Analisi Matematica 2 - 24/6/15 - Compito 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y,z) = \mathrm{Arctg}(xy + z^2 + 1) \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\; x > y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \log(e^x - e^y) \; ;$$

   calcolare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \; .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy\, dx + x^2\, dy \; .$$

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$[(0,0),(1,1)] \cup [(1,1),(2,0)] \cup [(2,0),(3,1)] \ .$$

orientato in modo che $(0,0)$ sia il punto iniziale e $(3,1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S z\,ds \ ,$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=4,\ 0 \le z \le 3\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f : \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ \frac{1}{2} \le 3x+2y+z \le 1\right\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x-y+z+3 \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy, di funzione incognita $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos x - \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y^2 \, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ y \geq 0, \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (y + z) \, dxdydz \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x \geq 0, \ y \leq 0, \ z \geq 0, \ \frac{x}{2} - y + z \leq 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.