Analisi Matematica 2 - 9/6/'15 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

   (vedi Esercizio 1); sia $(x,y,z) \in \text{dom}(f)$; determinare:

   (a) $\|\text{grad}\, f(x,y,z)\|$

   (b) la direzione

$$e(x,y,z) = \frac{\text{grad}\, f(x,y,z)}{\|\text{grad}\, f(x,y,z)\|} \ ;$$

   (c) la derivata direzionale

$$D_{e(x,y,z)} f(x,y,z) \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S x\,ds\ ,$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{2} - y + z = 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy\,dx\ ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x = y^2,\ -1 \leq y \leq 1\}\ ,$$

orientato in modo che $(1,-1)$ sia il punto iniziale e $(1,1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ -y \leq x \leq y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow 2x + 3y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xe^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 7y'' + 7y' - 15y = e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{24},\ y''(0) = \frac{1}{12} \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y^2 \, dxdy \; ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\; x^2 + y^2 \le 1,\, -y \le x \le y\} \; .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\; x \ge 0,\, 0 \le z \le 1,\, x^2 + y^2 \le z^2\} \; .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente il volume, ma di determinarlo calcolando un integrale triplo.

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 9/6/'15 - Compito 1 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio diverso da $(0, 0, 0)$;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio diverso da $(0, 0, 0)$, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale di f su $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

   (vedi Esercizio 1); sia $(x, y, z) \in \mathrm{dom}(f)$; determinare:

   (a) $\|\mathrm{grad}\, f(x, y, z)\|$

   (b) la direzione

$$e(x, y, z) = \frac{\mathrm{grad}\, f(x, y, z)}{\|\mathrm{grad}\, f(x, y, z)\|} \ ;$$

   (c) la derivata direzionale

$$D_{e(x,y,z)} f(x, y, z) \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S y\, ds \ ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ -x + \frac{y}{2} + z = 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma xy\, dx \ ,$$

dove Γ è la curva

$$\{x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x = -y^2,\ -1 \le y \le 1\} \ ,$$

orientata in modo che $(-1, -1)$ sia il punto iniziale e $(-1, 1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ -x \le y \le x\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x + 2y \ ,$$

   (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
   (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xe^{y-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 9y'' + 23y' + 15y = e^{-x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{8},\ y''(0) = -\frac{1}{4} \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2 \, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ x^2 + y^2 \le 1, \ -x \le y \le x\} \ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ y \ge 0, \ 0 \le z \le 1, \ x^2 + y^2 \le (1 - z)^2\} \ .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente il volume, ma di determinarlo calcolando un integrale triplo.

Svolgimento e risposta.