

Analisi Matematica 2 - 8/1/15

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 y, x - y + z, xz) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 0, 2)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 0, 2)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 0, 2)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 0, 2))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int \int_S y \, ds ,$$

dove

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \right\} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_{\Gamma} x \, dy ,$$

dove Γ è la curva

$$\{x, y\} \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\} ,$$

orientata in modo che $\vec{t}(0, 1) = (1, 0)$.

La verifica dell'orientazione può essere svolta a livello intuitivo.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x - 4y + z ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

5. (p. 2) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (curva)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 10 - y^2\}$$

nel punto $(1, 3)$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = 5 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D y \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 \leq y \leq 1 - x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D y \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, -y \leq x \leq y\} .$$

Suggerimento. Si usino le coordinate sferiche, avendo presente nel piano la posizione della regione $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; -y \leq x \leq y\}$.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2xy, 1, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x^2, -1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, 1, x)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f'(1, 0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f'(1, 0, 2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (h_1, h_2, h_3) \mapsto (h_2, h_1 - h_2 + h_3, 2h_1 + h_3)$$

b) Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1 \neq 0$$

Quindi esiste U intorno di $(1, 0, 2)$ tale che

$$U \rightarrow f(U), (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

è un diffeomorfismo

2

c) Si ha $f(1, 0, 2) = (0, 3, 2)$. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$(f^{-1})'(0, 3, 2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (K_1, K_2, K_3) \rightarrow (-K_1 - K_2 + K_3, K_1, 2K_1 + 2K_2 - K_3)$$

Esercizio 2

Si ha

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, \frac{u}{2} + v \leq 1 \right\}$$

Una parametrizzazione di S è la funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3 - \frac{3}{2}u - 3v \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$E(u, v) = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

$$F(u, v) = \frac{9}{2}$$

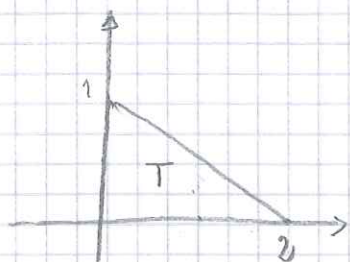
$$G(u, v) = 1 + 9 = 10$$

Si ha quindi

$$\sqrt{E(u,v)G(u,v) - (F(u,v))^2} = \sqrt{\frac{130}{4} - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

Si ha quindi

$$\iint_S y \, ds = \iint_T v \frac{7}{2} \, du \, dv = \frac{7}{2} \iint_T v \, du \, dv$$



Si ha $p_1(T) = [0, 2]$ e per ogni

$u \in [0, 2]$ si ha

$$T(u) = \left[0, \frac{2-u}{2} \right]$$

Si ha quindi

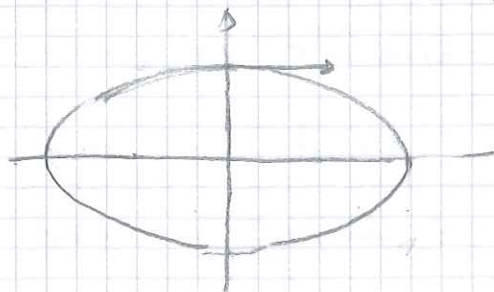
$$\frac{7}{2} \iint_T v \, dv \, du = \frac{7}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-u}{2}} v \, dv \right) du =$$

$$= \frac{7}{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^{\frac{2-u}{2}} du =$$

$$= \frac{7}{4} \int_0^2 \left(\frac{2-u}{2} \right)^2 du = \frac{7}{16} \int_0^2 (2-u)^2 du = \frac{7}{16} \left[-\frac{1}{3} (2-u)^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{7}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{7}{6}$$

Esercizio 3



Una parametrizzazione in senso di
S non orientata è
data da

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha $\varphi(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\varphi'(t) = (-2 \sin t, \cos t)$

quindi $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$.

Il vettore tangente in $(0, 1)$ con Γ orientata
tramite φ è quindi

$$\frac{\varphi'(\frac{\pi}{2})}{\|\varphi'(\frac{\pi}{2})\|} = (-1, 0)$$

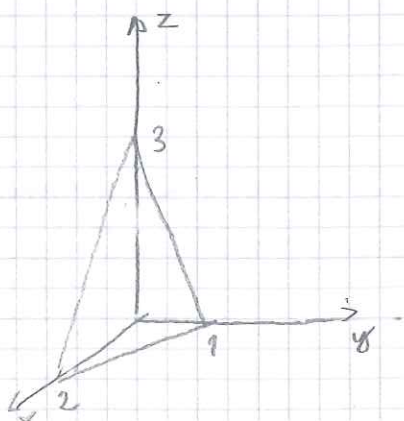
quindi φ è una parametrizzazione di $-\Gamma$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x dy &= - \int_{-\Gamma} x dy = - \int_0^{2\pi} 2 \cos t \cos t dt = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \end{aligned}$$

$$= - \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

Esercizio 4



a) Sia D il dominio di f

Essendo D compatto ed essendo
 f continua, per il teorema
di Weierstrass, f ammette massimo

c) minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

$$\text{Sia } (x, y, z) \in D^0 ; \text{ si ha } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z=0, x>0, y>0, \frac{x}{2} + y < 1 \}$$

$$F_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y=0, x>0, z>0, \frac{x}{2} + \frac{z}{3} < 1 \}$$

$$F_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x=0, y>0, z>0, y + \frac{z}{3} < 1 \}$$

$$F_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 0, x>0, y>0, z>0 \}$$

$$F_5 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y=0, z=0, 0 < x < 2 \}$$

$$F_6 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x=0, z=0, 0 < y < 1 \}$$

$$F_7 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x=0, z=0, 0 < z < 3 \}$$

$$F_8 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z=0, \frac{x}{2} + y = 1, x>0, y>0 \}$$

$$F_9 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y=0, \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1, x>0, z>0 \}$$

$$F_{10} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x=0, y + \frac{z}{3} = 1, y>0, z>0 \}$$

$$F_{11} = \{ (0, 0, 0) \}$$

$$F_{12} = \{ (2, 0, 0) \}$$

$$F_{13} = \{ (0, 1, 0) \}$$

$$F_{14} = \{ (0, 0, 3) \}$$

Si ha

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14}$$

6
Si identifica f con

$$R^3 \rightarrow R, (x, y, z) \rightarrow 3x - 4y + z$$

Si ha

$$g: \left\{ (x, y, z) \in R^3, x > 0, y > 0, \frac{x}{2} + y < 1 \right\} \rightarrow R, (x, y, z) \rightarrow z$$

F_1 è la sottovarietà differenziabile di R^3 di dimensione 2, di equazione contenente $g(x, y, z) = z$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(3, -4, 1) = \lambda(0, 0, 1)$$

Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset$$

Si ha ora

$$g: \left\{ (x, y, z) \in R^3; x > 0, z > 0, \frac{x}{2} + \frac{z}{3} < 1 \right\} \rightarrow R, (x, y, z) \rightarrow y$$

F_2 è la sottovarietà differenziabile di R^3 di dimensione 2, di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_2 \cap E$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in R$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(3, -4, 1) = \lambda(0, 1, 0)$$

Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si è ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x=0, y>0, z>0, y + \frac{z}{3} < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x$$

F_3 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_3$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(3, -4, 1) = \lambda (1, 0, 0)$$

Si ha $-4 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_3 = \emptyset$$

Si è ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x>0, y>0, z>0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} - 1$$

F_4 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_4$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(3, -4, 1) = \lambda \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3} \right)$$

Si ha $3 = \frac{\lambda}{2}$ e $-4 = \lambda$; quindi $\lambda = 6$ e $\lambda = -4$;

ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_4 = \emptyset$$

Si è ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < x < 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \rightarrow (y, z)$$

F_5 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1, di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_5 \cap E$, per il teorema di moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(3, -4, 1) = \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha $3 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_5 = \emptyset$$

Si è ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x, z)$$

F_6 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1, di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_6 \cap E$, per il teorema di moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z),$$

cioè tali che

$$(3, -4, 1) = \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha $-4 = 0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_6 = \emptyset$$

Si è ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < 3\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1, di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_2 \cap E$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
 $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$
 cioè tale che

$$(3, -4, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo; ne consegue quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (z, \frac{x}{2} + y - 1)$$

F_2 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 1, di equazione contenuta a $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_2 \cap E$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
 $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$
 cioè tali che

$$(3, -4, 1) = \lambda(0, 0, 1) + \mu(\frac{1}{2}, 1, 0)$$

Si ha $3 = \frac{1}{2}\mu$ e $-4 = \mu$; quindi $\mu = 6$ e $\mu = -4$;

ciò è assurdo; ne consegue quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (y, \frac{x}{2} + \frac{z}{3} - 1)$$

F_g è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 1, di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_g$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
 $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$
 cioè tali che

$$(3, -4, 1) = \lambda (0, 1, 0) + \mu \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3} \right)$$

Si ha $3 = \frac{1}{2} \mu$ e $1 = \frac{1}{3} \mu$; quindi $\mu = 6$ e $\mu = 3$;

ciò è assurdo; ne ha quindi

$$E \cap F_g = \emptyset$$

Si ha ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \left(x, y + \frac{z}{3} - 1\right)$$

F_{g_0} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1, di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_{g_0}$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
 $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$
 cioè tali che

$$(3, -4, 1) = \lambda (1, 0, 0) + \mu \left(0, 1, \frac{1}{3} \right)$$

Si ha $-4 = \mu$ e $1 = \frac{1}{3} \mu$; quindi $\mu = -4$ e

$\mu = 3$; ciò è assurdo; ne ha quindi

$$E \cap F_{g_0} = \emptyset$$

Si ha quindi

$$E \subset F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14} = \{(0,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,0,3)\}$$

Si ha

$$f(0,0,0) = 0$$

$$f(2,0,0) = 6$$

$$f(0,1,0) = -4$$

$$f(0,0,3) = 3$$

Si ha quindi $\max(f) = 6$, $\min(f) = -4$

Esercizio 5

Si ha

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y^2 - 10$$

S è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1
di equazione $g(x,y) = 0$

Si ha

$$\text{grad } g(x,y) = (1, 2y)$$

Quindi

$$\text{grad } g(1,3) = (1, 6)$$

Una base dello spazio normale a S in $(1,3)$
è $\{(1,6)\}$

Quindi delle equazioni parametriche
dello spazio normale sono

$$(x,y) = t(1,6), \quad t \in \mathbb{R}$$

caso 1

$$\begin{cases} x = t \\ y = 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni parametriche della retta normale sono quindi:

$$(x, y) = t(1, 6) + (1, 3), \quad t \in \mathbb{R}$$

caso 2

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 6t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$(x, y) \cdot (1, 3) = 0$$

caso 3

$$x + 3y = 0$$

Delle equazioni cartesiane della retta tangente sono

$$(x, y) - (1, 3) \cdot (1, 6) = 0$$

caso 4

$$x - 1 + 6(y - 3) = 0$$

caso 5

$$x + 6y - 19 = 0$$

Esercizio 6

Il problema di Cauchy si scrive

$$\begin{cases} y' = e^x e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale quindi è a variabili separabili e definita per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Il problema di Cauchy è equivalente a

$$\begin{cases} e^{-y} y' = e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita, con soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_0^y e^{-t} dt = \int_0^x e^t dt, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\left[-e^{-t} \right]_0^y = \left[e^t \right]_0^x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

cioè

$$1 - e^{-y} = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

cioè

$$e^{-y} = 2 - e^x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Si ha $2 - e^x > 0$, cioè $e^x < 2$, cioè $x < \log 2$

L'equazione sopra è quindi equivalente a

$$e^{-y} = 2 - e^x, \quad x < \log 2, y \in \mathbb{R},$$

cioè a

$$y = -\log(2 - e^x), \quad x < \log 2, \quad y \in \mathbb{R}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi:]-\infty, \log 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\log(2 - e^x)$$

Esercizio 7

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0, \quad \text{cioè}$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0, \quad \text{cioè}$$

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ semplice e $\lambda = 1$ doppia

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^x, \quad \varphi_3(x) = x e^x$$

Essendo 0 soluzione dell'equazione caratteristica, esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = Ax$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = A, \quad \psi''(x) = 0, \quad \psi'''(x) = 0$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$A = 5$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = 5x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + 5x$$

Si ha

$$y'(x) = C_2 e^x + C_3 e^x + C_3 x e^x + 5 = (C_2 + C_3) e^x + C_3 x e^x + 5$$

$$y''(x) = (C_2 + C_3) e^x + C_3 e^x + C_3 x e^x = (C_2 + 2C_3) e^x + C_3 x e^x$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_2 + C_3 + 5 = 0 \\ C_2 + 2C_3 = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} C_2 = -2C_3 \\ -2C_3 + C_3 + 5 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} C_3 = 5 \\ C_2 = -10 \\ C_1 = 10 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = 10 - 10e^x + 5xe^x + 5x$$

Esercizio 8

Le intersezioni delle parabole

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 1 - x^2$$

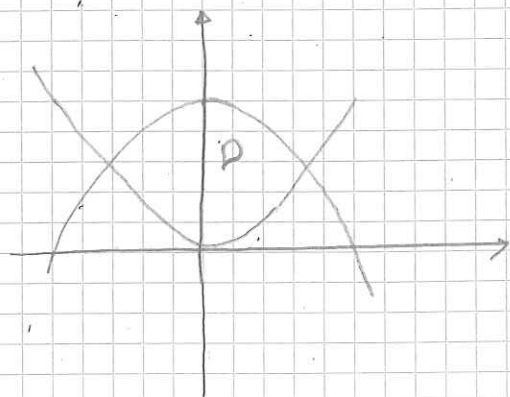
sono le soluzioni di

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

Si ha

$$x^2 = 1 - x^2; \quad \text{quindi}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$



quindi $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha quindi $p_1(D) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ e per ogni $x \in p_1(D)$

$$D(x) = [x^2, 1-x^2]$$

Si ha quindi

$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} y \, dy \right) dx =$$

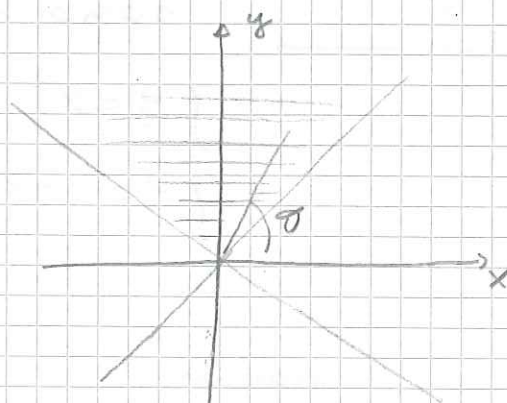
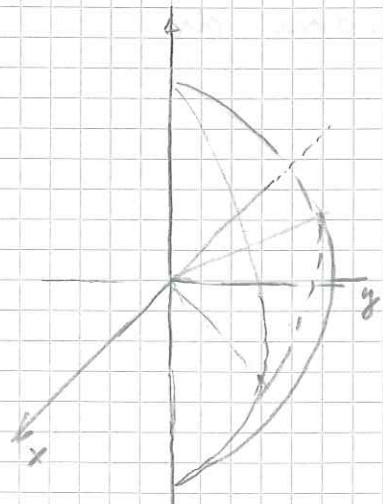
$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1-x^2)^2 - x^4) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2 + x^4 - x^4) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{2}{3} x^3 \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) =$$

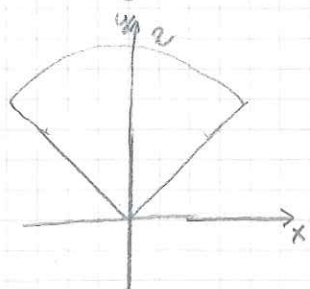
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{2}$$

Esercizio 9



Tenendo conto che la proiezione di D sul piano xy è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}$$



e che quindi si ha $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$

una parametrizzazione in misure di D è la funzione α

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (\rho, \varphi, \theta) \in [0, 2] \times [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$$

Per ogni $(\rho, \varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha $|\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \varphi$
 si ha quindi

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0, 2] \times [0, \pi] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]} \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin \theta \, d\theta \right) =$$

$$\left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \, d\varphi \left[-\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$$