

Analisi Matematica 2 - 10/2/15 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = (\log(xyz), x \log(yz)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Calcolare l'area della seguente superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_{\Gamma} x dx + x dy ,$$

dove Γ è la curva

$$\{x, y\} \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\} ,$$

orientata in modo che $\vec{t}(1,0) = (1,0)$.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Sia $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow g(\sin(xy), \cos(xy)) ;$$

esprimere $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ attraverso le derivate parziali di g , $D_1 g$, $D_2 g$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1, z \geq 0\} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \rightarrow x + 2y - z ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y + \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_+$; trovare, in funzione di α tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - \alpha y = e^{\alpha x}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D y \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2 \leq y \leq 1-x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D z \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1, z \geq 0\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz > 0 \text{ e } xy > 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy > 0 \text{ e } z > 0\} \end{aligned}$$

b) Per ogni $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left(\frac{1}{xyz} yz, \log(yz) \right) = \left(\frac{1}{x}, \log(yz) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{1}{xyz} xz, x \frac{1}{yz} z \right) = \left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \left(\frac{1}{xyz} xy, x \frac{1}{yz} y \right) = \left(\frac{1}{z}, \frac{x}{z} \right)$$

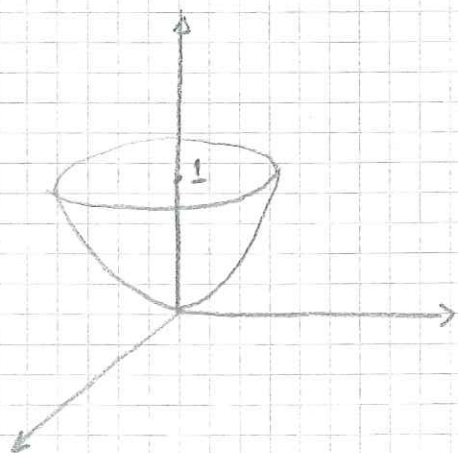
Si ha quindi

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \log(yz) & \frac{x}{y} & \frac{x}{z} \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2, h_3) \rightarrow \left(\frac{h_1}{x} + \frac{h_2}{y} + \frac{h_3}{z}, \log(yz)h_1 + \frac{x}{y}h_2 + \frac{x}{z}h_3 \right)$$

Esercizio 2



Si ha

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

S è la superficie cartesiana
grafica di

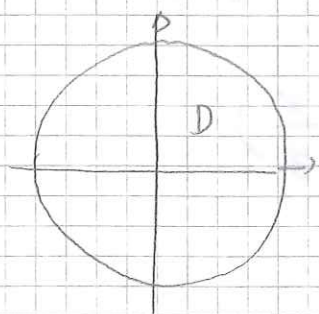
$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

2
Per ogni $(x, y) \in D$ si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Si ha quindi:

$$\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dx \, dy$$



Una parametrizzazione in misura di D è la funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}, \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha

$$|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$$

L'integrale sopra S è quindi uguale a

$$\iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{1+4\rho^2} \, \rho \, d\rho \, dt =$$

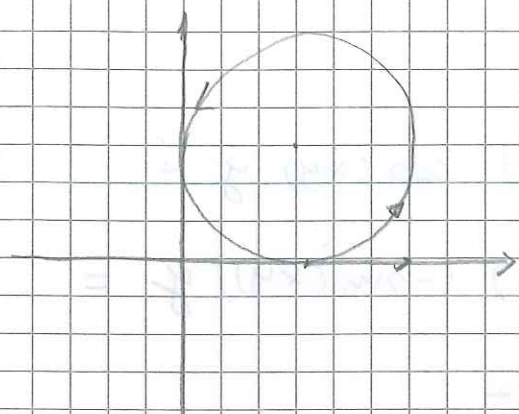
$$= \left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \, \rho \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} 8\rho \, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

Esercizio 3



Una parametrizzazione
in termini di t è
data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Tale parametrizzazione è concorde con
l'orientazione di Γ (circonferenza
percorse in verso antiorario).

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x dx + x dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} ((1 + \cos t)(-\sin t) + (1 + \cos t) \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t - \sin t \cos t + \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin t dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= - \left[-\cos t \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} + \left[\sin t \right]_0^{2\pi} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

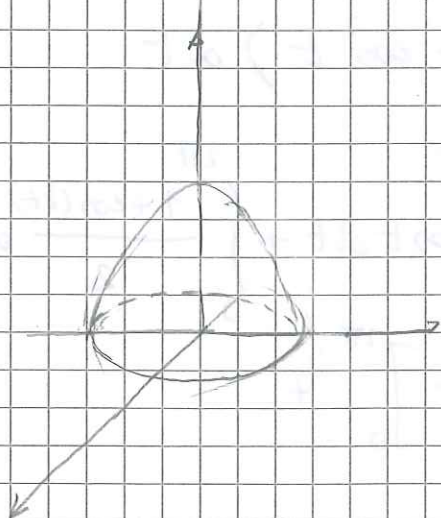
Esercizio 4

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= D_1 g(\sin(xy), \cos(xy)) \cos(xy) y + \\ &\quad + D_2 g(\sin(xy), \cos(xy)) (-\sin(xy)) y = \\ &= y (D_1 g(\sin(xy), \cos(xy)) \cos(xy) - \\ &\quad D_2 g(\sin(xy), \cos(xy)) \sin(xy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= D_1 g(\sin(xy), \cos(xy)) \cos(xy) x + \\ &\quad + D_2 g(\sin(xy), \cos(xy)) (-\sin(xy)) \cdot x = \\ &= x (D_1 g(\sin(xy), \cos(xy)) \cos(xy) - \\ &\quad D_2 g(\sin(xy), \cos(xy)) \sin(xy)) \end{aligned}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continue, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x, y, z) \in D$. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 \neq 0$

Si ha quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Si ha

$$F_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z > 0 \right\}$$

$$F_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$$

$$F_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

Si ha $F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$

Si ha

$$g: \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1$$

F_1 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione costante $g(x, y, z) = 0$

Identifichiamo la funzione f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x + 2y - z$$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_1$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

quindi tale che

$$(1, 2, -1) = \lambda \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{9}y, \frac{1}{8}z \right)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \lambda x \\ 2 = \frac{2}{9} \lambda y \\ -1 = \frac{1}{8} \lambda z \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \\ z > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni;
supponiamo $\lambda \neq 0$. Se

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = \frac{9}{\lambda}, \quad z = -\frac{8}{\lambda}$$

Se quindi

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{9} + \left(-\frac{8}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{16} = 1;$$

quindi

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1; \quad \text{quindi}$$

$$\lambda^2 = 14; \quad \text{quindi} \quad \lambda = \pm \sqrt{14}$$

Supponiamo $\lambda = \sqrt{14}$; si ha $z = -\frac{8}{\sqrt{14}} < 0$;

non si ottiene alcuna soluzione del sistema sopra.

Supponiamo $\lambda = -\sqrt{14}$. Se

$$x = -\frac{2}{\sqrt{14}} = -\frac{2}{14} \sqrt{14} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$y = -\frac{9}{\sqrt{14}} = -\frac{9}{14} \sqrt{14}$$

$$z = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{8}{14} \sqrt{14} = \frac{4}{7} \sqrt{14}$$

Si ottiene il punto $\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{9}{14} \sqrt{14}, \frac{4}{7} \sqrt{14}\right)$

Si ha quindi:

$$E \cap F_1 = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{9}{14} \sqrt{14}, \frac{4}{7} \sqrt{14}\right) \right\}$$

Siccome ora

$$g: \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow z$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_2$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$

Si ha quindi

$$(1, 2, -1) = \lambda (0, 0, 1)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Siccome ora

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1, z \right)$$

F_3 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$ se $(x, y, z) \in E \cap F_3$ per il teorema di moltiplicazione di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
 quindi $f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$
 cioè tale che

$$(1, 2, -1) = \lambda \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{9}y, 0 \right) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \lambda x \\ 2 = \frac{2}{9} \lambda y \\ -1 = \mu \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni.

Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = \frac{9}{\lambda} \quad \text{Si ha quindi}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{9} = 1; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 1; \quad \text{quindi}$$

$$\lambda^2 = 10; \quad \text{quindi } \lambda = \pm \sqrt{10}$$

Per $\lambda = \sqrt{10}$, si ha

$$x = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{10} \sqrt{10} = \frac{1}{5} \sqrt{10}$$

$$y = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9}{10} \sqrt{10}$$

$$z = 0$$

Si ottiene il punto $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right)$

Per $\lambda = -\sqrt{10}$ si ha $x = -\frac{1}{5} \sqrt{10}$, $y = -\frac{9}{10} \sqrt{10}$, $z = 0$,

Si ottiene il punto $\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right)$

Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{ \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right) \right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{9}{14} \sqrt{14}, \frac{4}{7} \sqrt{14} \right), \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{9}{10} \sqrt{10}, 0 \right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{9}{14} \sqrt{14}, \frac{4}{7} \sqrt{14}\right) = -\frac{\sqrt{14}}{7} - \frac{9}{7} \sqrt{14} - \frac{4}{7} \sqrt{14} = -2\sqrt{14}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{9}{10} \sqrt{10}, 0\right) = \frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{9}{5} \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{9}{10} \sqrt{10}, 0\right) = -2\sqrt{10}$$

Si ha quindi

$$\max(f) = 2\sqrt{10}, \quad \min(f) = -2\sqrt{14}$$

Esercizio 6

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine definita su $\mathbb{R}$.

Una primitiva della funzione $\sin x$ è la funzione

$$A(x) = -\cos x$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int e^{\cos x} \sin x \, dx &= - \int e^{\cos x} (-\sin x) \, dx = \\ &= -e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

Una primitiva di $e^{-\cos x} \sin x$ è quindi

$$B(x) = -e^{\cos x}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi della forma

$$y = e^{-\cos x} (-e^{\cos x} + C) = C e^{-\cos x} - 1$$

al variare di C in $\mathbb{R}$.

Per $x=0$ si ha

$$C e^{-1} - 1 = 0 \quad ; \quad \text{quindi} \quad \frac{C}{e} = 1; \quad \text{quindi} \quad C = e$$

$$\text{Si ha} \quad e e^{-\cos x} - 1 = e^{1-\cos x} - 1$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{1-\cos x} - 1$$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

Per $x=0$ l'equazione diventa $y''=1$

Si ha:

$$y'(x) = x + C_1 \quad \text{e} \quad y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da

$$y(x) = C_1x + C_2 + \frac{1}{2}x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Supponiamo $x \neq 0$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - \alpha = 0$$

Tale equazione ha radici $\lambda = \pm\sqrt{\alpha}$

Essendo $\alpha \neq 0$, si ottengono due radici di molteplicità 1.

Un sistema fondamentale di soluzioni è quindi dato da

$$y_1(x) = e^{\sqrt{\alpha}x}, \quad y_2(x) = e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Essendo $\alpha > 0$, α è soluzione dell'equazione caratteristica se e solo se

$$\alpha = \sqrt{\alpha}^2, \quad \text{cioè se e solo se } \alpha^2 = \alpha$$

noè, essendo $\alpha \neq 0$, se e solo se $\alpha = 1$

Supponiamo $\alpha \neq 1$: α non è allora soluzione dell'equazione caratteristica. Esiste quindi $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A e^{\alpha x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi'(x) = A\alpha e^{\alpha x}, \quad \psi''(x) = A\alpha^2 e^{\alpha x}$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$A\alpha^2 e^{\alpha x} - \alpha A e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

noè se e solo se

$$A(\alpha^2 - \alpha) = 1,$$

noè se e solo se

$$A = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} e^{\alpha x}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} e^{\alpha x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Supponiamo $\alpha = 1$. L'equazione diventa

$$y'' - y = e^x$$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$

Prendiamo 1 soluzione dell'equazione caratteristica,

esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A x e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = A e^x + A x e^x$$

$$\psi''(x) = A e^x + A e^x + A x e^x = 2A e^x + A x e^x$$

La funzione ψ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$2A e^x + A x e^x - A x e^x = e^x$$

cioè se e solo se $2A = 1$, cioè $A = \frac{1}{2}$

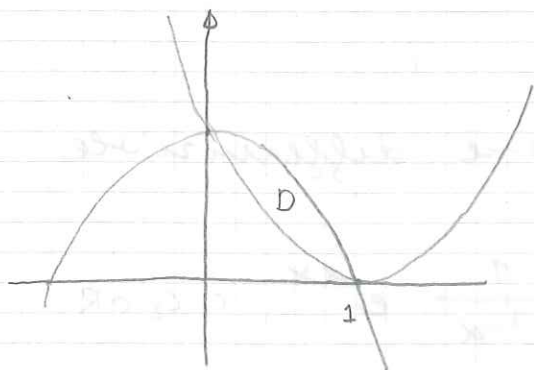
Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{2} x e^x$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi date da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 8



Le parabole $y = 1 - x^2$ e $y = (x-1)^2$ si intersecano nei punti soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 1 - x^2 = (x-1)^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 0 \text{ o } x = 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

Per $x = 0$ si ha $y = 1$. Per $x = 1$ si ha $y = 0$

Le parabole si intersecano quindi nei punti $(0,1)$ e $(1,0)$.

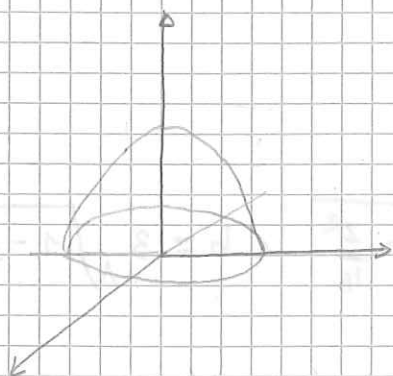
Si ha $p_1(D) = [0,1]$ e per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$D(x) = [(x-1)^2, 1-x^2]$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{(x-1)^2}^{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((1-x^2)^2 - (x-1)^4 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4 - (x-1)^4 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{5} (x-1)^5 \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 9 (10 moduli)



Una parametrizzazione in
minori di D è data da x definito da

$$\begin{cases} x = 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = 3 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 4 \cos \varphi \end{cases}$$

$$(\varphi, \theta, \theta) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(s, \varphi, \theta) \in \text{dom } f$ si ha

$$|\det \alpha'(s, \varphi, \theta)| = 24 s^2 \sin \varphi$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} 4s \cos \varphi \cdot 24 s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta = \\ &= 96 \left(\int_0^1 s^3 \, ds \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= 96 \left[\frac{1}{4} s^4 \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi = \\ &96 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 24\pi \end{aligned}$$

Esercizio 3 (2° modo)

Si ha $p_3(D) = [0, 4]$

Per ogni $z \in [0, 4[$ $D(z)$ è il dominio limitato dell'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{z^2}{16}, \text{ dove}$$

$$\frac{x^2}{4 \left(1 - \frac{z^2}{16}\right)} + \frac{y^2}{9 \left(1 - \frac{z^2}{16}\right)} = 1$$

Tale ellisse ha semiasse $a = 2\sqrt{1 - \frac{z^2}{16}}$ e $b = 3\sqrt{1 - \frac{z^2}{16}}$

Quindi la area

$$\pi ab = 6\pi \left(1 - \frac{z^2}{16}\right)$$

Si he quendi

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^4 \left(\iint_{D(z)} z \, dx \, dy \right) dz = \\
 &= \int_0^4 z \left(\iint_{D(z)} dx \, dy \right) dz = \\
 &= \int_0^4 z \, \text{mis}(D(z)) \, dz = \\
 &= \int_0^4 z \, 6\pi \left(1 - \frac{z^2}{16} \right) dz = \\
 &= 6\pi \int_0^4 \left(z - \frac{z^3}{16} \right) dz = \\
 &= 6\pi \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{64} z^4 \right]_0^4 = 6\pi (8 - 4) = 24\pi
 \end{aligned}$$