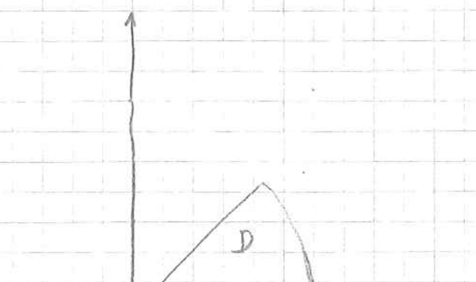
$$\int_{\gamma_2} y^2\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^2 t\; 2\sqrt{2}\, dt = 16\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt =$$

$$= 8\sqrt{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi - 4\sqrt{2}$$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma} y^2\, ds = \frac{8}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Esercizio 4



a) Sia $D = \mathrm{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f

Sia $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$; si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \neq 0$. Si ha quindi

$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$

Sia $F_1 = \{ (x,y) \in R^2 ;\ x^2+y^2 = 1,\ y>0 \ \ y<x \}$

$F_2 = \{ (x,y) \in R^2 ;\ y = 0 \ ;\ 0<x<1 \}$

$F_3 = \{ (x,y) \in R^2 ;\ y = x \ ,\ y>0,\ x^2+y^2<1 \}$

$F_4 = \{ (0,0) \}$

$F_5 = \{ (1,0) \}$

$F_6 = \{ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6$

Identifichiamo f con la funzione

$$R^2 \longrightarrow R, \quad (x,y) \to 3x+2y$$

Sia $g : \{ (x,y) \in R^2 ; y>0,\ y<x \} \longrightarrow R,\ (x,y) \Rightarrow x^2+y^2-1$

F_1 è una sottovarietà differenziale di R^2 di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y)=0$

Sia $(x,y) \in F_1 \cap E$; per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\text{grad} f(x,y) = \lambda \ \text{grad}\, g(x,y)$$

cioè tale che

$$(3,2) = \lambda (2x, 2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \\ y>0 \\ y<x \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$x = \frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$; quindi

$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$; quindi

$\frac{13}{4\lambda^2} = 1$; quindi $\lambda^2 = \frac{13}{4}$; quindi $\lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x = \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$y = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

Si ha $y > 0$ e $y < x$; quindi $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

è una soluzione del sistema

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $y = -\frac{2\sqrt{13}}{13} < 0$; non si ottiene quindi alcuna soluzione del sistema.

Si ha quindi

$E \cap F_1 \subset \left\{\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)\right\}$

Sia $h : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to y$

F_2 è una sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, di equazione cartesiana $h(x,y) = 0$

Sia $(x,y) \in E \cap F_2$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} h(x,y)$

cioè tale che

$(3,2) = \lambda (0,1)$

Si trova $3=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$E \cap F_2 = \emptyset$

Sia $k: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ y>0\},\ (x,y) \to x-y$

F_3 è una sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $k(x,y)=0$

Sia $(x,y) \in F_3 \cap E$; per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} k(x,y)$

cioè tale che

$(3,2) = \lambda(1,-1)$

Si trova $\lambda = 3$ e $\lambda = -2$; ciò è assurdo; si ha quindi

$E \cap F_3 = \emptyset$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right), (0,0), (1,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{9\sqrt{13}}{13} + \frac{4\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}$$

$f(0,0) = 0$

$f(1,0) = 3$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Si ha $3 < \sqrt{13}$.

Si ha $\frac{5}{2}\sqrt{2} < \sqrt{13}$ se e solo se $5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$, cioè se e solo se $25 \cdot 2 < 4 \cdot 13$, cioè se e solo se $50 < 52$; ciò è vero; quindi $\frac{5}{2}\sqrt{2} < \sqrt{13}$

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{13}$, $\min(f) = 0$

Esercizio 5

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y>0\}$$

b) Sia $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x-y) + \frac{x}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{x-y}$$

I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log(x-y) + \dfrac{x}{x-y} = 0 \\ -\dfrac{x}{x-y} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trova $x=0$; si ha quindi $\log(x-y)=0$; quindi $x-y=1$; quindi, essendo $x=0$, $y=-1$; f ammette quindi un solo punto critico dato da $(0,-1)$

Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x-y} + \frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} - \frac{y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}(x,y) = \frac{x(-1)}{(x-y)^2} = -\frac{x}{(x-y)^2}$$

Si ha quindi

$$\mathcal{H}f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Quindi $(0,-1)$ è un punto di sella; quindi f non ammette estremanti relativi

Esercizio 6

L'equazione differenziale è a variabili separabili definite per $x \in R$ e $y \in R_+^*$

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in R,\ y > 0$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt[4]{y}\ y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} ,\ x \in R,\ y > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $y(x)$ tale che $0 \in dom(y)$

$$\int_1^y \sqrt[4]{t}\, dt = \int_0^x dt \quad ,\ x \in R,\ y > 0$$

Quindi

$$\left[\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \right]_1^y = x , \quad x \in R, \; y > 0 , \quad \text{cioè}$$

$$\frac{4}{5} \left(y^{\frac{5}{4}} - 1 \right) = x , \quad x \in R, \; y > 0 , \quad \text{cioè}$$

$$y^{\frac{5}{4}} - 1 = \frac{5}{4} x , \quad x \in R, \; y > 0 , \quad \text{cioè}$$

$$y^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} x + 1, \; x \in R , \; y > 0$$

Si ha $\frac{5}{4} x + 1 > 0$, cioè $x > -\frac{4}{5}$

L'equazione implicita sopra è equivalente a

$$y^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} x + 1 , \quad x > -\frac{4}{5}, \; y > 0 , \quad \text{cioè a}$$

$$y = \left(\frac{5}{4} x + 1 \right)^{\frac{4}{5}} , \quad x > -\frac{4}{5} , \; y > 0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : \left] -\frac{4}{5}, +\infty \right[\rightarrow R, \quad x \rightarrow \left(\frac{5}{4} x + 1 \right)^{\frac{4}{5}}$$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + \alpha = 0$$

Supponiamo $\alpha > 0$.

L'equazione ha radici $\lambda = \pm \sqrt{\alpha}\, i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos(\sqrt{\alpha}\, x) , \quad \varphi_2(x) = \sin(\sqrt{\alpha}\, x)$$

Non essendo α soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(x) = A e^{\alpha x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\varphi'(x) = \alpha A e^{\alpha x}$$

$$\varphi''(x) = \alpha^2 A e^{\alpha x}$$

Quindi φ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$\alpha^2 A e^{\alpha x} + \alpha A e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

cioè se e solo se

$A(\alpha^2+\alpha) = 1$; si ha $\alpha^2+\alpha > 0$; quindi si ha

$A(\alpha^2+\alpha)=1$ se e solo se $A = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha}$

Si ha quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha^2+\alpha} e^{\alpha x}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}\, x) + \frac{1}{\alpha^2+\alpha} e^{\alpha x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$

Supponiamo $\alpha = 0$. Si ha l'equazione $y'' = 1$

L'equazione caratteristica ha soluzione

$\lambda = 0$ doppia

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$\varphi_1(x) = 1, \qquad \varphi_2(x) = x$

Essendo 0 soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = Ax^2$ è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$\varphi'(x) = 2Ax$

$\varphi''(x) = 2A.$

Quindi φ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$2A = 1$, cioè $A = \frac{1}{2}$

Si ha quindi

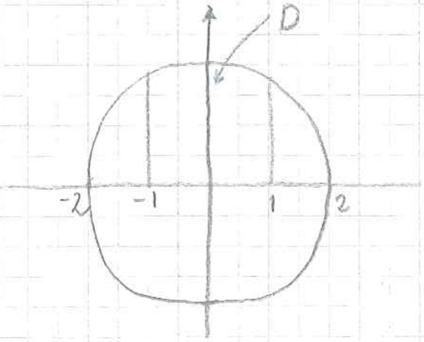
$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$

Esercizio 8



Si ha

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D x\,dx\,dy + \iint_D y\,dx\,dy$$

L'insieme D è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione $f(x,y)=x$ assume in punti simmetrici valori opposti

Si ha quindi

$$\iint_D x\,dx\,dy = 0$$

Quindi

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy$$

Si ha $p_1(D)=[-1,1]$ e per ogni $x\in[-1,1]$ si ha

$$D(x)=\left[0,\sqrt{4-x^2}\,\right]$$

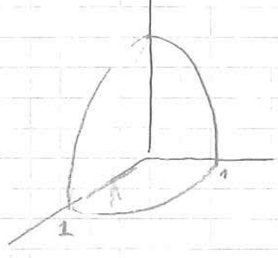
Si ha quindi

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\right)dx =$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4-x^2)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{3}+4-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

Esercizio 9



Sia $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

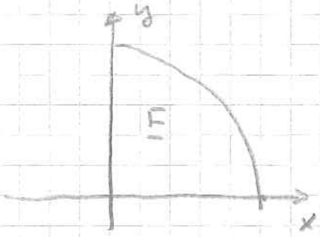
Si ha $P_{1,2}(D)=E$ e per ogni

$(x,y)\in E$ si ha $D(x,y)=[0,\ 1-x^2-y^2]$

Si ha quindi

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \iint_E \left(\int_0^{1-x^2-y^2} x\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_E x\,(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$



Una parametrizzazione di E è la funzione α

$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in [0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Per ogni $(\rho, t) \in E$ si ha $|\det \alpha'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\iint_E x\,(1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \rho\cos t\,(1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,dt =$$

$$= \left(\int_0^1 \rho^2(1-\rho^2)\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt\right) =$$

$$\left(\int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)\,d\rho\right) \cdot \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left[\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5\right]_0^1 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$