Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Definizione di derivata di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; allora la derivata di f in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di somma di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia σ una scomposizione di I; sia ξ una scelta rispetto a σ; allora la somma di Riemann, $\mathcal{R}(f, \sigma, \xi)$ è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di integrale di una forma differenziale su una traiettoria** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i \, dx_i$ una forma differenziale su A; sia ω continua; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1; allora si pone $\int_\varphi \omega = \dots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di equazione differenziale di ordine n di forma normale.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si chiama equazione differenziale di ordine n di forma normale di funzione incognita $y(x)$ corrispondente ad f l'equazione differenziale d'ordine n di incognita $y(x)$, ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -2y - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di spazio tangente ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m in un suo punto.
2. * Dare la definizione sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m (non necessariamente parametrizzabile).
3. *** Dare la definizione di derivabilità parziale e di derivata parziale esprimendola anche attraverso un limite.
4. *** Enunciare il teorema riguardante il rapporto fra differenziabilità e derivate parziali.
5. *** Enunciare il teorema riguardante la matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Definizione di integrale generale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, ..., φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di derivabilità secondo una direzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; si dice che f è derivabile secondo la direzione e in a se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; si pone $\mathrm{mis}_m(A) = \ldots$.

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari lineari non omogeneo.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}^N$; siano a, b continue; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo $y' = a(x)y$; sia ψ una soluzione del sistema non omogeneo $y' = a(x)y + b(x)$; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di una forma differenziale su una traiettoria:

$$\int_{\varphi} xydx + xdy \,,$$

dove $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (2t, 2-t)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante l'espressione dell'incremento di una funzione differenziabile in un punto (approssimazione dell'incremento attraverso la derivata).
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza la differenziabilità mediante l'espressione dell'incremento di una funzione.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la differenziabilità per funzioni di una variabile.
5. ** Enunciare il teorema del differenziale totale (condizione sufficiente per la differenziabilità)

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Teorema sull'espressione di un integrale di superficie.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 2; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 2-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f 2-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}^2$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha $\int\int_A f\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione di (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale sul prodotto di due insiemi misurabili di una funzione misurabile positiva.** Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^N$; sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^M$; sia $f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile e positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di classe di equivalenza.** Sia A un insieme; sia $\mathcal{R}\{x, y\}$ una relazione di equivalenza in A; Indichiamo $\mathcal{R}\{x, y\}$ con $x \sim y$; sia $a \in A$; la classe di equivalenza $[a]$ è l'insieme ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D y\, dxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
2. *** Dare la definizione di integrale superiore e di integrale inferiore.
3. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla proprietà di linearità dell'integrale.
5. * Enunciare il teorema relativo alla proprietà di positività dell'integrale (integrale di una funzione positiva ...). Enunciare il teorema relativo alla proprietà di monotonia dell'integrale (integrali di funzioni una minore o uguale all'altra ...). Enunciare il teorema relativo all'integrale di funzioni uguali quasi dappertutto.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Teorema sul cambiamento di variabile negli integrali di funzioni misurabili positive.** Siano A e B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un diffeomorfismo; sia $D \subset A$; sia D misurabile; sia $f : \varphi(D) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sul problema di Cauchy per un'equazione a variabili separate.** Siano I, J intervalli non banali di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(\forall y \in J)\ g(y) \neq 0$; siano f, g continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in J$; allora il problema di Cauchy $\begin{cases} g(y)y' = f(x) \\ y_(x_0) = y_0 \end{cases}$ ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione sufficiente per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema su intervallo chiuso di $\mathbf{R}^N$ come prodotto cartesiano di intervalli chiusi di $\mathbf{R}$.** Siano $a, b \in \mathbf{R}^N$; per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$ sia $a_i \leq b_i$; allora l'intervallo chiuso di $\mathbf{R}^N$ di estremi a e b è uguale a ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinate (se esistono), gli estremanti relativi della funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + xy + y^2$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di equazione differenziale di forma normale.
2. *** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
3. * Dare la definizione di equazione differenziale a variabili separate.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separate (equivalenza con equazioni implicite ...).
5. ** Enunciare il teorema sul problema di Cauchy relativo ad equazione differenziale a variabili separate (equivalenza con un'equazione implicita ...).

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Definizione di sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, ..., φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; si dice che φ_1, φ_2, ..., φ_N è un sistema fondamentale di soluzioni di $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$ se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di lavoro.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia F 1-misurabile su M; sia F 1-integrabile su M; si chiama lavoro del campo di vettori F su M l'integrale ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $x_0 \in I$; siano $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di insieme connesso.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è connesso se $ldots$.

RISPOSTA

[5]. (E) Trovare i punti critici e i punti di massimo e di minimo relativo della seguente funzione: $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 - xy + z^2 + 1$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di spazio normale ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m in un suo punto.
2. * Dare la definizione di varietà lineare tangente e varietà lineare normale ad una sottovarietà differenziale parametrizzabile di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m in un suo punto.
3. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
4. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante il rapporto fra differenziabilità e derivate parziali.
5. *** Enunciare il teorema riguardante la matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione di integrale superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; allora l'integrale superiore di f è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un intervallo di $\mathbf{R}^N$.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; supponiamo che sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$; allora la misura $\text{mis}(I)$ è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di insieme stellato.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è stellato se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione della misura rispetto ad una sottovarietà utilizzando il graamiano.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; sia $D \subset \mathbf{R}^N$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha (esprimere la misura di A rispetto alla varietà utilizzando il graamiano) $\text{mis}_m(A) = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue.
2. * Dare la definizione di funzione misurabile secondo Lebesgue.
3. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio D sull'asse x, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x)$.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli, con proiezione del dominio D sul piano xy, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x, y)$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Definizione di forma differenziale esatta.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; si dice che ω è esatta se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema di Schwarz.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; siano $k, h = 1, 2, \dots, N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di massimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Proprietà geometrica del grafico della soluzione di un'equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia φ soluzione dell'equazione differenziale di incognita $y(x)$,

$$y' = f(x, y) ;$$

allora il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di φ in $(x, \varphi(x))$ è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \sin(2x)\, dx .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue.
2. * Dare la definizione di funzione misurabile secondo Lebesgue.
3. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio D sull'asse x, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x)$.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli, con proiezione del dominio D sul piano xy, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x, y)$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sull'asse x.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia A misurabile; sia $p_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di matrice jacobiana in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la matrice jacobiana di f in a è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di lavoro.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1 parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M 1-misurabile; sia F 1-misurabile su M; sia F 1-integrabile su M; si chiama lavoro del campo di vettori F su M l'integrale ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di campo di vettori conservativo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$; si dice che F è un campo di vettori conservativo (o esatto) se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y, z) \longrightarrow (x^2 y, \sin(xz))$; determinare la trasformazione lineare $f'(1, 1, 2)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Data una sottovarietà differenziabile parametrizzabile orientata, quale orientazione viene assegnata allo spazio tangente?
2. * Data una curva (cioè una sottovarietà di dimensione 1) differenziabile parametrizzabile orientata, dire che cosa è il versore tangente e darne una espressione utilizzando una parametrizzazione.
3. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
4. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto; enunciare il teorema sulla matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Definizione di sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, …, φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; si dice che φ_1, φ_2, …, φ_N è un sistema fondamentale di soluzioni di $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$ se …

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sul sistema fondamentale di soluzioni reale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti nel caso di radici complesse dell'equazione caratteristica.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{R}$; sia $\lambda = \sigma + i\tau$ una radice complessa di molteplicità m dell'equazione caratteristica dell'equazione differenziale a coefficienti costanti $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$; allora a λ e al coniugato di λ corrispondono nel sistema fondamentale di soluzioni reali le $2m$ soluzioni …

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in \mathbf{R}$; allora la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è la funzione …

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di versore normale.** Sia (V, O) una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di $\mathbf{R}^N$ dimensione $N-1$; sia $x_0 \in V$; sia $\vec{n} \in \mathbf{R}^N$; si dice che $\vec{n}$ è il versore versore normale a V in x_0 se si ha …

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx\ .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
5. * Dire come si ottiene una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali curvilinei.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Definizione dei simboli di Gauss E, F, G.** Sia D un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ derivabile parzialmente rispetto agli indici 1 e 2; sia $(u,v) \in D$; allora i simboli di Gauss $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ sono dati da ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano di una funzione misurabile positiva.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N \times R^M}$; sia $\mathrm{pr}_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile; sia $f \geq 0$; allora ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale sul prodotto di due insiemi misurabili di una funzione misurabile positiva.** Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^N$; sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^M$; sia $f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile e positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione di classe C^0.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è di classe C^0 se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di equazione differenziale di forma normale. Enunciare il teorema che caratterizza le soluzioni di un'equazione differenziale di forma normale (cioè che cosa significa che φ è soluzione di un'equazione di forma normale).
2. *** Dare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
3. *** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale di forma normale.
4. ** Dare la definizione di sistema di equazioni differenziali di forma normale. Enunciare il teorema che caratterizza le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali di forma normale (cioè che cosa significa che φ è soluzione di un sistema di forma normale).
5. * Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy relativo ad un sistema di equazioni differenziali differenziale di forma normale.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Teorema sull'espressione di un integrale curvilineo.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 1; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 1-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f 1-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha $\int_A f\, ds = \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Significato geometrico dell'integrale di funzioni di segno arbitrario di una variabile**

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f una funzione di Riemann; allora l'integrale $\int_{[a,b]} f$ geometricamente rappresenta ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia T lineare; allora la matrice di T è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f misurabile; si dice che f è integrabile secondo Lebesgue se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D y\, dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.
2. ** Dare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Enunciare il teorema riguardante il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.
3. * Dare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali lineari. Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali lineari.
4. * Dare la definizione di sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.
5. *Enunciare il teorema sulla somma e sul prodotto per una costante di soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo. Dimostrare il teorema sulla somma e sul prodotto per una costante di soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Definizione di sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, …, φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; si dice che φ_1, φ_2, …, φ_N è un sistema fondamentale di soluzioni di $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$ se …

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che T è una trasformazione lineare se …

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; allora $\mathcal{H}f(a)$ è la matrice …

RISPOSTA

[4]. (*) **Significato geometrico della derivata parziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $k = 1, 2$; sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora $D_k f(a)$ geometricamente rappresenta (si può esprimere il significato geometrico anche attraverso un disegno) …

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio normale alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ definita dalla equazione cartesiana

$$x^2 - y^2 = 1$$

in un punto (x_0, y_0) della sottovarietà.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi su un aperto e gradiente.
2. *Dare la definizione di forma bilineare su $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ e di matrice di una forma bilineare,
3. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica.
4. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita positiva, definita negativa.
5. ** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi e differenziale secondo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Teorema sulla formula di Leibniz-Newton.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di funzione di Riemann.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è una funzione di Riemann su A se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione sufficiente per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di graamiano di m vettori.** Siano $m, N \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbf{R}^N$; sia a la matrice avente per colonne i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$; il graamiano γ_a è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di una forma differenziale su una traiettoria:

$$\int_\varphi y dx + x dy \ ,$$

dove $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, t \longrightarrow (2 \cos t, 3 \sin t)$. **Suggerimento.** La forma differenziale è esatta.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di somma inferiore e di somma superiore di una funzione relativa ad una scomposizione.
2. * Dire che relazione c'è fra somme superiori e somme inferiori, relative a scomposizioni diverse.
3. *** Dare la definizione di integrale superiore e di integrale inferiore.
4. *** Dare la definizione di integrale per una funzione di Riemann.
5. * Dare la definizione di scelta relativa ad una scomposizione. Dare la definizione di somma di Riemann relativa ad una scomposizione.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Definizione di somma superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma superiore di f, $S(f,\sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; allora $\mathcal{H}f(a)$ è la matrice ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla espressione canonica di una forma differenziale (cioè mediante le forme differenziali dx_i).** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; sia F il campo associato ad ω; allora si ha $\omega = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione del flusso tramite l'integrale della $(N-1)$-forma associata in modo complementare al campo di vettori.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $G : A \longrightarrow \mathbf{R}^N$ un campo di vettori su A; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione $N-1$ parametrizzabile orientata; sia $M \subset V$; sia M $N-1$-misurabile; sia G $N-1$-misurabile su M; sia G $N-1$-integrabile su M; allora si ha $\int_M (G|\vec{n})\, ds_{N-1} = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (x^5+1)^7 x^4\, dx\ .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una curva differenziale parametrizzabile.
2. ** Calcolare la lunghezza di una circonferenza.
3. * Trovare la formula che dà l'area di una superficie di rotazione.
4. * Dare la definizione di baricentro di un sottoinsieme compatto di una sottovarietà.
5. * Enunciare e dimostrare il teorema di Guldino per le superfici di rotazione.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Definizione di integrale generale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ continue; siano φ_1, φ_2, ..., φ_N soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) \ldots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di insieme stellato rispetto ad un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; si dice che A è stellato rispetto ad a se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di integrale di una m-forma.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia ω una m-forma differenziale su A; sia $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq N} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}$; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m parametrizzabile orientata; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M m-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; sia ω m-misurabile su M; sia ω m-integrabile su M; allora si pone $\int_M \omega = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema di Dini in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[5]. (E) Dire se la seguente forma differenziale è esatta; in caso affermativo trovare l'insieme delle primitive: $y\,dx + x\,dy$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di integrale di una m-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m.
2. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
3. * Dare la definizione di flusso di un campo di vettori G su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale orientata di $\mathbf{R}^N$ di dimensione $N-1$.
4. * Enunciare il teorema che lega il lavoro di un campo di vettori F su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale orientata di $\mathbf{R}^N$ di dimensione $N-1$ all'integrale di una $N-1$-forma
5. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto; enunciare il teorema sulla matrice della derivata.

RISPOSTA