Analisi Matematica 2 - 23/1/15 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = \operatorname{Arctg} x^y ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy\, dx ,$$

   dove Γ è l'arco semplice.

$$\{x, y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-4)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\} ,$$

   orientata in modo che $(3,0)$ sia il punto finale. Non è necessario semplificare il risultato.
   Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzione

$$\int\int_S (2z + x - 3y)\, ds \ ,$$

dove

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, z = 3 - x - y\right\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \int_{\mathrm{Arctg}\, y^2}^{\mathrm{Arctg}\, x^2} \sqrt{1 + t^4}\, dt\ ;$$

calcolare le derivate parziali di f.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1, (x - 1)^2 + y^2 \le 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x - y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3+1}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + y'' = 6x + 2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^3\, dxdy\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ y \leq x\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D z^2\, dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4(x^2 + y^2) \leq (2 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0 \}$$

b) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + (x^y)^2}\, y\, x^{y-1} = \frac{y\, x^{y-1}}{1 + x^{2y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1 + (x^y)^2}\, x^y \log x = \frac{x^y \log x}{1 + x^{2y}}$$

Si ha quindi

$$\mathrm{grad}\, f(x,y) = \left(\frac{y\, x^{y-1}}{1 + x^{2y}} , \frac{x^y \log x}{1 + x^{2y}} \right)$$

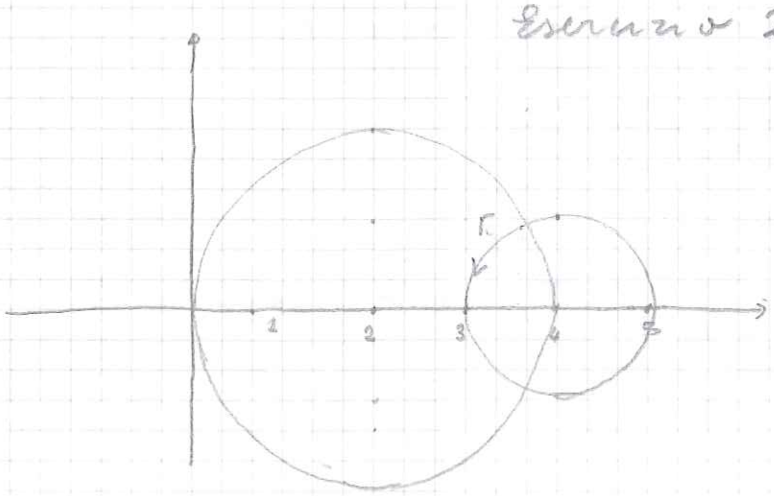
c) Per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$df(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (h_1, h_2) \longrightarrow \frac{y\, x^{y-1}}{1 + x^{2y}}\, h_1 + \frac{x^y \log x}{1 + x^{2y}}\, h_2$$

d) Si ha

$$df(x,y) = \frac{y\, x^{y-1}}{1 - x^{2y}}\, dx + \frac{x^y \log x}{1 + x^{2y}}\, dy$$

Esercizio 2



Le intersezioni delle circonferenze

$$(x-4)^2 + y^2 = 1$$

e

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{, cioè}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2-(x-4)^2 = 3 \\ (x-4)^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2-4x+4-(x^2-8x+16) = 3 \\ (x-4)^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

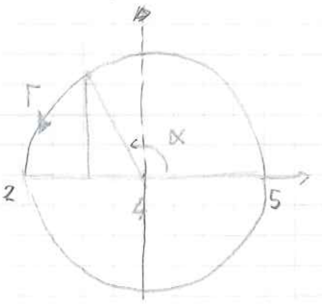
cioè

$$\begin{cases} 4x-12 = 3 \\ (x-4)^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ \left(\dfrac{15}{4}-4\right)^2+y^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ y^2 = \dfrac{15}{16} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

I punti intersezione delle due circonferenze sono quindi $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ e $\left(\frac{15}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

Essendo nella definizione di Γ $y>0$, $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ è il punto iniziale di Γ

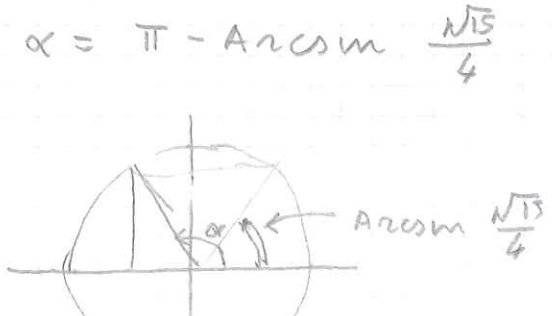


Se α è l'angolo fra la semiretta di origine $(4,0)$ e passante per $(5,0)$ e la semiretta di origine $(4,0)$ e passante per $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, una parametrizzazione di Γ è

$$\begin{cases} x = 4 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \pi]$$

Si ha $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; si ha quindi

$\alpha = \pi - \mathrm{Arcsin}\, \frac{\sqrt{15}}{4}$



Una parametrizzazione di Γ è quindi

$$\begin{cases} x = 4 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[\pi - \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}, \pi\right]$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma xy\,dx = \int_{\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} (4+\cos t)\sin t\,(-\sin t)\,dt =$$

$$= -\int_{\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} (4\sin^2 t + \sin^2 t\cos t)\,dt =$$

$$= -\int_{\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} \left(4\,\frac{1-\cos(2t)}{2} + \sin^2 t\cos t\right)dt$$

$$= -\left[2\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi}$$

$$= -\left[2t - \sin(2t) + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\pi} =$$

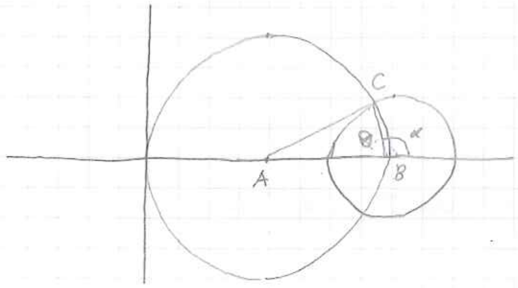
$$= 2\pi - 2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4} + \sin\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3 - 2\pi$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{15\sqrt{15}}{64} - 2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4} + 2\,\frac{\sqrt{15}}{4}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15}}{64} - 2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{1-\frac{15}{16}} =$$

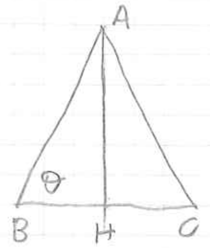
$$= \frac{5\sqrt{15}}{64} - 2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{13}{64}\sqrt{15} - 2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{15}}{4}$$

NB È possibile determinare l'angolo α attraverso metodi geometrici. Il triangolo ABC è isoscele con base BC



Si ha

$\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ e $\overline{BC} = 1$



Si ha $\overline{BH} = \overline{BA} \cos\theta$;

quindi

$\frac{1}{2} = 2\cos\theta$; quindi $\cos\theta = \frac{1}{4}$

quindi $\theta = \text{Arccos}\,\frac{1}{4}$

Quindi $\alpha = \pi - \text{Arccos}\,\frac{1}{2}$

Per $0 \leq x \leq 1$ si ha $\text{Arcos}\, x = \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$

Si ha quindi

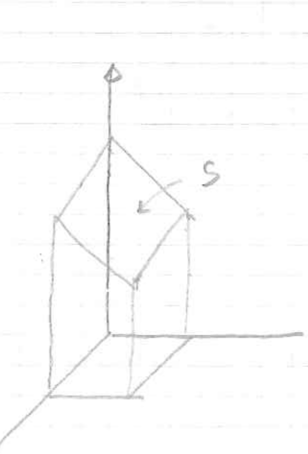
$$\text{Arccos}\,\frac{1}{4} = \text{Arcsin}\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Quindi

$$\alpha = \pi - \text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Si ottiene quindi l'espressione di α precedentemente trovata

Esercizio n 3



Una parametrizzazione di S è data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3 - u - v \end{cases} \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Per ogni $(u, v) \in \operatorname{dom}\varphi$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$E(u,v) = 2$, $F(u,v) = 1$, $G(u,v) = 2$

Quindi si ha

$$\sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - (F(u,v))^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Si ha quindi

$$\iint_S (2z + x - 3y)\, ds$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (2(3-u-v) + u - 3v)\sqrt{3}\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{3} \iint_{[0,1]\times[0,1]} (6 - u - 5v)\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^1 (6 - u - 5v)\, dv \right) du =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left[6v - uv - \frac{5}{2}v^2 \right]_0^1 du =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left(6 - u - \frac{5}{2}\right) du = \sqrt{3} \int_0^1 \left(\frac{7}{2} - u\right) du =$$

$$= \sqrt{3} \left[\frac{7}{2}u - \frac{1}{2}u^2 \right]_0^1 = \sqrt{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

Esercizio 4

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

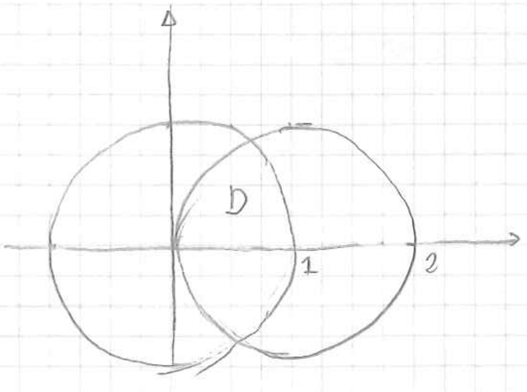
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{1+(\operatorname{Arctg} x^2)^4}\ \frac{1}{1+x^4}\ 2x =$$

$$= \frac{2x}{1+x^4}\sqrt{1+(\operatorname{Arctg} x^2)^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sqrt{1+(\operatorname{Arctg} y^2)^4}\ \frac{1}{1+y^4}\ 2y =$$

$$= -\frac{2y}{1+y^4}\sqrt{1+(\operatorname{Arctg} y^2)^4}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \operatorname{dom}(f)$
Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f.

Sia $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$; si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \neq 0$. Si ha quindi

$E \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$

I punti intersezione delle circonferenze $x^2+y^2=1$ e $(x-1)^2+y^2=1$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} (x-1)^2-x^2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{cioè a} \quad \begin{cases} -2x+1=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}, \quad \text{cioè a} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

cioè a $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

I punti intersezione delle due circonferenze sono quindi $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sia

$F_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1, \quad x > \frac{1}{2} \}$,

$F_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad x < \frac{1}{2} \}$

$F_3 = \{ (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \}$, $\quad F_4 = \{ (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \}$

Si ha

$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow 3x - y$$

Sia

$g_1 : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > \frac{1}{2} \} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow x^2 + y^2 - 1$

F_1 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x,y) = 0$

Se $(x,y) \in F_1 \cap E$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$

cioè tale che

$(3, -1) = \lambda (2x, 2y)$.

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

Quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1, \text{ cioè}$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \text{ cioè } 10 = 4\lambda^2, \text{ cioè } \lambda^2 = \frac{5}{2}$$

cioè $\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Per $\lambda = \sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha

$$x = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{10}\sqrt{10} \quad \text{e}$$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{10}\sqrt{10}$$

Si ha $\frac{3}{10}\sqrt{10} > \frac{1}{2}$ se e solo se $\sqrt{10} > \frac{5}{3}$, cioè se e solo se $10 > \frac{25}{9}$, cioè se e solo se $2 > \frac{5}{9}$, cioè se e solo se $18 > 5$; ciò è vero; si ha quindi $\frac{3}{10}\sqrt{10} > \frac{1}{2}$. Si trova quindi il punto

$$\left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)$$

Per $\lambda = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha $x = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} < 0$; quindi non è $x > \frac{1}{2}$; quindi nessuna soluzione per il sistema

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, \; -\frac{1}{10}\sqrt{10} \right) \right\}$$

Sia

$$h : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x < \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to (x-1)^2 + y^2 - 1$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $h(x,y) = 0$

Se $(x,y) \in E \cap F_2$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$$

cioè tale che

$$(3,-1) = \lambda\,(2(x-1), 2y).$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda(x-1) \\ -1 = 2\lambda y \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x - 1 = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1, \text{ cioè } \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \text{ cioè}$$

$$10 = 4\lambda^2, \text{ cioè } \lambda^2 = \frac{5}{2}, \text{ cioè } \lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Per $\lambda = \sqrt{\frac{5}{2}}$, si ha

$$x = 1 + \frac{3}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{3}{10}\sqrt{10} > \frac{1}{2}; \text{ quindi il sistema}$$

non ha soluzioni.

Per $\lambda = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, si ha

$$x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{3}{10}\sqrt{10}.$$

Si ha $1 - \frac{3}{10}\sqrt{10} < \frac{1}{2}$ se e solo se $-\frac{3}{10}\sqrt{10} < -\frac{1}{2}$, se e solo se $\frac{3}{5}\sqrt{10} > 1$, se e solo se $3\sqrt{10} > 5$, se e solo se $90 > 25$; ciò è vero; si ha quindi $1 - \frac{3}{10}\sqrt{10} < \frac{1}{2}$

Si ha

$$y = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{1}{10}\sqrt{10}$$

Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{\left(1 - \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10}\right)\right.$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{\left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\right), \left(1 - \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = \frac{9}{10}\sqrt{10} + \frac{1}{10}\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$$f\left(1 - \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10}\right)\Big) = 3 - \frac{9}{10}\sqrt{10} - \frac{1}{10}\sqrt{10} = 3 - \sqrt{10}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

Si ha $3 - \sqrt{10} < 0$ e $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} > 0$; quindi si ha $3 - \sqrt{10} < \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$; si ha $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} < \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$; si ha $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} < \sqrt{10}$ se e solo se $3 + \sqrt{3} < 2\sqrt{10}$, se e solo se $9 + 6\sqrt{3} + 3 < 40$, se e solo se

$6\sqrt{3} < 28$, se e solo se $3\sqrt{3} < 14$, se e solo se $27 < 196$ e ciò è vero; si ha quindi

$$3-\sqrt{10} < \frac{3-\sqrt{3}}{2} < \frac{3+\sqrt{3}}{2} < \sqrt{10}$$

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{10}$, $\min(f) = 3-\sqrt{10}$

Esercizio 6

L'equazione differenziale è a variabili separabili, assegnata per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^*$

Essendo $y(0) = 1 > 0$, il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3+1}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3+1}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0\ ;$$

quindi al problema di Cauchy.

Si ha $y^3+1 = 0$ se e solo se $(y+1)(y^2-y+1) = 0$; quindi se e solo se $y = -1$

Essendo $y > 0$, si ha $\dfrac{y^3+1}{y^2} \neq 0$.

Il problema di Cauchy sopra è quindi equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{y^3+1}\, y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita di incognita $y(x)$ tale che $0 \in \operatorname{dom}(y)$

$$\int_1^y \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = \int_0^x dt \quad, x \in R,\ y>0$$

cioè

$$\frac{1}{3}\int_1^y \frac{1}{t^3+1}(3t^2)\,dt = x \quad, x \in R,\ y>0$$

cioè

$$\frac{1}{3}\Big[\log(t^3+1)\Big]_1^y = x,\ x \in R,\ y>0$$

cioè

$$\log(y^3+1) - \log 2 = 3x,\ x\in R,\ y>0 \quad, \text{cioè}$$

$$\log\frac{y^3+1}{2} = 3x,\ x\in R,\ y>0 \quad, \text{cioè}$$

$$\frac{y^3+1}{2} = e^{3x},\ x\in R,\ y>0$$

cioè

$$y^3 = 2e^{3x}-1 \quad, x\in R,\ y>0$$

Essendo $y>0$, $\Rightarrow 2e^{3x}-1>0$, cioè $e^{3x}>\frac{1}{2}$, cioè $3x > \log\frac{1}{2} = -\log 2$, cioè $x > -\frac{1}{3}\log 2$

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$y^3 = 2e^{3x}-1,\quad x > -\frac{1}{3}\log 2,\quad y>0$$

cioè

$$y = \sqrt[3]{2e^{3x}-1}\quad, -\frac{1}{3}\log 2,\ y>0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi:]-\tfrac{1}{3}\log 2, +\infty[\ \longrightarrow R,\quad x \longrightarrow \sqrt[3]{2e^{3x}-1}$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 .$$

L'equazione è equivalente a

$$\lambda^2 (\lambda + 1) = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ doppia e $\lambda = -1$ semplice.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = e^{-x}$$

Essendo 0 soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x^2 (A + Bx)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi(x) = Ax^2 + Bx^3$$
$$\psi'(x) = 2Ax + 3Bx^2$$
$$\psi''(x) = 2A + 6Bx$$
$$\psi'''(x) = 6B$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$6B + 2A + 6Bx = 6x + 2 \quad ;$$ quindi se e solo se

$$\begin{cases} 6B = 6 \\ 6B + 2A = 2 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} B = 1 \\ 6 + 2A = 2 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} B = 1 \\ A = -2 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\varphi(x) = x^2(-2+x) = x^3 - 2x^2$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + x^3 - 2x^2$$

Si ha

$$y'(x) = c_2 - c_3 e^{-x} + 3x^2 - 4x$$

$$y''(x) = c_3 e^{-x} + 6x - 4$$

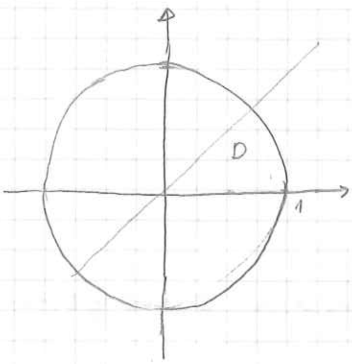
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_3 - 4 = 0 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se } \begin{cases} c_3 = 4 \\ c_2 = 4 \\ c_1 = -4 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = -4 + 4x + 4e^{-x} + x^3 - 2x^2$$

Esercizio 8



Una parametrizzazione in misura di D è data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \operatorname{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$. Si ha quindi:

$$\iint_D x^3 \, dx\, dy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho^3 \cos^3 t \, \rho \, d\rho\, dt =$$

$$= \left(\int_0^1 \varrho^4 \, d\varrho\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t \, dt\right) =$$

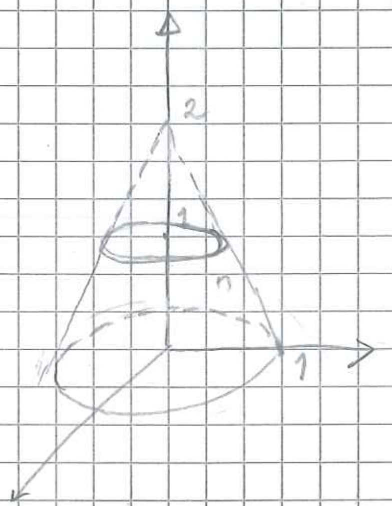
$$\left[\frac{1}{5} \varrho^5\right]_0^1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 t) \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos t \, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{10}\sqrt{2} - \frac{1}{60}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Esercizio 9



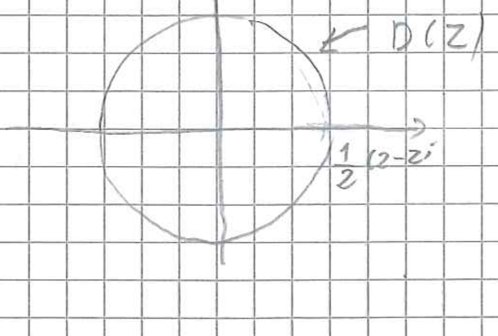
Si ha $p_3(D) = [0,1]$

Per ogni $z \in [0,1]$ si ha

$$D(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 \le \frac{1}{4}(2-z^2) \right\}$$

$D(z)$ è quindi il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{2}(2-z)$

Si ha quindi



$$\iiint_D z^2 \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} z^2 \, dx\, dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 z^2 \left(\iint_{D(z)} dx\, dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 z^2 \, \text{mis}\,(D(z))\, dz =$$

$$= \int_0^1 z^2 \, \pi \left(\frac{1}{2} (2-z) \right)^2 dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 z^2 (4 - 4z + z^2)\, dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (z^4 - 4z^3 + 4z^2)\, dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{5} z^5 - z^4 + \frac{4}{3} z^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{15} \pi$$