

Analisi Matematica 2 - 9/6/'15 - Compito 1 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow T\{h\}.$$

- (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i .

Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(vedi Esercizio 1); sia $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$; determinare:

- (a) $\|\text{grad } f(x, y, z)\|$
- (b) la direzione

$$e(x, y, z) = \frac{\text{grad } f(x, y, z)}{\|\text{grad } f(x, y, z)\|};$$

- (c) la derivata direzionale

$$D_{e(x, y, z)} f(x, y, z).$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S x \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, \frac{x}{2} - y + z = 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_{\Gamma} xy \, dx ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x = y^2, -1 \leq y \leq 1\} ,$$

orientato in modo che $(1, -1)$ sia il punto iniziale e $(1, 1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x + 3y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xe^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 7y'' + 7y' - 15y = e^x \\ y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{24}, y''(0) = \frac{1}{12} \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D y^2 \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\} .$$

Si chiede di non usare formule che diano direttamente il volume, ma di determinarlo calcolando un integrale triplo.

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

b) Sia $(x,y,z) \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = - \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Si ha quindi

$$\text{grad } f(x,y,z) = \left(- \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

c) Sia $(x,y,z) \in \text{dom}(f)$. Si ha

$$df(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, h_2, h_3) \mapsto$$

$$- \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} h_1 - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} h_2 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} h_3$$

d) Si ha

$$df(x,y,z) = - \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dy - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz$$

Esercizio 2

a) Si ha

$$\text{grad } f(x,y,z) = \left(- \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

Siehe qundi.

$$\| \text{grad } f(x, y, z) \| =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

b) Siehe

$$\frac{\text{grad } f(x, y, z)}{\| \text{grad } f(x, y, z) \|} =$$

$$(x^2+y^2+z^2) \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

Siehe qundi.

$$e(x, y, z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

c) Siehe

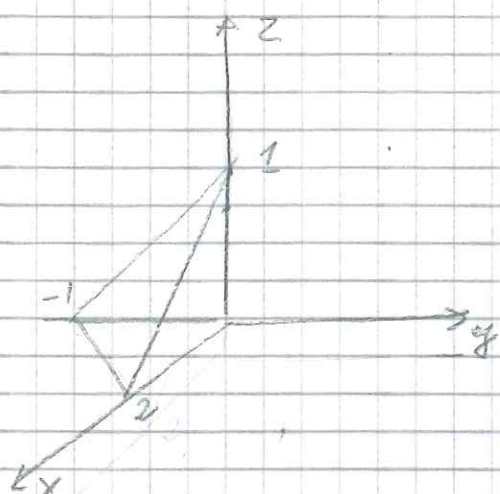
$$D_{e(x, y, z)} f(x, y, z) = df(x, y, z) (e(x, y, z))$$

$$= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) =$$

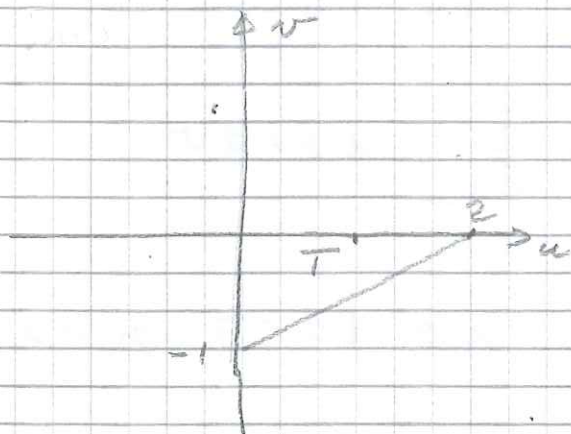
$$= \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Esercizio 3



Sia $T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \leq 0, \frac{u}{2} - v \leq 1 \right\}$



Una parametrizzazione di S è la funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - \frac{u}{2} - v \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ n he

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 1)$$

Si ha quindi

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$E(u, v) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$F(u, v) = -\frac{1}{2}$$

$$G(u, v) = 1 + 1 = 2$$

Quindi

$$\sqrt{E(u, v)G(u, v) - (F(u, v))^2} = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Si ha quindi

$$\iint_S x \, ds = \iint_T u \cdot \frac{3}{2} \, du \, dv = \frac{3}{2} \iint_T u \, du \, dv$$

Si ha $p_1(D) = [0, 2]$ e per $u \in [0, 2]$ n he

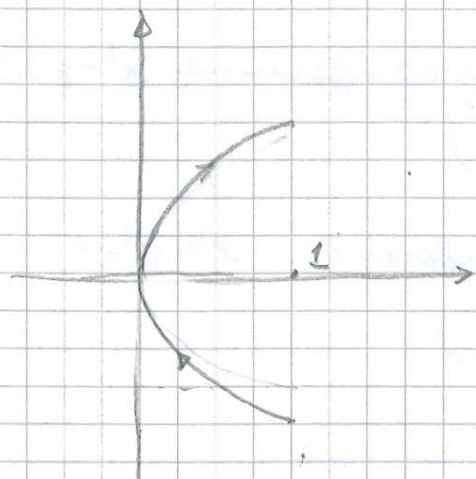
$$D(u) = \left[\frac{u}{2} - 1, 0\right]. \quad \text{Si ha quindi}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \iint_T u \, du \, dv &= \frac{3}{2} \int_0^2 \left(\int_{\frac{u}{2}-1}^0 u \, dv \right) du = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 u \left(1 - \frac{u}{2} \right) du = \frac{3}{2} \int_0^2 \left(u - \frac{u^2}{2} \right) du = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{6} u^3 \right]_0^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} 4 - \frac{1}{6} 8 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left(2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

Esercizio 4



Una parametrizzazione di Γ è la funzione φ definita da

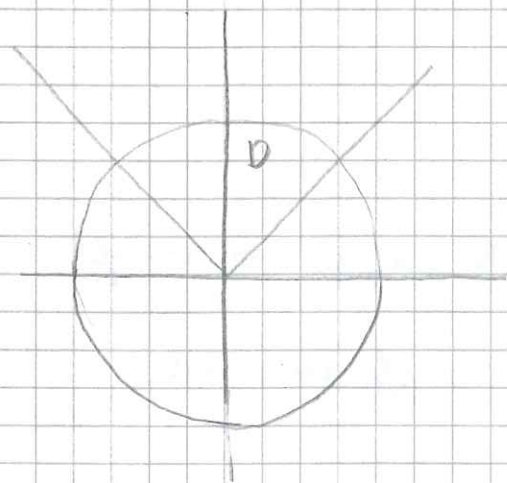
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Sicché

$$\int_{\Gamma} x y \, dx = \int_{-1}^1 t^2 \cdot t \cdot 2t \, dt = 2 \int_{-1}^1 t^4 \, dt =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5} t^5 \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Esercizio 5



Sia $D = \text{dom}(f)$; essendo D compatto ed essendo f continua per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x, y) \in \overset{0}{D}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \neq 0 \quad \text{Si ha quindi}$$

$$E \cap \overset{0}{D} = \emptyset$$

La retta $y = x$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nei punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

La retta $y = -x$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nei punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Sia

$$F_1 =](0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})[$$

$$F_2 =](0, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})[$$

$$F_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, y > 0 \right\}$$

$$F_3 = \{(0, 0)\}$$

$$F_4 = \left\{ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \right\}$$

$$F_5 = \left\{ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \right\}$$

Risulte

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5$$

Sia $g: \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y$

F_1 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ differenziale

di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y)=0$.

Identifichiamo f con la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow 2x+3y$$

Se $(x,y) \in F_1 \cap E$, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x,y) = \lambda \text{ grad } g(x,y)$$

cioè tale che

$$(2, 3) = \lambda (1, -1)$$

Si ha $2 = \lambda$ e $3 = -\lambda$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$F_1 \cap E = \emptyset$$

Sia ora $g: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow x+y$

F_2 è la sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y)=0$

Se $(x,y) \in F_2 \cap E$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x,y) = \lambda \text{ grad } g(x,y),$$

cioè tale che

$$(2, 3) = \lambda (1, 1)$$

Si ha $2 = \lambda$ e $3 = \lambda$. Ciò è assurdo. Si ha quindi

$$F_2 \cap E = \emptyset$$

Sia ora $g: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow x^2 + y^2 - 1$

F_3 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y) = 0$

Se $(x,y) \in F_3 \cap E$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x,y) = \lambda \text{ grad } g(x,y),$$

così tale che

$$(2, 3) = \lambda (2x, 2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$, il sistema non ha soluzioni. Supponiamo

$\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{1}{\lambda}, \quad y = \frac{3}{2\lambda}$$

Quindi

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$13 = 4\lambda^2 \quad ; \text{ quindi } \lambda^2 = \frac{13}{4} \quad ; \text{ quindi}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$, n he $x = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ e

$$y = \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Si he $\frac{2\sqrt{13}}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ se e solo se $\frac{4}{13} < \frac{1}{2}$ cioè

se e solo se $8 < 13$; quindi

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right)$$

soddisfa il sistema sopra

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ n he $y = -\frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{13}} < 0$; non

non ottiene alcuna soluzione del sistema sopra.

Si he quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{ \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right) \right\}$$

Si he quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right), (0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

Si he

$$f\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right) = \sqrt{13}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ha

$\sqrt{13} > \frac{5}{2}\sqrt{2}$ se e solo se $2\sqrt{13} > 5\sqrt{2}$, se e solo se

$4 \cdot 13 > 25 \cdot 2$, se e solo se $52 > 50$; ciò è vero

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{13}$, $\min(f) = 0$

Esercizio 6

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = x e^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

si scrive

$$\begin{cases} y' = x e^x e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\begin{cases} e^{-y} y' = x e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicata con soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_0^y e^{-t} dt = \int_0^x t e^t dt, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\left[-e^{-t} \right]_0^y = \left[t e^t \right]_0^x - \left[e^t \right]_0^x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

cioè

$$-e^{-y} + 1 = xe^x - e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

cioè

$$e^{-y} = e^x(1-x), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Si ha $e^x(1-x) > 0$; quindi $x < 1$.

L'equazione implicata sopra è equivalente a

$$e^{-y} = e^x(1-x), \quad x < 1, y \in \mathbb{R};$$

quindi a

$$-y = \log(e^x(1-x)), \quad x < 1, y \in \mathbb{R}$$

quindi a

$$y = -(\log e^x + \log(1-x)), \quad x < 1, y \in \mathbb{R}$$

quindi a

$$y = -x - \log(1-x), \quad x < 1$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\varphi:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x - \log(1-x)$$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 7\lambda - 15 = 0$$

$\lambda = 1$ è una soluzione. Si trova

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 7\lambda - 15 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 8\lambda + 15) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda + 5)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono quindi:

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -3, \quad \lambda = -5$$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi:

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = e^{-3x}, \quad \varphi_3(x) = e^{-5x}$$

Essendo 1 soluzione dell'equazione caratteristica, esiste AGR tale che

$$\psi(x) = A x e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

per cui

$$\psi'(x) = A e^x + A x e^x$$

$$\psi''(x) = A e^x + A e^x + A x e^x = 2A e^x + A x e^x$$

$$\psi'''(x) = 2A e^x + A e^x + A x e^x = 3A e^x + A x e^x$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$3A e^x + A x e^x + 7(2A e^x + A x e^x) + 7(A e^x + A x e^x) - 15A x e^x = e^x$$

cioè se e solo se

$$24A e^x = e^x$$

cioè se e solo se $A = \frac{1}{24}$

per cui quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{24} x e^x$$

Un integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-5x} + \frac{1}{24} x e^x$$

si ha

$$y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} - 5c_3 e^{-5x} + \frac{1}{24} e^x + \frac{1}{24} x e^x$$

$$y''(x) = c_1 e^x + 4c_2 e^{-2x} + 25c_3 e^{-5x} + \frac{1}{12} e^x + \frac{1}{24} x e^x$$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - 5c_3 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \\ c_1 + 4c_2 + 25c_3 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - 5c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 25c_3 = 0 \end{cases}$$

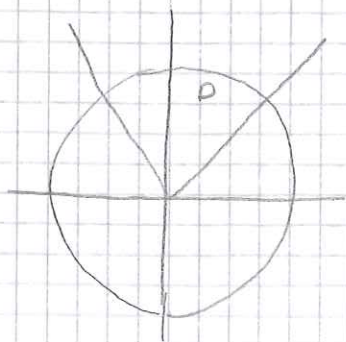
Essendo il sistema omogeneo ed ammettendo il sistema una ed una sola soluzione si ha

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{1}{24} x e^x$$

Esercizio 2



Una parametrizzazione minima di D è la funzione φ definita da

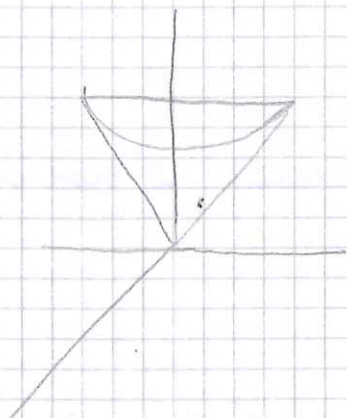
$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 \, dx \, dy &= \iint_{[0,1] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]} \rho^2 \sin^2 t \, \rho \, d\rho \, dt = \\ &= \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 t \, dt \right) = \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Esercizio 3



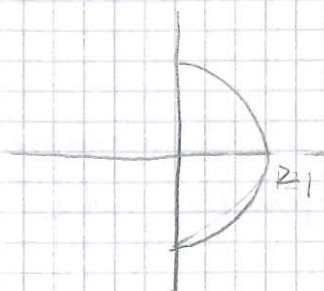
D è un solido curvilineo di vertice $(0,0,1)$, di asse l'asse z e di base il semicerchio

$$\{(x, y, 1); x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

$$\text{Si ha } \rho_3(D) = [0, 1]$$

Per ogni $z \in [0, 1]$ $D(z)$ è il "semicerchio"

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0\}.$$



$$\text{Si ha } \text{ms}(D(z)) = \frac{1}{2} \pi z^2.$$

Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx dy dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} dx dy \right) dz = \int_0^1 \text{mis}(D(z)) dz =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \pi z^2 dz = \frac{\pi}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$